Sokratisch Mathematisieren

Eine Untersuchung zu Leonard Nelsons Konzeption einer *Sokratischen Methode* im Kontext der Mathematik

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Philosophie

vorgelegt von
Shafie Shokrani

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
der Universität Siegen
Siegen 2020

Gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier.

Betreuer und erster Gutachter
Prof. Dr. Gregor Nickel
Universität Siegen

Zweiter Gutachter
Dr. habil. Matthias Wille

Tag der mündlichen Prüfung: 28.10.2020

Teile dieser Dissertation wurden veröffentlicht:

„'Feeling the essence of mathematics' – Sokratische Gespräche im Mathematischen Haus in Isfahan",
Shafie Shokrani, Susanne Spies,
SieB - Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, B. **10**, 141-160 (2018)

„Die Philosophie der Mathematik und die Sokratische Methode Leonard Nelsons – Ein Überblick",
Shafie Shokrani,
SieB - Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, B. **11**, 109-139 (2019)

Kurzfassung

***Sokratisch Mathematisieren* –**
Eine Untersuchung zu Leonard Nelsons Konzeption einer *Sokratischen Methode* im Kontext der Mathematik

Ausgehend von PLATONischen Texten wurde die *Sokratische Methode* von verschiedenen Pädagogen konzipiert und angewandt. Auch der Göttinger Philosoph LEONARD NELSON hat diese Methode zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts als eine wissenschaftliche sowie eine didaktische Methode im Kontext der neukantischen kritischen Philosophie konzipiert. Er hat sich *einerseits* mit der grundlegenden Frage der Möglichkeit des Lernens befasst, die in Form eines Paradoxons in PLATONs *Menon* erwähnt wurde. Hierzu behandelte er das Thema der *Genese* und *Geltung* der Erkenntnis in Anlehnung an die philosophischen Abhandlungen von I. KANT und J.F. FRIES. Als der Philosoph des *Hilbertprogramm*s hat NELSON andererseits die Grundlagen der Mathematik und Logik erforscht. Basierend auf diesen Untersuchungen stellte er die *kritische* Methode, die er von I. KANT und J.F. FRIES übernommen hat, als eine wissenschaftliche Methode dar. Diese Methode fand er zum einen beim PLATONischen SOKRATES als die Methode der Forschung und Lehre und zum anderen bei DAVID HILBERT als die *axiomatische* Methode wieder. Aus diesem Grund benannte er die Methode sowohl nach SOKRATES als auch als die Methode für das Lehren von Philosophie und Mathematik.

In der vorliegenden Arbeit wird die *Sokratische Methode* NELSONs speziell im Kontext der Mathematik vorgestellt und einer philosophischen Untersuchung unterzogen. Ausgehend von den beschriebenen Theorien der Methode und eigenen Erfahrungen des Unterrichts im *Isfahan Haus der Mathematik* wird zuletzt die Praxis der *Sokratischen Methode* im Mathematikunterricht diskutiert.

Abstract

Socratic Mathematizing – An Inquiry into Leonard Nelson's Conception of a Socratic Method in the Context of Mathematics

Motivated by PLATO's writings, the *Socratic Method* was conceived and applied by various pedagogues. The German philosopher LEONARD NELSON has also conceptualized this method at the beginning of the twentieth century as a scientific as well as a didactic method in the context of Neo-Kantian critical philosophy. He was engaged firstly in the fundamental question whether learning is possible, which is mentioned as a paradox in PLATO's *Meno*. In this respect, NELSON dealt with the topic of the genesis and validity of knowledge, following the philosophical conceptions of I. KANT and J.F. FRIES. Furthermore, as the philosopher of the *Hilbertprogramm*, NELSON explored also the foundations of mathematics and logic. Based on these investigations, he introduced the *critical* method, which he adapted from I. KANT and J.F. FRIES, as a scientific method. He identified this method on the one hand in the PLATONic dialogs of SOCRATES as the method of research and teaching and on the other hand in DAVID HILBERT's contributions as the *axiomatic* method. Hence, he named the method after SOCRATES and claimed this to be the appropriate method for teaching philosophy and mathematics.

In this dissertation, I will introduce NELSON's *Socratic Method*, specifically in the context of mathematics, and examine it philosophically. Based on the described theories on the method and own experiences of teaching in *Isfahan Mathematics House*, the practice of the *Socratic Method* in mathematics classroom will be then discussed.

Inhaltsverzeichnis

1 Sokratisches Gespräch und Mathematikunterricht – eine Einleitung

1.1 Die Notwendigkeit der Konfluenz von Philosophie und Didaktik der Mathematik

Die gegenwärtige Forschung zur Didaktik der Mathematik ist sich über die besondere Problematik ihres Forschungsgegenstandes insofern bewusst, als dass sie von der Abstraktheit der mathematische Gegenstände weiß: die mathematischen Gegenstände sind gerade nicht Teil unserer sinnlichen Erfahrung. Darüber hinaus gilt für die Didaktik im Allgemeinen, d.h. die Frage wie Inhalte vermittelt werden können, einerseits, dass eben diese Frage nach der Art und Weise der Vermittlung, nicht unabhängig von dem was vermittelt werden soll, gestellt werden kann. Andererseits steht aber auch infrage, was überhaupt unter Vermittlung zu verstehen ist. Diese Fragen sind von philosophischer Natur. Nicht nur die Eigenschaften der Begriffe „Mathematik" und „Wissensvermittlung", sondern auch die Möglichkeit ihrer Existenz überhaupt sind nicht ersichtlich. Diese Tatsache zeigt eben die Unvermeidbarkeit der philosophischen Untersuchungen im Kontext der Didaktik der Mathematik. Mit anderen Worten: Die Konzepte, Fragen und Aussagen in diesem Zusammenhang müssen einer ständigen philosophischen Überprüfung und Reflexion unterzogen und auf ihre Sinnhaftigkeit, Nachvollziehbarkeit und Anwendbarkeit hin untersucht werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, am Beispiel der Didaktik der Mathematik eine Form der *Reflexion* zu beschreiben, die es dem Lehrenden (der Mathematik) ermöglicht, jede seiner *Äußerungen* auf seine impliziten *Annahmen* zurückzuführen und diese zu hinterfragen. Was genau unter dieser *Reflexion*, den *Äußerungen* und den *Annahmen* zu verstehen ist, wird gerade Gegenstand der vorliegenden Arbeit und ihrer Reflexion auf eben dieses Gegenstands sein.

Dass philosophische Reflexionen – zur Mathematik – und die Frage nach dem Lehren und Lernen von Mathematik aufeinander bezogen sind, hat eine lange Tradition. So finden sich schon bei PLATON erste Ansätze dieses Verhältnis auszubuchstabieren. Dass hierbei die PLATONischen Werke in Dialogform verfasst sind, wurde häufig als Indiz dafür genommen, dass diese Form der wesentliche Aspekt der PLATONischen Didaktik ist. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit soll jedoch sein, gerade aufzuzeigen, dass es sich hierbei nur um eine spezielle Form der Vermittlung handelt, die von zeitlich-räumlichen Bedingungen sowie von Bräuchen abhängig ist. Bekannterweise sind für PLATON und seinen Lehrer SOKRATES aber die philosophischen Aspekte der Lehre von Erkenntniserlangung substanziell, die eben von solchen Bedingungen unabhängig sind.

Von besonderer Bedeutung in diesem Zusammenhang sind vor allem die Dialoge *Menon* und *Theätet*, wobei sich ersterer unter anderem mit der Frage auseinandersetzt, ob *Lernen* überhaupt möglich ist. Im *Theätet* wird von PLATON der Versuch unternommen *Wissen* und *Erkennen* zu beschreiben. In beiden Dialogen spielt die Mathematik eine zentrale Rolle. In *Theätet* ist (u.a.) die mathematische Erkenntnis der Gegenstand der Untersuchung und der Prozess des Lernens wird in *Menon* durch ein Gespräch über ein mathematisches Problem exemplifiziert. So konnten beide in der Folge eine wichtige Rolle bei der Gestaltung von Mathematikunterricht spielen, wobei jedoch unterschiedlich interpretiert wird, was das entscheidende der platonischen Vorlage ist. Sollte man sich an der genauen Form der Dialoge orientieren oder lässt sich hinter dieser speziellen Form, in einer solchen Untersuchung der Begriffe, eine philosophische Überzeugung ausmachen, die die historisch-kontingente Form des Dialogs begründet.

Diese zweite Auffassung zur Bedeutung der PLATONischen Dialoge wurde besonders prominent von KARL WEIERSTRASS und LEONARD NELSON vertreten. Während sich WEIERSTRASS' Auseinandersetzung auf einen Vortrag beschränkt, konzipiert NELSON mit Bezug auf die PLATONischen Lehren und die *Kritische Philosophie* nicht nur eine wissenschaftlich-pädagogische Methode, sondern setzt sich auch, unter anderem durch die Gründung einer pädagogischen Gesellschaft, für deren Etablierung ein. Ein besonderes Anliegen von ihm war hierbei die wechselseitige Durchdringung von fachdidaktischen und philosophischen bzw. erkenntnistheoretischen Fragen, die im Folgenden genauer dargelegt werden sollen. Dabei werden Mathematik und die *Sokratische* bzw. *Kritische Methode* aufeinander wechselseitig bezogen sein. Insofern kommt der Mathematik und der Methode in NELSONS Neukantisch-FRIESschen Erkenntnistheorie eine zentrale Stellung zu, und die vorliegenden Arbeit wird aufzeigen, dass es sich hierbei nicht um einen hermeneutischen Zirkel handelt. Entscheidend bei dieser Konzipierung der Erkenntnistheorie ist NELSONS (und WEIERSTRASS') Auseinandersetzung mit der modernen Mathematik des 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts. In seinen Betrachtung der Fachdidaktik spielt nicht nur die elementare Mathematik der Schule eine Rolle, sondern gerade die Mathematik als Ganzes, als Wissenschaft.

Diese Untersuchung beginnt mit einer kurzen Einführung des geschichtlichen Hintergrunds des Konzepts seit dem 18. Jahrhundert. Darüber hinaus werden in dem einleitenden Kapitel 1 die durch Nelson gegründete Tradition des „*Sokratischen Gesprächs*“ sowie ihre Nachfolger vorgestellt. Kapitel 2 besteht aus einer philosophischen Ausarbeitung der „Sokratischen Methode“ Nelsons als einer wissenschaftlich-didaktische Methode insbesondere im Kontext der Mathematik. Zunächst werden die notwendigen Fachtermini der „Kritischen Philosophie“ und anschließend die grundlegenden epistemologischen Prinzipien der Sokratischen Methode, nämlich die „*transzendentale-*“ und die „*formale Apperzeption*“ eingeführt. Basierend auf diesen Grundlagen wird im darauffolgenden Teil Nelsons Methodologie vorgestellt. Danach untersuche ich seine Philosophie der Mathematik und die Anwendung seiner Methodologie in diesem Kontext. Während Kapitel 2 die theoretische Seite der „Sokratischen Methode“ im Kontext der Mathematik behandelt, stellt Kapitel 3 eine exemplarische Anwendung der Methode im Mathematikunterricht dar. Dafür wird es zunächst verschiedene Ansätze zur Überbringung der Methode von Theorie in die Praxis vorgestellt. Im Anschluss daran werde ich über meine Erfahrungen berichten, die ich mit meinen Kollegen im *Isfahan Haus der Mathematik* über die Anwendung der „Sokratischen Methode“ im Mathematikunterricht gesammelt habe.

Der geschichtliche Hintergrund des Konzepts „Sokratische Methode im Mathematikunterricht“ nach Platon bildet eine Basis für die darauffolgende Untersuchung des Konzepts. Dieser Hintergrund soll ein Bild von den Errungenschaften zur Anwendung der platonisch-sokratischen Lehren in der Didaktik der Mathematik vor Nelson exemplarisch darstellen.

1.2 Ein Blick auf die Geschichte der Sokratischen Methode

Die *Sokratische Didaktik*, wie sie Platon in seinen Schriften dargestellt hat, diente verschiedenen Positionen in der Geschichte nach Platon insbesondere in der Didaktik der Mathematik als Ausgangspunkt und Vorbild. Die Ausführlichkeit der jeweiligen Untersuchungen dieser Konzeption zeigte ein sehr breites Spektrum. Einerseits gab es Didaktiker, die sich nur auf das bekannteste Element der *Sokratischen Didaktik*, nämlich die Gesprächsform bezogen haben und trotzdem ihre

Methode nach Sokrates bezeichnet haben. Andererseits gab es Didaktiker, die zunächst eine ausführlichere philosophisch-didaktische Untersuchung dieser Lehrkonzeption durchgeführt haben, um eine klarere Vorstellung davon zu gewinnen. Einige von ihnen haben sie für den Mathematikunterricht sogar ungeeignet gefunden. Im Buch „Lehren ohne Belehrung" stellt Rainer Loska einige Didaktiker aus dem gesamten o.g. Spektrum vor[1]. In dieser Arbeit betrachte ich die Errungenschaften von drei Personen, beginnend mit einer kurzen Vorstellung der Sokratischen Gespräche Johann Andreas Christian Michelsens und des Beitrags Karl Theodor Wilhelm Weierstrass' zu der Sokratischen Lehrmethode. Daran anschließend führe ich in „Die Sokratische Methode" Leonard Nelsons und die Tradition, die durch Weiterentwicklung seiner Methode entstanden sind, ein. Diese drei Denker gehören einerseits zu den Wenigen, die die Anwendung der *Sokratischen Didaktik* im mathematischen Kontext explizit diskutieren. Andererseits sind ihre Abhandlungen in Bezug auf die Ausführlichkeit der philosophischen Untersuchung und im Verständnis der Konzeption ganz unterschiedlich.

1.2.1 Michelsen

Johann Andreas Christian Michelsen (1749-1797) war Professor für Mathematik und Physik am Gymnasium zum Grauen Kloster in Berlin.[2] Zur Förderung der Didaktik der Mathematik hat er mehrere Bücher geschrieben. Zwischen 1781 und 1784 veröffentlichte er jährlich ein neues Exemplar der Reihe *Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie*[3], in denen er Lehrgespräche mit seinen Schülern protokollierte. In ähnlicher Weise hat er jährlich im Zeitraum um 1784 bis 1786 Bücher im Kontext der Arithmetik veröffentlicht[4]. Diese Publikationen spiegeln alle seine eigene Entwicklung im Kontext der Sokratischen Didaktik exemplarisch wieder. In diesem Zusammenhang ist „*Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik insbesondere für Schullehrer und Praktiker*"[5] ein weiteres im Jahr 1790 von ihm veröffentlichtes Buch. In diesem legt er u.a. eine philosophische Untersuchung der Mathematik und ihrer Didaktik vor, in der er aber das Thema sokratisches Gespräch ausklammert.

Er begründet seine Motivation, diese Gespräche zu protokollieren, in dem ersten Buch zum Thema Geometrie wie folgt:

1. Loska 1995.
2. Vgl. Cantor 1885.
3. Michelsen 1781, Michelsen 1782, Michelsen 1783 u. Michelsen 1784b.
4. Michelsen 1784a, Michelsen 1785, u. Michelsen 1786.
5. Michelsen 1790.

> „Die folgenden Gespräche sind großtentheils so, wie sie da stehen, mit Kindern, die noch gar nicht in der Mathematic unterrichtet waren, gehalten worden. Mehrere mir sehr verehrungswürdige Männer, die Augenzeugen von dem Erfolge gewesen, mit welchem ich dergleichen Unterredungen über die ganze ebene Geometrie mit Kindern angestellt habe, haben mich zu ihrer Herausgabe ermuntert."[6]

Eine genaue, klare Beschreibung des sokratischen Gesprächs kann allerdings bei ihm nicht gefunden werden. Er beschreibt jedoch seine Arbeit ganz allgemein:

> „Socratisch habe ich die Gespräche genannt, weil darin oft der Lehrling so geleitet wird, daß er das zu lernende selbst findet, ich weiß aber sehr wohl, wie viel ihnen fehlt, um diese Benennung ganz zu verdienen. Sollte es nach diesem Versuche der Mühe werth gehalten werden, so entschlösse ich mich vielleicht, die ganze ebene Geometrie auf eine ähnliche Art abzuhandeln, doch so, daß ich von mehreren ähnlichen Fällen jedesmal nur eine vollständige Unterredung mittheilte, und in Ansehung der übrigen es bey einer Beschreibung des genommenen Weges bewenden liesse. Hielte man nemlich diese Arbeit für nützlich, so wünschte ich nützlich zu werden, ohne durch übertriebene Weitläufigkeit ekelhaft zu seyn."[7]

Er berichtet, dass er zunächst ein sechsjähriges Kind in der Geometrie unterrichtet hatte und dass ihm selbst dabei dessen Freude an dem Unterrichtsstoff und seine Konzentration äußerst viel Freude bereitet hatte. Später unterrichtete er etwa zwei Jahre lang Neunjährige auf Basis von Euklids „*Elementen*", so dass diese die ersten sechs Bücher verstanden hätten[8]. Daraus schlussfolgerte er, dass sogar Kinder im Grundschulalter „Bemerkungs- und Vergleichungskraft" besitzen, um ihnen die Gegenstände der Geometrie, die seiner Meinung nach sehr anschaulich sind, im wahrsten Sinne des Wortes vor Augen zu führen.

Darüber hinaus führt er einige Verhaltensmerkmale, die Kindern im Gegensatz zu Erwachsenen eigen sind, an, die er für sokratische Gespräche als nützlich erachtet, z.B. ihre Fähigkeit, sich längere Zeit auf einzelne Gegenstände zu konzentrieren, die dazu gehörigen Details und Aspekte festzustellen und sich auf Lehreranweisungen bereitwilliger einzulassen.[9] Hier empfiehlt er einen frühen Beginn mit dem Mathematikunterricht, vorzugsweise mit Geometrie, um hiermit mathematisch-wissenschaftliches Denken herauszubilden. Dabei müsse beachtet werden, dass die

6. Michelsen 1781, S. 1.
7. Michelsen 1781, S. 2.
8. Vgl. Michelsen 1782, S. IIIf.
9. Vgl. Michelsen 1782, S. IV.

Lernenden diese Inhalte und Fertigkeiten so festigen, dass sie sie als ein Fundament für weitergehenden Erkenntnisgewinn allgemein nutzen könnt. Bleibe dies unberücksichtigt, besteht laut MICHELSEN die Gefahr,

> „daß [die Lernenden dann] so wenige Lust zur Mathematic haben, dieselbe behalten und Fortgang darin machen; die Schwierigkeiten, die ohne jene Uebung statt finden, müssen sie von der Mathematic abwendig machen.“[10]

Des Weiteren erklärt er es als notwendig, dass der Lehrer Geometrieunterricht anfänglich völlig ohne Zuhilfenahme eines Buches oder anderer Darstellungen durchführt und damit die Lernenden dazu veranlasst, sich selbst ein Bild des Unterrichtsgegenstandes zu machen. Auf diese Weise soll die bloße Reproduktion durch das Erinnerungsvermögen der Kinder verhindert werden.[11]

Was das Einbeziehen des Buches in den Unterricht betrifft, ist es ihm wichtig, dass der Lehrer zuerst selber den für den Unterricht relevanten Teil liest und vorbereitet. Auf dieser Basis kann der Lehrer den Kindern den Gegenstand des Gesprächs besser vorstellen und sie so auf das Lesen vorbereiten. Dabei kann es hilfreich sein, wenn der Lehrer selber zunächst den Auszug aus dem Buch vorliest, um es so den Kindern zu erleichtern, den Sachverhalt zu verstehen. Eine solche Unterrichtsgestaltung soll das Lesen des Textes für die Kinder deutlich zugänglicher machen. Dabei schließt MICHELSEN nicht aus, dass auch ohne eine solche Vorbereitung zu Beginn der Erarbeitung die direkte Konfrontation der Lernenden mit dem Text stehen könnte.[12]

Abschließend bat er im Vorwort des zweiten Buches andere Didaktiker, seine Methode zu bewerten und machte dabei allerdings auch seine eigene Beurteilung klar:

> „Soll ich nun noch ferner fortfahren, die Geometrie in Gesprächen zu bearbeiten? Ich will es auf das Urtheil der Kenner ankommen lassen. Wo ich die in den herausgegebenen Gesprächen zum Grunde liegende Methode wirklich angewandt habe, habe ich allerdings sehr guten Erfolg wahrgenommen.“[13]

In der bereits erwähnte Darstellung behauptet LOSKA, dass in MICHELSENS Konzept die Rolle des Lehrers dominiert, da der Lehrer Fragen vorgibt und auch bisweilen

10. Vgl. Michelsen 1782, S. V.
11. Vgl. Michelsen 1782, S. V.
12. Vgl. Michelsen 1782, S. VIf.
13. Michelsen 1782, S. VII.

sein Urteil äußert und zudem Schüleraussagen bewertet.[14] Dennoch aktiviert Michelsen die Schüler im Unterricht, laut Loska, indem sie Vermutungen anstellen und Einwürfe sowie Begründungen vornehmen dürfen. Die Inhalte umfassen dabei einfachere sowie komplexere Themen. Gelegentlich präsentieren die Lernenden weitgehend selbstständig Beweise und werden dabei aufgefordert, ihre Meinungen dazu zu äußern. Er merkt dazu an:

> „Durch die Dialogsituation wird [der Lernende] ständig gehalten, Überlegungen zu jeweiligen Sache anzustellen, und diese, meist durch Fragen hervor gelockt, explizit zu machen. Wenn auch die Methode ununterschieden auf verschiedene Inhalte – Bezeichnungskonventionen, Begriffsbildungen, Aufgaben, Lehrsätze usw. — angewandt wird, geben die Dialoge wieder, daß der Schüler mitdenkend dem mitunter anspruchsvollen Unterricht folgt und eine aktivere Rolle innehat."[15]

1.2.2 Weierstraß

Der Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) hat *im Jahresbericht über das Königl. Progymnasium in Dt. Crone vom Herbst 1844 bis zum Herbst 1845* die Abhandlung „Über die sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte"[16] veröffentlicht. Diese solle jedoch keine „erschöpfende pädagogische Abhandlung" sein, sondern ein „zufälliger Umstand" habe ihn zur Veröffentlichung ohne „durchgreifende Überarbeitung" motiviert.[17]

Als die möglichen Quellen seiner Abhandlung nennt Weierstrass zunächst die Schrifften Xenophons und Platons. Da er aber Xenophons Arbeit nur populär und nicht wissenschaftlich findet, bezieht er sich lediglich auf die Werke Platons. Laut Weierstrass stellt Platon Sokrates als Weisen dar, der nur dafür lebt,

> „die vom Schein und Trug der Sinne befangenen Menschen von dem eitlen und verderblichen Trachten nach Reichtum, Macht, Wohlleben und unfruchtbarer Wortweisheit abzuziehen".[18].

Durch die Analyse der Platonischen Gespräche, beabsichtigt zunächst Weierstrass, die Natur der von Sokrates untersuchten Gegenstände zu finden, um zu erkunden „welche Gegenstände sich überhaupt nach seiner Weise behandeln

14. Vgl. Loska 1995, S. 86f.
15. Loska 1995, S. 87.
16. Weierstrass 2013.
17. Vgl. ebd. S. 315.
18. Ebd. S. 316.

lassen".[19] Dafür versucht WEIERSTRASS diesen Zweck mit der Analyse der Bücher „Menon" und „Theaitet" zu erfüllen. Es hat sich allerdings für ihn herausgestellt, dass man den Zusammenhang zum Gesamtwerk in Rechnung stellen müsste und er hier also nur einige wenige Andeutungen machen könnte. Er beginnt mit einer kleinen Charakterisierung der sozialen und historischen Umstände in SOKRATES' Athen, in dem die „Redekunst" der Sophistik eine herausragende Rolle spielte, insbesondere für die jungen Männer, die gierig waren „im Staate sich auszuzeichnen und zu Einfluss zu gelangen".[20] Unter diesen Umständen trat SOKRATES den Sophisten entgegen, und zeigte den „Jüngligen", "den rechten Weg zur Wahrheit und zur Tugend" zu finden.[21] WEIERSTRASS legt dar, dass SOKRATES' erster Schritt dazu war, gegen den „Dünkel, schon recht vieles zu wissen" zu kämpfen, und seine Schüler erkennen zu lassen die „Nichtigkeit des menschlichen Wissens" zu erkennen.[22] Darüber hinaus verweist WEIERSTRASS auf die Praxis des „Elenchus"[23] durch SOKRATES und dass er sie „von der herrschenden Richtung , die auf Reichthum, Macht und Genuss ging" ablenkte und sie mittels einer indirekten Methode „von gefährlichen Irrtümern" befreite.[24]:

> „Er liess sich vielmehr zu ihren Ansichten herab, nur oft durch eine leise Ironie ihren Irrthum gleich Anfangs sie ahnen lassend; und durch Beispiele aus ihrer eigenen Erfahrung, sie an bestimmte, unbestreitbare und von ihnen selbst anerkannte Wahrheiten erinnernd führte er sie allmählig zur Erkenntnis des Unhaltbaren und Widersprechenden ihrer vorgefassten und oft nicht einmal recht verstandenen Meinungen."[25]

Daran anschließend „liess er sie ahnen, es möge doch wohl etwas Besseres geben als die Güter, nach denen die bethörte Menge trachtete und etwas Gewisseres als den äußeren Schein". SOKRATES lehrte ebenso, dass nur derjenige das einsehen kann, der auf die „Regungen des Göttlichen in dem menschlichen Geiste mit frommer Seele achte", und damit setze er also die Selbsterkenntnis voraus.[26]

SOKRATES hat sich, laut WEIERSTRASS von den meisten anderen Philosophen vor und nach ihm dadurch ausgezeichnet, dass er nicht die Resultate eigener Forschungen vorgetragen hat, sondern er hat seinen Schüler dabei unterstützt die Erkenntnis in seiner eigener Seele „nach und nach [...] entwickeln zu lassen, in der

19. Ebd.
20. Ebd. S. 317.
21. Ebd. S. 318.
22. Ebd. S. 318f.
23. Widerlegen.
24. Ebd. S. 319.
25. Ebd. S. 319f.
26. Vgl. ebd. S. 320.

Art, dass sie ihm als Produkt seiner eigenen geistigen Kraft erscheinen sollte“.[27] Hier hat er sich also nicht „mitgeteilt“, sondern auf ein „Anregen und Beleben der geistigen Tätigkeit“ abgezielt.[28] Diese Lehrmethode hat laut Weierstrass einerseits den Gegenständen, die diskutiert wurden, andererseits dem Verständnis, das Sokrates von diesen hatte, entsprochen. Weierstrass folgert daraus, dass die Erkenntnisse, für die Sokrates sich interessiert hat, nicht von der Natur sind, nur äußerlich mitgeteilt und einprägt werden zu können. Es sei denn, dass sie nur als „leere Formeln, wie es selbst bei den Schülern des Pythagoras zum Theil der Fall gewesen“ ist, bei den Lernenden bleiben sollten.[29] Im Anschluss daran verweist Weierstrass auf den Theaitet, indem sich Sokrates mit seiner Mutter vergleicht, die eine Hebamme war: Statt bei leiblichen Kindern hilft er bei der Geburt von fruchtbaren Gedanken, d.h. im Gegensatz zu seiner Mutter, unterstützt er junge Männer, ihre Ideen zur Welt zu bringen.

Die Anamnesis-Lehre ist das nächste Merkmal der sokratischen Methode, auf das Weierstrass durch ein Beispiel hinweist: „So spricht er sich unter anderm im Menon aus, und führt zum Beweise an, dass man namentlich jeden Menschen dahin bringen könne, die Sätze der Geometrie sich selbst zu entwickeln, wenn man ihn nur durch zweckmäßige Fragen anleite.“[30]

Ob die Menon-Szene ein gutes Beispiel für eine Lehrsituation wäre, bezweifelt Weierstrass: In diesem Gespräch findet er jedoch das Zugeständnis des Nicht-Wissens durch den Sklave als eine essentielle Stufe.[31]

Um darauf hinzuweisen, welche Themen für die sokratische Methode geeignet sind, spricht Weierstrass danach über die „Ideen“. Eine nähere Betrachtung der Anamnesis-Lehre findet laut Weierstrass in Phaidon statt, indem unter anderem die Ideen thematisiert werden. Da sie nicht aus der Sinnenwelt entnommen werden, können sie nur in der Seele vorhanden sein. Sokrates stellt sie als „Erinnerungen der Seele aus einem früheren, vollkommenern Zustande“ dar.[32]

Weierstrass stellt die Gleichheit der äußeren Form der sokratischen Methode mit der „katechetischen Lehrart“ fest, „wenn man von dem häufigen Gebrauch der Ironie absieht“.[33] Diese Gleichheit der beiden Methoden sieh er durch die folgenden Merkmalen bestätigt[34]:

27. Ebd. S. 321.
28. Ebd.
29. Vgl. ebd.
30. Ebd. S. 321.
31. Vgl. ebd. S. 321f.
32. Ebd. S. 322.
33. Ebd.
34. Ebd. S. 323.

a. Beide haben die Form eines Gesprächs.

b. Der Lehrer stellt in beiden Methoden Fragen.

c. Der zu findende Begriff muss vom Lehrer vorab zergliedert sein, um den Prozess des Lernens für die Schüler zu erleichtern.

d. Fehler werden nicht korrigiert, sondern sollen, durch Fragen angeregt, selbst verbessert werden.

e. Der Lehrer muss das Ziel im Auge behalten und den Diskurs passend lenken.

Entsprechend ist der Unterschied zwischen dem Konzept von Katechese und dem von sokratischem Gespräch nicht in der äußeren Form, sondern in den zugrundeliegenden Ansichten zu suchen. Zur katechetischen Methode, die WEIERSTRASS für einen Elementar-Unterricht sinnvoll findet, sagt er:

> „Es bezieht sich aber hier das Katechisieren, abgesehen davon, dass es zum Theil bloss prüfend und wiederholend ist, meistentheils auf einen gegebenen äussern Stoff, der für die Fassungskraft des Schülers zergliedert wird. Selbst wenn eine solche Übung einzig die Weckung und Stärkung der geistigen Kräfte zum Zweck hat, so ist das doch noch keineswegs Sokratik.“[35]

Das Wesen der sokratischen Methode dagegen legt er wie folgt dar:

> „Diejenigen Erkenntnisse, welche entweder ihre Quelle unmittelbar in den Anlagen der menschlichen Natur haben, oder aus bereits vorhandenen Vorstellungen, Begriffen und Ideen abgeleitet werden können, lässt die Sokratische Methode den Lehrling durch eigen Geistesthätigkeit auffinden und gewissermassen erzeugen.“[36]

Darüber hinaus richtet sie sich nicht nur auf formale Zwecken. Die sokratische Methode übt zwar die Denkkraft, aber es sollen doch auch bestimmte Resultate erreicht werden, die „dem Geist als Eigentum verbleiben“.[37]

WEIERSTRASS verweist ebenso auf den Unterschied der sokratischen zur „heuristischen“ und „akroamatische Lehrform“. Bei der „Heuristik“ soll, nach WEIERSTRASS, der Schüler im Vergleich mit der sokratischen Methode deutlich mehr *Freiheit* haben.[38] Im Gegensatz dazu trägt der Lehrer bei der „Akromatik“ vor und der Schüler ist dabei mehr *beschränkt*. Wenn geeignete Umstände vorbereitet werden, wie z.B.

35. Ebd.
36. Ebd.
37. Ebd. S. 324.
38. Vgl. ebd.

reifere Schüler, hat laut ihm diese Methode den dauerhaftesten Eindruck auf den Schüler. Außerdem kann sie den Schülern eine Muster für die wissenschaftliche Behandlung eines Gegenstandes liefern.[39]

Die Frage “wie weit die eigene Geistesthätigkeit des Schülers gehen könne, und in welcher Art der Lehrer einzugreifen habe“[40] kann nach WEIERSTRASS nicht im allgemeinen beantwortet werden. Er zählt jedoch einige Faktoren auf, die in diesem Zusammenhang entscheidend sind:

- „die Natur des Lehrgegenstandes,“
- „der Grad der Vorbildung des Schülers,“
- „die Virtuosität des Lehrers,“ usw.

Die Lehrgegenstände, für die die Sokratische Methode geeignet ist, können nicht aus dem „Gebiete des historischen Wissens im weitesten Sinne des Worts und der Real-Disciplinen“ stammen. „[D]ie philosophischen Wissenschaften, die reine Mathematik und die Theorie der allgemeinen Gesetze der Sprache“ sind dagegen „ihr eigenthümliches Feld“.[41] Notwendig findet WEIERSTRASS aber noch dazu, dass die äußere Umstände für die Anwendbarkeit der sokratischen Methode ebenfalls vorhanden sein müssen. Diese sind:

- dass nur einer oder wenige Schüler im Gespräch teilnehmen sollten, da das Besprechen des Themas mit einem den anderen überhaupt nicht weiterhelfen kann;
- dass die Schüler eine gewisse Reife besitzen müssen;
- dass der „Lehrer von ausgezeichnetem Talente“ sein muss.[42]

Als Fazit stellt WEIERSTRASS fest, dass im Rahmen der Propädeutik die sokratische Methode in der Philosophie „ganz an ihrer Stelle“ ist. Für die Mathematik gebe es wiederum Stimmen, die die Sokratik fordern. Hieran gebe es aber auch gewichtige Kritik. Er argumentiert, dass eine ganze Klasse nicht auf sokratische Weise mit Erfolg unterrichtet werden kann.[43] Anschließend daran behauptet er, dass ein gründliches Verständnis auch dann erzielt werden kann, wenn der Schüler nicht selbst erfinderisch vorgeht. Durch Darstellung des Verfahrens wie eine Wissenschaft genetisch aufgebaut wird, soll der Lehrer den Schülern verständlich demonstrieren,

39. Vgl. ebd. S. 325f.
40. Ebd. S. 324f.
41. Vgl. ebd. S. 326f.
42. Vgl. ebd. S. 327.
43. Vgl. ebd. S. 329.

wie die Wissenschaftler ausgehend von ihren „inwohnenden Grundvorstellungen" sie entwickelt haben.[44]

> „An seinem [des Lehrers] Verfahren soll der Schüler mathematisch denken lernen. An Folgerungen aus fruchtbaren Hauptsätzen, an Lösungen mannichfaltiger Aufgaben mag dann auch die Sokratische Methode geübt werden."[45]

Weierstrass schließt seinen Beitrag mit dem Punkt, dass die didaktischen Ziele seiner Zeit sich eben doch von Sokrates' Zielen unterscheiden. Schön fände es jedoch Weierstrass, wenn sein Geist überall die „Seele der Erziehung und des Unterrichts wäre – seine hohe Begeisterung für das Wahre, Schöne und Gute".[46]

1.3 Sokratisches Gespräch in der *Philosophisch-Politischen Akademie* und der *Gesellschaft für Sokratisches Philosophieren*

1.3.1 Der Anfang

Der Göttinger Philosoph und Pädagoge Leonard Nelson (1882-1927) hat durch Konzipierung einer pädagogischen Methode, die er nach Sokrates benannt hat, eine Tradition begründet. Diese Tradition wurde zunächst von seinen Schülern Gustav Heckmann, Minna Specht und Grete Henry-Hermann weiterentwickelt. Sie wird heute durch die *Philosophisch-Politische Akademie (PPA)*, die Nelson selbst etabliert hatte, und die *Gesellschaft für Sokratisches Philosophieren (GSP)* weiter verfolgt. Nelsons *Sokratische Methode* und die Philosophie, die er zur Begründung dieser Methode verwendet hat, wurde in dieser Hinsicht durch mehrere Forscher untersucht.[47] In der Mathematik haben Fachdidaktiker wie Martin Wagenschein, Hartmut Spiegel und Rainer Loska diese Tradition erforscht und Nelsons Lehr-Methode angewandt.

Nelsons Zusammenarbeit und Freundschaft mit David Hilbert (1862-1943) und die Tatsache, dass man ihn den Philosophen des Hilbertprogramms nennen

44. Vgl. ebd. S. 329.
45. Ebd.
46. Ebd.
47. Eine ausführliche philosophische Untersuchung findet man z.B. in Raupach-Strey 2012.

könnte[48], ist u.a. ein Grund, warum die Erforschung seiner Methode im mathematik-philosophischen Kontext bedeutsam ist. Dies gilt aber auch, weil die wissenschaftliche Methode, die er in seinen Beiträgen zu den Grundlagen der Mathematik angewandt hat, nämlich die durch J. F. FRIES (1773-1843) konzipierte „*kritische Methode*“, eines der Hauptelemente seiner pädagogischen Methode ist. NELSON nennt diese wissenschaftliche Methode u.a. die *sokratische Methode*.

Von einer anderen Perspektive betrachtet ist eine Frage, die sich bei der *sokratischen Methode* stellt, warum NELSON sie nach SOKRATES benannt hat. NELSON selbst rechtfertigte die Bezeichnung seiner Methode als *sokratisch* mehrfach explizit. Er versteht sich als einen „getreuen Schüler des SOKRATES“.[49] Als solcher kritisierte er ihn auch an manchen Stellen sehr scharf, sowohl hinsichtlich seiner Lehrweise als auch in Bezug zu seiner Philosophie. Dennoch zählt NELSON einige Eigenschaften der sokratischen Lehrweise auf, die er SOKRATES als Erfolg zuschrieb.[50] Er geht sogar so weit, SOKRATES und KANT als die einzigen zu bezeichnen, die „die Philosophie aus dem Stadium des Herumtappens auf den sicheren Weg der Wissenschaft“[51] gebracht hätten. Wir werden uns hier mit seiner Argumentation näher befassen, jedoch ohne einen detaillierten Vergleich mit der platonisch-sokratischen Philosophie durchzuführen.

Um die oben genannte Behauptung im Kontext der Mathematik zu begründen, zählt NELSON zwei Faktoren auf, die er für sehr wichtig hielt. Erstens die Anwendung der *kritischen Methode*[52], die eigentlich ein Prozess der *Abstraktion* sei, eine Art der *Idealisierung*, wodurch man im Verlauf des Prozesses auf *Ideale* treffe. Im Prozess der *Idealisierung* müsse man zweitens unausweichlich, sozusagen „garantiert“ auf die *Ideale* stoßen (vgl. Nelson 1970a). D.h. die *Ideale* spielen bei dem Prozess der Abstraktion auf der einen Seite die Rolle einer Norm, auf der anderen Seite existieren sie als unmittelbare Erkenntnisse, wenn auch dunkel in uns, und zwar unabhängig vom Prozess der *Abstraktion*. Während dieses Prozesses findet folglich keine neue Erkenntnis statt, sondern es werden dadurch lediglich die unmittelbaren Erkenntnisse, die ja schon vorhanden sind, lebendig.

Mit den o.g. Aspekten, nämlich dem NELSONschen Prozess der Abstraktion sowie den notwendigen Normen und Voraussetzungen dafür, werden wir uns detailliert im nächsten Kapitel beschäftigen. Dazu wird auch die NELSONsche Philosophie der Mathematik untersucht, da in dieser Arbeit der Prozess der Abstraktion im Kontext

48. Für eine ausführliche Beitrag dazu siehe Peckhaus 1990.
49. Nelson 2002 S. 271.
50. Ebd. S. 287ff.
51. Ebd. S. 275.
52. NELSON bezeichnet die *regressive Methode der Abstraktion* u.a. als *die kritische Methode* oder als *die sokratische Methode*. Siehe Nelson 1917 S. 277f u. 280f.

von Mathematik interessant ist. Außerdem wird hier parallel NELSONs Philosophie auch Philosophie PLATONs sowie deren Philosophie der Mathematik betrachtet, um einen Vergleich zwischen NELSONs und Platons Konzeption durchführen zu können.

1.3.2 Gustav Heckmann

Einer der Zuhörer von NELSONs Vortrag „Die Sokratische Methode", den er für die Göttinger Pädagogische Gesellschaft hielt, war der junge GUSTAV HECKMANN (1898-1996). Nachdem dieser sein Staatsexamen in Mathematik und Physik abgelegt sowie seine Doktorarbeit bei MAX BORN (1882 - 1970) abgeschlossen hatte, entschied er sich, in der Walkemühle-Schule, eine von NELSON gegründete und von MINNA SPECHT (1879-1961) geleitete Reformschule, als Lehrer für die o.g. Fächer zu arbeiten.

In dieser Zeit hat NELSON seine sokratische Methode in zwei Institutionen, nämlich in seinen Philosophieseminaren an der Universität Göttingen und an der Walkemühle-Schule sowohl mit Kindern als auch mit Erwachsenen, angewendet und darüber hinaus auch in der Arbeiterbewegung und in Kursen für politische Bildung für Erwachsene.

Nach NELSONs Tod 1928 wurde die Walkemühle-Schule 1933 von der nationalsozialistischen Regierung geschlossen, später jedoch in Dänemark und dann in Großbritannien als Exilschule wieder errichtet. Nach dem Zweiten Weltkrieg haben zahlreiche Menschen, die NELSON nahestanden, versucht, seine Ideen weiterzuführen und beim Aufbau einer sozialen Gesellschaft mitzuwirken. In dieser Zeit bildete GUSTAV HECKMANN an der Pädagogischen Hochschule Hannover Lehramtsanwärter aus, GRETE HENRY-HERMANN (1901-1984) war als Physikerin und Pädagogin an der Hochschule Bremen beschäftigt, während MINNA SPECHT, nachdem sie die Odenwald-Schule für einige Jahre geleitet hatte, eine Tätigkeit bei der UNESCO annahm. Alle diese Personen hatten einen großen Anteil daran, die NELSONsche Tradition im weitesten Sinne lebendig zu halten. Seit den 1960er Jahren hat z. B. die Philosophisch-Politische Akademie e.V. regelmäßig sokratische Wochen veranstaltet. HECKMANN spielte dabei eine herausragende Rolle: Nach 1945 hatte er eine Gruppe von Gesprächsleitern, die zu NELSONs Lebzeiten von ihm ausgebildet worden waren, um sich gesammelt, um sie als Mediatoren für diese Methode weiter zu schulen. Er hat diese Methode ebenfalls theoretisch weiterentwickelt und in gewissem Sinne verändert. Er hat z.B. zum ersten Mal einige Regeln für Gesprächsleiter explizit formuliert und darüber hinaus das „Metagespräch" dabei als neuen Teil eingeführt. All dies führte zu einer Professionalisierung und 1994 zur

Gründung der „Gesellschaft für Sokratisches Philosophieren“. Diese hat sich zum Ziel gesetzt, sokratische Gespräche zu veranstalten, Gesprächsleiter auszubilden und die zugrundeliegende Theorie weiterzuentwickeln.[53]

1.3.3 Die Nachfolger von Heckmann

Gisela Raupach-Strey ist eine dieser Gruppe zugehörige und unter Heckmann ausgebildete Person, die die den sokratischen Gesprächen zugrundeliegende Theorie geprüft, analysiert und weiterentwickelt hat. Ihr Buch Raupach-Strey 2012 ist das umfassendste Werk, das diese Tradition aus philosophischer und didaktischer Sicht untersucht hat. Grundlage dieses Werkes ist 1) die theoretische Betrachtung von Nelsons und Heckmanns Schriften und 2) die praktischen Erfahrungen, die sie sowohl als Teilnehmerin als auch als Gesprächsleiterin bei den sokratischen Gesprächen gesammelt hat.[54] Was in ihrem Buch deutlich erkennbar ist, ist, dass sie stets die beiden genannten Aspekte im Blick behält und dass sie diese bei der Untersuchung der verschiedenen Elemente des sokratischen Gesprächs durchgehend mitberücksichtigt. Ein weiteres Charakteristikum ihrer Schriften ist der Vergleich, den sie zwischen der Tradition und neueren, zeitgenössischen philosophischen Theorien durchführt, wobei sie gegebenenfalls obige Tradition in die neueren Theorien einbettet. Beides kann man sogar in ihrem Terminus „*sokratisches Paradigma*“ und in der Präzisierung, die sie für diesen Terminus gibt, finden. Der Begriff *Paradigma* wurde von Thomas Kuhn (1922-1996) übernommen und „indiziert ein handlungsleitendes Ensemble von regulativer und konstitutiver Idee, Verfahren, Gegenstands- und Gemeinschaftskonstitution“.[55]

Um die Unstimmigkeit zwischen der Nelson-Heckmannschen Theorie und der von ihr erlebten Gesprächspraxis auszuräumen, hat sie aus diesen beiden Ansätzen eine gemeinsame Leitvorstellung erarbeitet, eine „*regulative Idee*“, die sie in Form einiger charakteristischen Elemente dargestellt hat. Später verwendete sie dafür den Begriff „*sokratisches Paradigma*“. Begründung für diese Umbenennung ist, dass die Elemente der „*regulativen Idee*“ eher theoretischer Natur sind, darüber hinaus setzt die Diskurstheorie voraus, dass sich die sokratische Methode mit letzterer nur dann verknüpfen lässt, wenn die o.g. Methode in der Theorie als Konstrukt dargestellt werden kann, da Theorie und Praxis nicht unmittelbar zusammenhängen.[56]

Die o.g. charakteristischen Elemente tragen dazu bei, das sokratische Paradigma möglichst eindeutig zu erläutern und von anderen Paradigmen mit Hilfe von

53. Vgl. Heckmann 1993 S. 7ff u. Raupach-Strey 2012 S. 21ff.
54. Vgl. Heckmann 1993 S. 39ff.
55. Raupach-Strey 2012 S. 40f.
56. Vgl. Raupach-Strey 2012 S. 41.

bestimmten Kriterien zu unterscheiden. Diese sind nach sokratischer Methode erarbeitet. Obwohl sie im Wesentlichen aus Nelsons pädagogischen und philosophischen Schriften sowie aus von Platon dokumentierten sokratischen Gesprächen abgeleitet sind, erkennt man ebenso klar Einflüsse von Heckmann und Diskurstheoretikern.

Folgende Elemente, zu denen eine kurze Erklärung angeführt werden soll, sind laut Raupach-Strey konstitutiv[57]:

1) *Der Marktplatz als Ort des Philosophierens*: Gemäß Raupach-Strey enthält die Idee des sokratischen Philosophierens auf dem Marktplatz die konstitutiven Elemente des sokratischen Paradigmas, nämlich:

- dass Philosophieren nicht nur Gebildeten, sozial Hochstehenden, bestimmten Ethnien und Geschlechtern offensteht und jedermann die Fähigkeit hat, mithilfe seiner Vernunft zur Erkenntnis der Wahrheit zu gelangen (das Postulat der Universalität der Subjekte),
- das Postulat der Universalität des Objektbereichs,
- dass die Gültigkeit der Erkenntnisse nur durch das Kriterium der Überprüfung durch die Öffentlichkeit festgestellt wird,
- dass der Ausgangspunkt der jeweiligen Diskussion ein Thema aus dem alltäglichen Leben und damit zusammenhängen Erfahrungen der Gesprächsteilnehmer ist,
- dass ein sokratischer Dialog nicht unter Handlungsdruck ist und „im klassischen Sinn zwecklos ist“.[58]

2) *Die Verankerung in der Erfahrung*: Der Ausgangspunkt jedes sokratischen Gesprächs liegt in alltäglichen Erfahrungen. In dem Gespräch wird der Zusammenhang zwischen dem Konkreten und den allgemeinen Sätzen nie zerrissen. Ebenso werden Spekulation, Verselbständigung sowie Hypostasierung der philosophischen Gedanken vermieden.

3) *Der Antidogmatismus*: In der Erklärung dieses Elements weist Raupach-Strey darauf hin, dass Sokrates weder ein Buch geschrieben hat, noch war er ein Lehrer im allgemeinen Verständnis. Er wollte niemals „seinen Schülern »etwas« im Sinne inhaltlich bestimmter Wahrheiten beibringen“.[59] Für ihn war kein Satz ohne

57. Eine ausführliche Darstellung dieser Elemente findet man in Raupach-Strey 2002 und Raupach-Strey 2012.
58. Raupach-Strey 2002, S. 109.
59. Ebd. S. 112.

Rechtfertigung gültig. Was ein sokratisches Gespräch auszeichnet , ist nicht „das Was, sondern das Wie“, nämlich „der Weg“.[60]

Auch NELSON hält laut RAUPACH-STREY „die »Ausschaltung des Dogmatismus« und den »Verzicht auf jedes belehrende Urteil überhaupt« (Nelson 2002, S. 291)“[61] während des sokratischen Gesprächs für notwendig, und dadurch sei er dem sokratischen Weg gefolgt.

4) *Das Selbstvertrauen der Vernunft*: Dass der Weg zur „Erkenntniseinsicht“ durch „Selbstdenken“ verfolgt wird, ist ein Prinzip, an das laut RAUPACH-STREY, SOKRATES sowie NELSON glaubten, wobei sie darauf ihre jeweiligen Gesprächspartner aufmerksam machten. RAUPACH-STREY erläutert dazu:

> „Die Vernunft muß sich selbst im Einzelsubjekt, aber auch im wechselseitigen Zutrauen von Vernunft als Klärungs- und Rechtfertigungsinstanz begreifen und anerkennen.“[62]

5) *Die Maieutik*: Mit Hinweis auf die historische Tatsache, dass SOKRATES seine Tätigkeit im Buch *Theätet* mit der seiner Mutter, die den Beruf der Hebamme ausübte, verglich, sagt Ruapach-Strey, dass SOKRATES im Gegensatz zu seiner Mutter in seinen Gesprächen die „geistigen Kinder“ prüfte und bei deren Geburt seine Gesprächspartner unterstützte. Er begleitete sie bei der Entwicklung ihrer Gedanken.[63] Dem Leiter, aber auch den Gesprächsteilnehmern des sokratischen Gesprächs weist RAUPACH-STREY im Allgemeinen diese jeweiligen Rollen zu. Sie unterscheidet in der *Maieutik* zwei Stufen: erstens Hilfe beim Ausdrücken der „sich »anmeldenden« Aussagen“[64], zweitens die gedankliche und sprachliche Überprüfung der Aussagen, indem ihre Voraussetzungen hinterfragt, kritisch überprüft und begründet werden.[65]

6) *Das Begründungskonzept*: Hier stellt RAUPACH-STREY die *regressive Methode der Abstraktion* vor, die sie den Kernvorgang der sokratischen Methode nennt. Der Vorgang wird so verstanden, dass er mit Erfahrungsurteilen anfängt und sie Schritt für Schritt rückwärts von ihren „empirischen Zufälligkeiten“ befreit, bis er zu den allgemeinen, philosophischen, abstrakten Sätzen kommt, die die Prinzipien der anfänglichen Urteile bilden.[66] Dieses Element wird später in 2.1.3 ausführlich behandelt.

60. Ebd. S. 113.
61. Ebd.
62. Ebd. S. 115.
63. Vgl. ebd., S. 118.
64. Raupach-Strey 2002, S. 119.
65. Vgl. ebd. S. 119.
66. Vgl. ebd. S. 121ff.

7) *Das Gesprächsziel als Wahrheitskonsens*: Zur Erklärung dieses Elementes weist Raupach-Strey darauf hin, dass das sokratische Gespräch zur Wahrheitserkenntnis strebt. Ihrer Erachtens ist die Wahrheit „kein Besitz und kein Element in einem schon fixierten System". Diese Wahrheit kann nicht monologisch erlangt werden, „sondern an den Prozeß des Gesprächs". Somit ist das Ziel in dem sokratischen Paradigma das Erwerben der Wahrheit, deren Kriterium Konsens der Gesprächsteilnehmern ist.[67]

8) *Die Gesprächsgemeinschaft*: Nur „die Kommunikations-Gemeinschaft [...], die sich ernsthaft argumentativ um Wahrheit [bemüht]"[68], bildet das Erkenntnissubjekt in einem sokratischen Gespräch. In der Erklärung dieses Elementes bezieht sie sich stark auf Diskurstheoretiker und führt aus, dass „das einzelne, isolierte und sprachlose – oder nur in einsamem Monolog mit sich selber sprechende – Subjekt"[69] keine Stellung in dem Paradigma des sokratischen Gesprächs hat, sondern dass Erkenntnis nur gemeinsam und „durch die kontrafaktische Unterstellung der idealen Sprechsituation (Habermas 1971, S. 137), der freilich die faktische, verzerrende Realitätsbedingungen unterliegende Sprechsituation immer erst anzunähern ist",[70] stattfindet. Raupach-Strey folgert daraus, dass somit ein Erkenntnissubjekt unter Einbeziehung von Kuhlmann 1987 mit folgenden Eigenschaften aufgefasst wird: autonom, frei, wahrheitsfähig, sozial, geschichtlich, bedingt und endlich. [71]

Sie weist darauf hin, dass Nelson in seiner Konzipierung der Methode dieses Element nicht im Blick hatte und Heckmann dieses nicht begrifflich, sondern nur implizit durch Annahme des siebten Elements berücksichtigte.

9) *Das Menschenbild*: „Innere Vorgänge und das Binnenverhältnis des Subjekts zu seinen Äußerungen" sind laut Raupach-Strey eine wichtige Grundlage für das sokratische Paradigma. Sie nennt Zweifel als ein Beispiel für innere Vorgänge und Wahrhaftigkeit, innere Zustimmung sowie Freude an der Erkenntnis als Beispiele für das innere Verhältnis des Subjekts zu seinen Äußerungen. Darum geht ein sokratisches Gespräch „in mehrfacher Hinsicht über einen Diskurs hinaus"[72] und in diesem „wird der Mensch als ein geschichtlich gewordenes Subjekt mit einem letztlich unverfügbaren und zu achtenden Persönlichkeitskern betrachtet".[73]

Dass man als Gesprächsziel einen *Konsens* anstrebt, ist eine der von Heckmann vorgenommenen Änderungen sowohl in der Theorie als auch in der Praxis der

67. Vgl. ebd. S. 124ff.
68. Ebd. S. 129.
69. Ebd.
70. Ebd.
71. Vgl. ebd. S. 129.
72. Ebd. S. 131.
73. Ebd.

sokratischen Methode. An keiner Stelle hat Nelson das Erreichen eines *Konsenses* als Voraussetzung oder Ziel der sokratischen Methode herausgestellt.

Die sokratische Methode dieser Tradition ist auch von anderen Nachfolgern Heckmanns wie Dieter Krohn, Horst Gronke, Barabara Neisser et al. erforscht und im philosophischen Kontext reflektiert worden.[74] Eine philosophische Untersuchung der Methode im Kontext der Mathematik ist jedoch noch nicht durchgeführt worden. Kapitel 1 sollte einen Überblick über den historischen Hintergrund der Konzeption der sokratischen Methode für den Mathematikunterricht sowie über Nelson-Heckmanns Tradition geben. Das nächste Kapitel widmet sich einer ausführlichen philosophischen Studie von Nelsons Sokratische Methode im Kontext der Mathematik.

74. S. z.B. Krohn 1994–2002.

Leonard Nelson mit Minna Specht, ca. 1920. Foto: AdsD / Friedrich-Ebert-Stiftung, 6/FOTA007784.

Abbildung 1.1: Entnommen von: http://www.stadtarchiv.goettingen.de/widerstand/frames/fr_isk.html

2 Mathematik und die Sokratische Methode Leonard Nelsons

Leonard Nelson hat in seinem Vortrag „*die Sokratische Methode*“ am 11. September 1922 in Göttingen nicht nur eine pädagogische Methode, sondern auch ein philosophisch-gedankliches System vorgestellt, das die sogenannte *Sokratische Methode* als einen Hauptteil umfasst. Weil diese Methode epistemologische Grundlagen besitzt und erst durch den Zusammenhang mit anderen Teilen des philosophischen Systems von Nelson bestimmt wird, skizzierte Nelson sein gesamtes philosophisch-gedankliches System, das sich in wichtigen Aspekten auf Platon, Immanuel Kant (1724-1804) und Jakob Friedrich Fries (1773-1843) bezieht. Nelson hat deren Ansichten koordiniert miteinander dargelegt, auf wenige s.E. verfehlte Ausnahmen hingewiesen und eigene Überlegungen hinzugefügt.

In Nelsons System haben die Mathematik, die Erklärung ihrer Grundlagen sowie die Art und Weise dieser Erklärung eine wichtige Stellung. Für Mathematiker mag relevant sein, dass das gedankliche System nicht mit einem axiomatisch-logischen System gleichgesetzt werden darf, obwohl Axiomen-Systeme eine Rolle in dem Gesamtsystem spielen, allerdings nur als ein Teil. Zur Erklärung sei darauf hingewiesen, dass ein axiomatisches System, das nicht hypothetisch ist, sondern als ein gedankliches zur Erklärung wichtiger Grundfragen präsentiert wird, auf Axiomen beruht, die legitimierbare Klarheit und Rigorosität besitzen müssen. Eine ausführliche Untersuchung der Axiome hat hier also eine zentrale Bedeutung. Worauf Nelson an verschiedenen Stellen seines Vortrages jedoch hingewiesen hat, ist, dass philosophische Grundsätze die dunkelsten und unklarsten Teile eines philosophischen Systems sind.

Wenn man also systemimmanent urteilen möchte, hat weder Nelson noch einer der oben genannten Philosophen weder dieses *philosophische System* noch irgendein anderes *begründet.*[1] Was sie geleistet haben, ist lediglich eine Betrachtung und Beschreibung eines philosophischen Systems. In 2.4 werde ich diesen Punkt ausführlicher erklären.

1. Vgl. Nelson 1970b, S. 37.

In den Grundlagen von Nelsons System existieren starke Voraussetzungen, z.B. die Annahme der Existenz von einer *Wahrheit*, die Nelson meistens „*Vernunftwahrheit*“ nennt und damit auf die „*unmittelbare Erkenntnis*“ verweist.[2] Er hat dieses Konzept von Fries übernommen und behauptet, dass es mindestens implizit bei Kant und Platon gefunden werden kann.[3] Ein weiteres Beispiel ist „die Notwendigkeit der *transzendentalen Apperzeption*“ für die Möglichkeit der Erkenntnisgewinnung, die eine Übernahme von Kant ist.[4] Beide Voraussetzungen werden im Folgenden genauer betrachtet.

Allerdings führen diese Voraussetzungen dazu, dass das System nicht starr ist, und daher verlangt es stets neue Erklärungen und Rechtfertigungen. Trotz seiner durchdachten Konstruktion und Ausgewogenheit beinhaltet es auch dunkle Punkte. Dieser Aspekt des Systems, auf den Nelson in seinem Vortrag mehrfach hingewiesen hat, sollte nicht als ein Schwachpunkt, sondern als Anlass zur beharrlichen und tiefergehenden Untersuchung in dem System selbst und als dessen Teil verstanden werden. An dieser Stelle wird die grundlegende Rolle der *Sokratischen Methode* überdeutlich. Diese ist unter diesen Bedingungen eine prädestinierte Methode, die, harmonisch verbunden mit anderen Teilen des Gedankensystems, dazu dient, Erkenntnisse zu gewinnen. In der Tat liefert Nelsons Gedankensystem Beschreibungen und Erklärungen von Erkenntnis und davon, wie man sie erlangt. Der Sokratische Dialog ist nichts anderes als ein Akt, Erkenntnis zu erlangen, basierend auf diesen Beschreibungen und Erklärungen.[5]

Auch die Mathematik als eine bestimmte Art der Erkenntnis wurde in Nelsons System betrachtet. Einerseits hatte Nelson eine Platonisch-Kantische Sicht auf die Mathematik, und andererseits bewunderte er Hilberts Errungenschaften in diesem Fach, besonders die Grundlagen der Geometrie betreffend. Hilberts Leistungen in der Philosophie der Mathematik waren nach Nelsons Einschätzung jedoch eher zu ignorieren.[6] Nelson selbst war allerdings bestrebt, die philosophischen Grundlagen der Mathematik ausführlich darzulegen.[7] Das Fach selbst und seine philosophischen Grundlagen waren konstituierende Themen seines Gedankensystems.

Ethik und die Untersuchung ihrer Prinzipien war ein weiteres wichtiges Thema in seinem System. Obwohl ich hier zur Vorstellung seiner Ideen zur Erkenntnistheorie an manchen Stellen auf die *Kritik der praktischen Vernunft* (Nelson 1917) zurückgreife, werde ich das Thema Ethik aus Nelsons Sicht nicht berücksichtigen.

2. Vgl. Nelson 1970b, S. 23f.
3. Vgl. Nelson 1970b, S. 33 u. S. 51.
4. Vgl. Nelson 1970b, S. 39f.
5. Vgl. Nelson 2002, S. 42f.
6. Vgl. Peckhaus 1990 , S. 166.
7. Vgl. **Ne59** oder Peckhaus 1990, 154-167.

In diesem Kapitel ist das Hauptziel, Nelsons „Sokratische Methode“, und insbesondere die Rolle der Mathematik, vorzustellen und dafür den Teil seines Gedankensystems, der dafür relevant und damit näher verbunden ist, zu erklären. In einigen Passagen, besonders in der Erklärung der Basis des Gedankensystems Nelsons, in denen er verkürzt auf Kant und Platon Bezug nimmt, werde ich das Thema mit den Schriften der oben genannten Philosophen vergleichen, um diese Lücken auszufüllen. Da Nelson in der Erklärung seines Gedankensystems Begriffe aus dem Begriffssystem von Kant und Fries verwendet hat[8], ist es notwendig, meinerseits diese zu erläutern. Dafür werde ich mich in 2.1.1 auf Manuskripte von Nelsons Veranstaltungen fokussieren, in denen er Themen der Naturphilosophie betrachtet hat. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass so Nelsons Verständnis von Kant und Fries sowie die Prinzipien und Grundbegriffe seines Gedankensystems, die er von den drei oben genannten Philosophen übernommen hat, dargestellt werden können, da er in diesen Veranstaltungen die Grundfragen der Erkenntnistheorie untersucht hat. Daher bildet dieser Teil der Arbeit eine Basis für die darauffolgenden Teile.

In den sich anschließenden Teilen 2.1.2 bis 2.2 werde ich zunächst zwei bestimmte Aspekte der Sokratischen Methode detailliert untersuchen, nämlich die erkenntnistheoretischen Prinzipien der Sokratischen Methode sowie die Sokratische Methode als eine wissenschaftliche Methode. Dann folgt in 2.3 die Untersuchung der Philosophie der Mathematik Nelsons.

2.1 Einführung in die epistemologischen Grundlagen der Philosophie Nelsons

In unserer Untersuchung der philosophischen Grundlagen der Sokratischen Methode nach Nelson müssen wir seiner Epistemologie eine herausragende Stellung einräumen. Unsere Erklärung dessen, was während der Durchführung der Sokratischen Methode im Kontext des Lernens geschieht, ist abhängig von dem, was wir unter Erkenntnis verstehen. Tatsächlich bestimmen sowohl die Eigenschaften, die wir der Erkenntnis zuschreiben, als auch die Art des Erkenntnisgewinns, was Lehren und Lernen ist, und was wir als Lehrer tun können oder müssen. Erst wenn wir Genese und Geltung der Erkenntnis betrachten, und jede der beiden möglichst klar machen können, können wir untersuchen, welche Rolle ein Lehrer im Prozess des Erlangens bzw. Erweckens von Erkenntnis (Genese) sowie bei ihrer Reflexion und Wahrheitsüberprüfung (Geltung) einnimmt. Mit anderen Worten: Wir müssen die Frage beantworten, welche Einflüsse ein Lehrer oder, allgemeiner

8. Vgl. Nelson 1970b, S. 11 u. 38ff.

gesagt, die äußeren Gegebenheiten[9], auf den Prozess des Lernens haben können. Zuerst müssen also die beiden Aspekte des Erlangens von Erkenntnis untersucht werden, nämlich das Erkenntnisvermögen des Lernenden und – als Ergebnis der Anwendung desselben – Erkenntnis. Diese beiden Faktoren – Erkenntnisvermögen und Erkenntnis – stehen genuin in einem engen Zusammenhang. Die Erklärung des einen sowie seiner möglichen Typen trägt dazu bei, das andere und dessen mögliche Typen klar zu machen. Nachdem wir die Grundinformationen über diese beiden Faktoren dargestellt haben, können wir den Aspekt des Einflusses anderer Faktoren, wie z.B. den des Lehrers oder pädagogischer Arbeitsmittel auf den Erkenntnisprozess unter Berücksichtigung von Erkenntnis und Erkenntnisvermögen betrachten. Die Frage, welchen Einfluss ein Lehrender letztendlich auf den Lernprozess haben kann, ist stark von der Erklärung der oben genannten Termini abhängig. Auf dieser Basis kann der Lehrende festlegen, welche Fragestellungen auf ihn bezogen überhaupt sinnvoll sind. Beispielsweise sind die Fragen «Wie soll Lernen im Unterricht stattfinden?» und «Wie soll sich Lehren im Unterricht vollziehen?» zwei harmlos scheinende Problemstellungen mit Bezug auf zwei Aspekte des Unterrichtsgeschehens. Wir werden aber sehen, dass die erste Frage, zumindest basierend auf den hier darzustellenden Philosophien, sinnlos ist. Sie ist eine normative Frage und beinhaltet die Annahme, dass – mit NELSON gesprochen – der «innere» Prozess des Lernens und damit der der Erlangung von Erkenntnis in seiner Qualität durch äußere Faktoren überhaupt beeinflussbar ist. Um die Behauptung über die Sinnlosigkeit der ersten Frage besser erklären zu können, greife ich ein Gleichnis auf, das eine äußerst vereinfachte Beschreibung einer Wissensvermittlung – oder genauer gesagt, eines Informationstransfers – ist. Nehmen wir an, dass ich auf einem Rechner mit einer bestimmten Speicher-Kapazität Daten speichern und bearbeiten will. Die bedeutenden Faktoren bei einer Lehr-Lern-Situation – wie z.B. die Gedanklichen, Psychischen, Kulturellen, Kommunikativen usw. – tauchen hier nicht auf. Ich möchte einfach eine Menge von Daten so schnell wie möglich auf dem Rechner speichern. Daten können nur durch bestimmte Kanäle – wie z.B. Tastatur, Maus, Kamera, USB-Anschluss usw. – dem Rechner eingegeben werden. Die Ausgabe-Kanäle des Rechners sind Bildschirm, Drucker usw. Als normale Benutzer kenne ich mich mit der Technik und den Materialien nicht aus, die im Bau des Rechners verwendet sind. Angenommen, ich will hundert 100×100 Matrizen in den Rechner eingeben, um die Eigenwerte ihrer paarweisen Matrixprodukte zu berechnen. Nur die Eingabe der Matrizen mit der Tastatur kann Monate dauern. Ich muss also einen schnelleren Weg finden. Für mich wäre schneller und einfacher, wenn ich beispielsweise die Matrizen auf Papier aufliste. Ich würde auf das erste Blatt zunächst schreiben: «Matrix 1, Reihenweise». Dann werde ich die Kompo-

9. Damit sind die Faktoren gemeint, die außerhalb des Lernenden existieren, anders gesagt, alle Faktoren abgesehen von dessen individuellen Erkenntnisvermögen, z.B. Vernunft und Verstand.

nenten nebeneinander schreiben und zwischen jedzwei Komponenten ein Komma setzen, um sie voneinander zu trennen. Nach der 10^4ten Komponente werde ich einen Punkt schreiben. So werde ich alle Matrizen auf Papier auflisten. Ich werde danach die Formeln der Matrixprodukt- und Eigenwertrechnung auf das letzte Papier schreiben und alle Papiere mit einer Digitalkamera fotografieren. Das alles dauert auch lange, aber nicht so lange wie der Fall, in dem ich mit einer Tastatur arbeite. Ich übertrage die Foto-Daten durch USB-Anschluss auf den Rechner. Die Dateien werde ich auf dem Rechner auswählen und auf «Enter» klicken. Ich erwarte, dass der Rechner mir die Eigenwerte gibt! Das Ergebnis ist klar: Ich erhalte keine Eigenwerte. Solange die Dateien und die Befehle, die ich in den Rechner eingebe, für ihn als 0 und 1 nicht verarbeitbar sind, kann ich kein Ergebnis von ihm erwarten. D.h. ich brauche einerseits geeignete Software, Betrieb-Systeme, Maschinensprachen usw. sowie eine Software-gerechte Eingabe der Daten, um ein Ergebnis erhalten zu können. Andererseits, wenn ich ein Muster in den Matrizen finden kann, das übersetzbar zu einem Algorithmus ist, kann ich statt mehrere Matrizen den Algorithmus eingeben, der die Matrizen produzieren kann. Eine bessere Erkenntnis über die Daten, die ich vermitteln will, sowie die Möglichkeit ihrer Kategorisierung werden die Eingabe beschleunigen. Angenommen, dass ich die Matrizen und die erforderlichen Formeln in den Rechner *Rechner-gerecht* eingegeben habe und nun die Eigenwerte berechnen lassen möchte. Wegen des großen Datenvolumens wird es sehr lange dauern, bis der Rechner die Berechnung durchführen kann. Weil er Elektrizität mit der Netzspannung 220 (V) verbraucht um zu berechnen, werde ich mir eine andere Stromquelle mit Wechselstrom und 440 (V) besorgen. Mit dieser Quelle sollte der Computer doppelt so schnell rechnen können wie bisher, denke ich. Es ist klar, dass es ein naiver Gedanke von mir ist und dass es mein Unwissen über den Rechner zeigt. So kann ich nur meinen Rechner beschädigen. Hätte ich mich stattdessen nach den möglichen Algorithmen erkundigt, die auf meine Daten im Computer anwendbar sind, hätte ich den Algorithmus finden können, mit dem der Computer am schnellsten rechnen kann. Um den schnellsten Weg der Eingabe und Verarbeitung zu finden, scheint also eine tiefere Kenntnis über den Computer und die zu verarbeitenden Daten notwendig zu sein. Der Grund dafür ist, dass ich als Benutzer keinen Einfluss auf die Technik und die Materialien habe, die im Rechner verwendet werden. Ich kann sie nicht ändern, um die Eingabe und Verarbeitung von Daten zu beschleunigen. Das bedeutet, dass ich bei der Arbeit mit einem Rechner, keine normativen Fragen – z.B. «Wie soll die Dateneingabe und -verarbeitung funktionieren?» – stellen kann, sondern eher deskriptive Fragen – z.B. «Wie funktioniert die Dateneingabe und -verarbeitung?».

Die folgende philosophische Betrachtung der Lehr-Lernsituation zeigt, dass auch in ihr ein ähnliches Verhältnis besteht. Die lehrende Person hat keinen Einfluss auf den inneren Prozess des Lernens. Mit anderen Worten: Lernen ist nicht lehr- oder lernbar. Ansonsten führte dies zu einer analogen Situation, die im *Münchhausen-Trilemma* beschrieben wird: Wenn äußere Faktoren den Lernprozess beeinflussten, könnte bzw. müsste der Lernende zunächst lernen, wie er lernen müsste, und diesen Sachverhalt müsste er ebenfalls lernen etc. Einerseits besagt diese Untersuchung, dass man zum Thema Lernen im Unterricht nur deskriptive Fragen stellen kann, nicht jedoch normative. Darüber hinaus ist erwähnenswert, dass uns diese Denkfigur an *Menons Paradoxon* erinnert. In diesem Paradoxon wird das folgende Problem aufgeworfen: Angenommen, dass wir als Folge einer Untersuchung zu einem Ergebnis kommen. Wir können dann aber nicht sicher sein, dass das, was wir gefunden haben, das ist, was wir gesucht haben. Haben wir ein Kriterium dafür, was das Richtige sein muss, d.h. wenn wir es kennen, hätten wir nicht danach suchen müssen. Diese Problemstellung weist auf beide Aspekte hin, die wir oben angesprochen haben. Sie umfasst das Problem der Erkenntnis dessen, was wir glauben zu besitzen, der Erkenntnis, die wir nicht besitzen, aber nach der wir mit Hilfe derer, die wir besitzen, suchen, und schließlich die Qualität der Beziehung zwischen beiden. So wird die Art und Weise des Zustandekommens von Erkenntnis, ihre Genese, sowie auch derer Geltung hinterfragt.

Obwohl die Antwort auf diese Frage unsere Situation in Bezug auf das *Wesen* und die *Eigenschaften* der Erkenntnis klar macht, kann sie selbst aber auch das zu untersuchende Objekt der Frage sein: Welche Stellung hat die Antwort auf die Frage in der Welt der Erkenntnisse? Dieser Sachverhalt zeigt die Ähnlichkeit des *Menon-Paradoxon* mit der Problemstellung, die wir oben zum *Wie* des Lernens im Unterricht geschildert haben. Die *Ananmnesis-Lehre* ist die Antwort, die der PLATONische SOKRATES auf diese Frage gibt. In der PLATONisch-Sokratischen Welt der Erkenntnisse ist diese Theorie eine von den „Göttlichen und Weisen" übernommene. Diese Tatsache ist jedoch nicht sein einziges Kriterium, sondern SOKRATES versucht, diese Theorie in der Praxis zu belegen, oder angelehnt an FRIES und NELSON gesagt, diese *aufzuweisen*. Als Neukantianer bezieht NELSON jedoch die FRIESsche Lehre mit ein und betrachtet die Anamnesis-Lehre als einen Satz, der auf eine „unmittelbare Erkenntnis" hinweist. Seines Erachtens ist ein solcher Satz, wie wir später sehen werden, nicht beweisbar, sondern lediglich durch Aufweisung begründbar. Dies ist allerdings das, was SOKRATES im Gespräch mit MENON und dessen Sklaven macht. Wenn wir also in NELSONs Sprache ausdrücken, was in diesem Gespräch tatsächlich geschieht, können wir sagen, dass SOKRATES hier beabsichtigt, seine Behauptung über das Lernen – nämlich die Anamnesis-Lehre – zu begründen. Laut NELSON ist eine solche Propositio nicht beweisbar, da keine gültigen Urteile existieren, auf die man die Gültigkeit der Anamnesis-Lehre zurückführen kann. NELSON glaubt aber an die Existenz unmittelbarer Erkenntnisse, die nicht die Form eines Urteils haben – Urteile selbst können nur mittelbare Erkenntnisse sein – und erstere sind für jedermann zugänglich. Auch SOKRATES war von dem Gedanken überzeugt, dass MENON lediglich mit Hilfe seines eigenen Erkenntnisvermögens – Verstand und Vernunft – die Wahrheit der Anamnesis-Lehre begreifen kann und nicht mittels Belehrung. SOKRATES hat also das einzig Mögliche dazu beigetragen, um ihre Gültigkeit zu zeigen, d.h. die „Aufweisung" als unmittelbare Erkenntnis durch Darstellung eines Lernprozesses.[10]

Das Thema Genese und Geltung der Erkenntnis wurde von NELSON in seinem Vortrag „Die Sokratische Methode" und auch in vielen seiner Schriften bearbeitet. Es wurde auch als philosophische Grundlage für die Konzipierung der didaktischen Sokratischen Methode von ihm verwendet. An vielen Stellen seines Vortrages hat er explizit ausgeführt, dass er diese Grundlage von SOKRATES, KANT und FRIES übernommen hat. Diese philosophische Linie jedoch ist in Bezug auf Details über Erkenntnis und die Art und Weise, wie man sie erlangt, nicht kohärent. Im folgenden Abschnitt werde ich auf solche Stellen hinweisen, wo dieses Problem – sei es auch nur implizit – auftritt. Das Ziel des Abschnittes ist es nicht, eine ausführliche Untersuchung des epistemologischen Aspektes der oben genannten Linie zzgl. NELSON vorzulegen, sondern primär NELSONs Sicht dessen, was Erkenntnis ist, ihre Eigenschaften, die Art ihrer Erlangung und ihre Wahrheitsüberprüfung zu erläutern.

2.1.1 Nelsons Rezeption von Kants Theorie der Erfahrung

KANTs Epistemologie bildet eine Basis für NELSONs Philosophie der Mathematik und seine Sokratische Methode. Insbesondere KANTs *Kategorien* und *die transzendentale Apperzeption* spielen eine fundamentale Rolle in NELSONs Philosophie. Deswegen fasse ich hier den Inhalt der Veranstaltungen über die Naturphilosophie, die NELSON in Göttingen durchgeführt hat, zusammen. Diese Manuskripte wurden von seinen Schülern, nämlich HAMBURGER im Winter 1908/09, PAUL BERNAYS[11] im Winter 1910/11 und RADEMACHER[12] im Winter 1912/13, ausgearbeitet. Hier wird einerseits auf die zwei zentralen Prinzipien der Epistemologie NELSONs, nämlich *den Grundsatz des Selbstvertrauens der Vernunft* und *die transzendentale*

10. Es ist bemerkenswert, dass SOKRATES nach seiner Argumentation darauf hinweist, dass er über seine Rede nicht ganz sicher wäre. (Vgl. *Menon* 86b.) Auf diese Weise vermeidet er Dogmatismus und schließt die Möglichkeit einer weiteren Diskussion nicht aus. Dies wird in 2.1.4 diskutiert.

11. PAUL BERNAYS (1888-1977) war ein Mathematiker und Logiker.

12. Vgl. Schroth 2004. Hier sind die Vornamen von HAMBURGER und RADEMACHER nicht erwähnt worden. Wahrscheinlich ist mit RADEMACHER der Mathematiker HANS RADEMACHER (1892-1969) gemeint.

Apperzeption, verwiesen, andererseits die KANTische Tafel der Kategorien und der Schemata dargestellt, die den Grund für die Methodologie NELSONs bilden.

Darüber hinaus hat NELSON die Mathematikphilosophie untersucht, indem er die Arbeiten, die zur Grundlegung der Mathematik in Göttingen – dem damaligen Zentrum für diese Fachrichtung – verfasst worden sind, präsentiert hat und zwar mit dem Ziel, diese mit Hilfe der oben genannten Grundbegriffe und Grundsätze zu erklären. Diese Manuskripte sind die einzigen Quellen von NELSON, die sowohl die philosophischen Grundbegriffe und Grundsätze KANTs als auch die Grundlagen der Mathematik, nebeneinander stellen und miteinander verknüpfen. Das ist der Grund dafür, dass wir in diesem Teil auf die oben genannten Manuskripte zurückgreifen.

In seiner Erklärung der Theorie der Erfahrung KANTs hat NELSON immer mit disjunktiven Einteilungen begonnen, die KANT vorgenommen hat. Sie spielen seines Erachtens eine fundamentale Rolle in der KANTischen Philosophie. KANT hat sie laut NELSON „an die Spitze seiner Theorien“ gestellt. Erkenntnisse sind danach *begrifflich* (diskursiv) oder *anschaulich* (intuitiv). Andererseits werden sie aber auch in *a priori* und *a posteriori* unterteilt, wobei *a priori* „unabhängig von Erfahrung“ bedeutet. Mögliche Erkenntnisse sind also begriffliche *a priori*, anschauliche *a posteriori* und anschauliche *a priori*. Da diskursive Erkenntnisse nur mittels Begriffen entstehen, und unabhängig von Erfahrung sind, ist eine diskursive Erkenntnis *a posteriori* unmöglich (vgl. *KrV* B 93 u. B 745). Die Erkenntnisse, die anschaulich *a priori* sind, sind mathematische Erkenntnisse. KANT unterscheidet zudem zwei Aspekte der Erkenntnis: *Materie* und *Form* der Erkenntnis. *Erkenntnismaterie* ist das, was wir erkennen, und sie ist in der *Form* der Erkenntnis erkennbar. Die Materie ist immer *a posteriori* gegeben, die Form aber existiert *a priori*.[13]

NELSON erklärt darüber hinaus, dass sich laut KANT Erkenntnisse auch in *analytische* und *synthetische* aufteilen lassen. Um diese beiden Typen der Erkenntnis im KANTisch-NELSONschen Sinne zu erklären, werden wir etwas großzügig statt dem Terminus *Erkenntnis* den des *Urteil*s verwenden. Wie in 2.1.3 gezeigt wird, spielt der Unterschied zwischen Erkenntnis und Urteil in NELSONs Philosophie eine fundamentale Rolle. Die Anwendung des Begriffs *Urteil* bereitet uns hier jedoch kein Problem, da mit der Charakterisierung des Typs des Urteils der Typ der Erkenntnis, die im Zusammenhang mit dem Urteil steht, auch identifiziert wird.

Wenn das Prädikat (P) eines Urteils der Form „(S) ist (P)“ in seinem Subjekt (S) enthalten ist, ist das Urteil *analytisch*, wenn das Prädikat nicht in dieser Weise im Zusammenhang mit dem Subjekt steht, ist das Urteil *synthetisch*. Die analytischen

13. Vgl. Nelson 2004b, S. 21.

Urteile sind nur *a priori* und begrifflich, während synthetische Urteile sowohl *a priori* als auch *a posteriori* und anschaulich sowie begrifflich sein können.

Nelson betrachtet die Untersuchung, die Kant zur „Frage nach dem Ursprung unseres Bewusstseins" von „alle[r] synthetische[n] Erkenntnis a priori, die Voraussetzung aller Erfahrung ist"[14], geleistet hat und nutzt dieses auch in seiner Erkenntnistheorie und Mathematikphilosophie. Die Methode, die Kant in dieser Untersuchung anwendet, nennt Nelson wie Kant und Fries „*Deduktion*". Zur Erklärung der Philosophie Kants, beschreibt Nelson, wie Kant den Prozess der „*Deduktion*" als eine philosophisch wissenschaftliche Methode ausgeführt hat. *Deduktion* wurde von Kant und dem Neukantianismus als eine Methode zur Begründung der Prinzipien verstanden. Nelson selbst beschreibt *Deduktion* als eine Art der Begründung, die eine „Zurückführung auf eine Erkenntnis, die weder Urteil noch Anschauung ist, d.h. auf eine unmittelbare, aber ursprünglich dunkle Erkenntnis".[15] Diese Beschreibung der „*Deduktion*" beinhaltet aber die Voraussetzung, dass solche „*unmittelbaren Erkenntnisse*" überhaupt existieren. Da diese Methode von Kant angewandt wurde, musste auch er diese Voraussetzung zumindest implizit gemacht haben. Dazu sagt Nelson:

> „König interpretiert in Kant die Existenz eines transzendentalen Verstandes, dessen Erkenntnis im Gegensatz zum diskursiven Urteil sowohl als zur Wahrnehmung steht. Es ist dies eine vorbewusste unmittelbare Erkenntnis, die uns aber nur mittelbar durch Reflexion zum Bewusstsein kommt. Fries hat als erster ihre Existenz erkannt und nennt sie formale Apperzeption. Für Kant war dieser Gedanke noch zu ungeheuerlich – da er die Disjunktion einer anscheinend diskursiven Erkenntnis durchbricht –, als dass er auf ihn verfallen wäre. Nichtsdestoweniger muss man zugeben, dass die negative Seite des Gedankens bei Kant schon latent enthalten ist."[16]

Dieses Thema spielt in der Friesschen – folglich auch in der Nelsonschen – Erkenntnistheorie eine grundsätzliche Rolle. In 2.1.3 wird es ausführlich betrachtet.

Laut Nelson beabsichtigte Kant mit Hilfe der transzendentalen *Deduktion* sowohl die Frage „nach der Quelle, nach der subjektiven Möglichkeit der Erfahrung"[17] als

14. Ebd.
15. Nelson 1917, S. 56.
16. Nelson 2004b, S. 22. Nelson spezifiziert hier nicht auf welchen König er sich bezieht, aber wahrscheinlich meint er den Pädagogen, Edmund Wilhelm Hermann König (1858-1939). Königs Beiträge zu Kants Epistemologie und Philosophie der Mathematik sind u.a. E. König 1907, E. König 1929, E. König 1894 und E. König 1899.
17. Vgl. Nelson 2004b, S. 21.

auch „die Gültigkeit der Erfahrung“ zu untersuchen[18]:

> „Vor seine Deduktion hat Kant die sogenannte metaphysische Erörterung gestellt. In ihr sucht er eine vollständige Tafel der synthetischen Prinzipien a priori – der Grundbegriffe und der Grundsätze – aufzuweisen.“[19]

Unter „synthetischen Prinzipien a priori“, nämlich Prinzipien „der Grundbegriffe und der Grundsätze“ versteht Nelson diejenigen Prinzipien, die Erfahrung überhaupt erst ermöglichen. Er erklärt dieses damit, dass Kant in seinen Untersuchungen die Tatsache betrachtet hat, „dass wir fähig sind, gewisse Wahrnehmungskomplexe, so wie sie schlechthin in den Formen der reinen Anschauung gegeben sind, zu einer einheitlichen Erfahrung zu gestalten.“[20] Unsere Wahrnehmungen eines räumlich lokalisierten, zeitlich dauernden Gegenstandes, der verschiedene Eigenschaften besitzt, gelangt in Form einer einheitlichen Substanz in unsere Vorstellung. Diese Grundbegriffe, die „eine ordnende Funktion innerhalb der Wahrnehmungskomplexe haben, sind [...] die Formen des reinen Denkens, Kategorien genannt.“[21]

Diese Grundbegriffe können wir nicht aus der Anschauung oder dem Verstand entnehmen, aber um diese Kategorien auflisten zu können, habe Kant Urteile untersucht, da er davon ausging, dass wir nur durch das Bilden von Urteilen den Erwerb von Erfahrungen explizieren. Nelson beschreibt sein Konzept des *Urteil*s wie folgt:

> „Das Urteil beruht auf einer an sich willkürlichen Verbindung von Begriffen, von Vorstellungen also, die ihrerseits problematisch sind und nichts behaupten. Ein Urteil ist die Behauptung, daß einer solchen an sich willkürlichen Verbindung von Begriffen etwas Wirkliches entspricht.“[22]

Daran anschließend betrachtet er die Beziehung zwischen Anschauung und Urteil, aufgrund derer sich Anschauung und Urteil wechselseitig verdeutlichen. Nelson beschreibt diese Beziehung wie folgt:

> „Die Materie der Urteile entnehmen wir der Anschauung; folglich ist das, was über die Anschauung hinaus im Urteil noch hinzukommt, was die Anschauungen ordnet, worin sie zu einer Erfahrung vereinigt werden,

18. Vgl. Nelson 2004b, S. 22.
19. Ebd., S. 22.
20. Ebd., S. 21.
21. Ebd., S. 22.
22. Nelson 1917 S. 49.

> seine Form. Es müssen also den verschiedenen Urteilsformen auch die verschiedenen Kategorien entsprechen.“[23]

Nelson sagt also, dass Kant zwei Arten von Erkenntnis nebeneinander setzt:

1. das Urteil, das oben beschrieben wurde, und

2. die Anschauung, die Nelson als „eine unmittelbare Erkenntnis, deren wir uns auch unmittelbar bewußt sind“[24], erklärt. Über das Konzept der Unmittelbarkeit einer Erkenntnis werde ich ausführlich in Teil 2.1.3 sprechen.

Zu Beginns des Teils, in dem Nelson die disjunktiven Einteilungen Kants vorgestellt hat, wurde gesagt, dass er zwei Aspekte der Erkenntnis voraussetzt, nämlich Form und Materie. Wenn man das Urteil als eine Erkenntnis annimmt, kommt die Materie des Urteils aus der Anschauung, aus unmittelbaren Erkenntnissen also. Diese Anschaung wird erst dann zu einer Erfahrung (oder einem Erfahrungsurteil), wenn sie die Form eines Urteils annimmt. Die Formen der Urteile haben wie diejenigen, die zu Anschauung gehören, eine ordnende Funktion. Die Urteilsformen müssen den Kategorien entsprechen und können aus dem Begriff des Urteils hergeleitet werden.[25] Wie oben erwähnt, wurde das Verfahren der „Aufsuchung“ der Urteilsformen durch logische Zergliederung von Kant *metaphysische Erörterung* genannt. In 2.2 wird dieses Verfahren, das von Nelson die *regressive Methode der Abstraktion* genannt wird, näher betrachtet. Nelson fasst die Formen der Urteile mit Kant wie folgt zusammen[26]:

> „1) *Quantität* bezieht sich auf den Gegenstand, der unter einen Begriff subsumiert wird, und zwar unterscheide ich:
>
> einzelnes Urteil – besonderes Urteil – allgemeines Urteil.
>
> 2) *Qualität* bezieht sich auf den Begriff, unter den subsumiert wird:
>
> bejahendes Urteil – verneinendes Urteil – limitierendes Urteil. [...]
>
> 3) *Relation* bestimmt das Verhältnis von Subjekt und Prädikat:
>
> kategorisches Urteil – hypothetisches Urteil – divisives Urteil. [...]
>
> 4) *Modalität*: d.i. Art der Gültigkeit des Urteils, Grund der Erkenntnis:

23. Nelson 2004b, S. 22f.
24. Nelson 1917, S. 54.
25. Vgl. Nelson 2004b, S. 23.
26. Vgl. *KrV*, B 95.

> problematisch, wenn kein Grund angebbar ist,
> assertorisch, wenn der Grund ein empirischer ist,
> apodiktisch, wenn ein rationaler Grund vorhanden ist.“[27]

Hierdurch werden jetzt die Kategorien an die Hand gegeben. Der Grund dafür und die Liste der Kategorien, die von KANTs „*Kritik der reinen Vernunft*“ übernommen sind[28], findet man in dem folgenden Zitat:

> „Die Urteilsformen sind das Instrument, das uns die Kategorien zum Bewusstsein bringt, und wir stellen an Hand dieses ‚transzendentalen Leitfadens‘ eine vollständige Tafel der Kategorien her.
>
> 1) den Formen der Quantität entsprechen die Kategorien:
>
> Einheit - Vielheit - Allheit
>
> 2) der Qualität:
>
> Realität - Negation - Beschränktheit
>
> 3) der Relation:
>
> Substanz - Kausalität - Wechselwirkung
>
> 4) der Modalität:
>
> Möglichkeit - Wirklichkeit - Notwendigkeit.“[29]

Hier stellt sich die Frage: wie ist die Beschaffenheit der Verbindung zwischen den Kategorien und den Wahrnehmungen? Die Frage ist also, wie „zu jeder Wahrnehmung die passende Kategorie“ gefunden werden kann, und daher die Frage, mit welchem Kriterium „das anschaulich Gegebene dem nicht anschaulichen Begriffsapparat“[30] zugeordnet werden kann. Daran anschließend erläutert NELSON die Eigenschaften des Kriteriums, unter anderem, dass es nicht empirisch und nicht metaphysisch sein kann:

27. Nelson 2004b, S. 23. In E. F. APELTs (1812-1859) „*Die Theorie der Induction*“ wurden Urteils- und Schlussarten auch ausführlich bearbeitet. Auf das Buch wurde von NELSON in seinen Veranstaltungen über *Naturphilosophie* mehrere Male verwiesen (vgl. z.B. Nelson 2004b, S. 78). Ich werde in 2.2 mich auf diese Urteilsarten beziehen, um die *induktive* Methode als eine *regressive* Methode vorstellen zu können.
28. Vgl. *KrV*, B 106.
29. Nelson 2004b, S. 23f.
30. Nelson 2004b, S. 24.

> „Das Kriterium, das diese Frage löst, darf kein empirisches sein, weil wir gerade empirische Erkenntnis den Kategorien nicht ohne weiteres unterordnen können. Es dürfen auch keine metaphysischen, d. h. nicht anschauliche Kriterien sein, denn metaphysischen Begriffen soll [sic] doch erst untergeordnet werden.“[31]

Dies ist ein Grund dafür, dass diese Kriterien einerseits anschaulich, andererseits jedoch a priori, d.h. nicht empirisch, sein müssen. Deswegen kommen sie aus der *reinen* Anschauung. Das aber bedeutet, dass sie zeitlicher oder räumlicher Vorstellung entstammen. Nicht alle Wahrnehmungen sind räumlich:

> „Da aber nicht jede Wahrnehmung, z.B. nicht die innere Wahrnehmung räumlich, aber jede Wahrnehmung zeitlich bestimmt ist, werden sich aus unserer Anschauung der zeitlichen Verhältnisse die gesuchten Kriterien, die sogenannten ‚Schemata‘, herleiten.
>
> | | |
> |---|---|
> | Das Schema | der Quantität ist die Zahl |
> | | der Qualität der Grad, die Intensität |
> | | der Relation das zeitliche Verhältnis |
> | | und zwar |
> | entspricht | der Substanz – die zeitliche Dauer |
> | | der Kausalität – die zeitliche Folge |
> | | der Wechselwirkung – die Gleichzeitigkeit. |
>
> Das Schema der Modalität ist die zeitliche Bestimmtheit
>
> und zwar ist zugeordnet
>
> | | |
> |---|---|
> | | der Möglichkeit – die zeitliche Unbestimmtheit |
> | | der Wirklichkeit – die Bestimmtheit in der Zeit |
> | | der Notwendigkeit – die Bestimmtheit zu jeder Zeit.“[32] |

Die Tafel der KANTischen metaphysischen Grundsätze kann nach NELSON jetzt durch die Verknüpfung zwischen Schemata und Kategorien abgeleitet werden. Er nennt für jede Kategorie einen oder mehrere Grundsätze. Ich werde hier nur auf zwei Kategorien hinweisen, die für diese Arbeit relevant sind: zum Ersten die Kategorie der Quantität, die im Zusammenhang mit der Arithmetik steht:

31. Ebd., S. 24.
32. Ebd.

> „Da es sich bei den Kategorien der Quantität um zahlenmäßige Vergleichung handelt, haben wir hier den Grund für die mögliche Anwendbarkeit der mathematischen, besser der arithmetischen Axiome in unserer Erfahrung. Diese mathematische Erkenntnis ist die *Erkenntnis der reinen Anschauung*."[33]

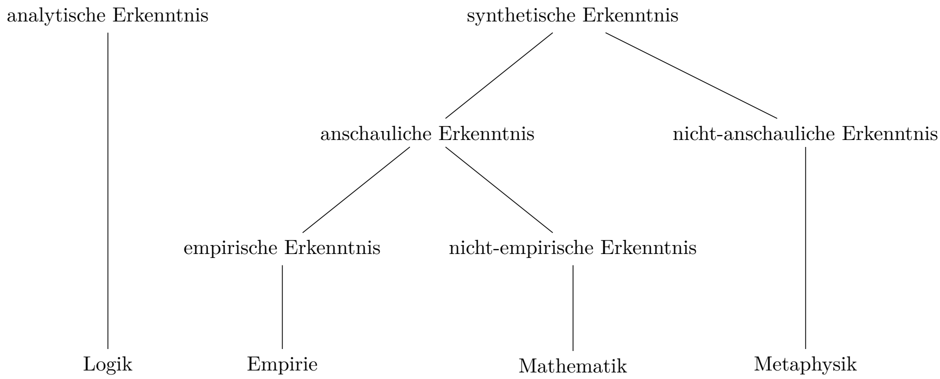
Zum Zweiten die Kategorie der Relation, die in der Darstellung seiner Methodologie eine Anwendung findet:

> „Aus den Momenten der Relation entspringen die drei Analogien der Erfahrung, d.h. es werden Erscheinungen in bestimmte Verhältnisse z.B. in das von Ursache und Wirkung geordnet. Die drei Grundsätze handeln
>
> *a*) von der Beharrlichkeit der Substanz
>
> *b*) von der Bedingtheit aller Veränderung in der Zeit durch eine Ursache
>
> *c*) von der Wechselwirkung alles Gleichzeitigen.
>
> An dieser Stelle setzt die eigentliche metaphysische Erkenntnis ein, die, wie wir in der transzendentalen Deduktion sahen, ihren eigentlichen Ursprung in der *reinen Vernunft* hat."[34]

Was an dieser Stelle erwähnt werden muss, ist, dass das FRIESsche und NELSONsche Verständnis der „*reinen Vernunft*" hier wohl nicht mit dem KANTs übereinstimmt. Wie ich später in 2.1.3 ausführlicher darlege, machen FRIES und NELSON einen spezifischen Unterschied zwischen Verstand und Vernunft als zwei verschiedene *Erkenntnisvermögen*, was eine Abweichung von KANTs Epistemologie ist.

Was ich bis jetzt betrachtet habe, ist NELSONs Verständnis von KANTs Untersuchungen über die Bedeutung von der Mathematik, Empirie, Metaphysik und Logik für die Erfahrung. Das folgende Schema ist NELSONs Repräsentation von KANTs vollständige Einteilung der Erkenntnisse.[35]

33. Ebd.
34. Ebd., S. 25.
35. Vgl. Nelson 2004b S. 25.



2.1.2 Transzendentale Apperzeption

Das Thema der *transzendentalen Apperzeption*, auf das Nelson in seinen Veranstaltungen nur kurz hingewiesen hat, muss ich hier genauer behandeln. Das Thema wurde von Nelson meistens vorausgesetzt, obwohl ihm eine fundamentale Bedeutung in Kants Philosophie und in den epistemologischen Grundlagen der Sokratischen Methode zukommt. Oben habe ich bereits darauf hingewiesen, dass Nelson zur Erklärung der transzendentalen Deduktion Kants sagt, dass wir in der Lage sind, Wahrnehmungskomplexe, die eine Vielzahl von Wahrnehmungen in verschiedenen Kategorien sind, in Form einer einheitlichen Erfahrung erfassen zu können:

> „Kant sieht nun den psychologischen Grund für die Möglichkeit jener Einheitsbildung in der Identität des Subjektes, dem der Vorstellungskomplex angehört. Transzendentale Apperzeption, sofern sie den Grund von synthetischen Urteilen a priori en[t]hält [sic]. Für jede Vorstellung von Einheit ist nun die Identität des Subjektes notwendige[,] aber nicht hinreichende Bedingung.“[36]

Um das zu erklären, nennt Nelson ein spezielles Beispiel, in dem das „Ich“ als „Subjekt“ betrachtet wird:

> „Das Bewusstsein *um* diese Identität ist [...] eine hinreichende Bedingung für den speziellen Fall der Vorstellung von der Einheit des Ichs.“[37]

36. Ebd. S. 22.
37. Ebd.

Das bedeutet, dass unser Bewusstsein von unserer eigenen *Identität des Subjektes* eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für unsere Vorstellung von der *Einheit des Ichs* ist. Die Begründung der transzendentalen Apperzeption auf das Bewusstseins um die Identität des Ichs, d.h. auf sich selbst, ruft auch die semantische selbstbezügliche Antinomie auf, die 1908 von Kurt Grelling (1886-1942) und Nelson veröffentlicht wurde.[38] Nelson fügt hinzu, dass dieses Bewusstsein keineswegs eine notwendige Bedingung für *jedes Bewusstsein von Einheit* sein kann. Er setzt die Kenntnis über die *transzendentale Apperzeption* voraus und seine Erläuterungen über dieses Thema sind sehr kurz. Aufgrund dessen und der Tatsache, dass dieses Bewusstsein für die Philosophie Kants grundlegend ist und ein angemesseneres Verständnis davon uns ein besseres Bild von Nelsons Ideen verschaffen kann, werde ich mich auf Wolfgang Jankes Beitrag im *Historischen Wörterbuch der Philosophie*[39] beziehen und die *transzendentale Apperzeption* näher betrachten.

Janke hebt die Tatsache hervor, dass Kant für den Begriff *Apperzeption*, der zuerst von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) in der Philosophie, nämlich in Bezug auf René Descartes' (1596-1650) „Cogito" angewandt wurde, drei neue Bedeutungen bestimmt hat. In seiner Vernunftkritik „scheidet [Kant] ihn von dem Konzept, welches die rationale Psychologie von der ‹bloßen Apperzeption› hat".[40] Die anderen beiden von Kant bestimmten Bedeutungen für den Begriff, die Janke aufzählt, sind: eine der Bedingungen synthetischer Urteile a priori und der höchste Punkt einer Transzendentalphilosophie.

Janke fügt hinzu, dass Kant den *Begriff* als eine *Denkhandlung* vorstellt. Das „Ich-denke" macht alle Begriffe, sowohl empirische als auch reine, möglich, sodass Kant es als „das Vehikel aller Begriffe überhaupt" sieht. Dieses „Ich-denke" ist aber selbst kein Begriff und ohne jeden erkennbaren Inhalt. Janke folgert daraus, dass das Ich somit „das denkbare «transzendentale Subjekt der Gedanken»"[41] ist. Es wird analytisch, wie wir oben bei Nelson gesehen haben, in seine Denkmodi, die die Kategorien sind, zergliedert, die dadurch explizit werden. Das „Ich" kann jedoch nicht das (empirische) Erkenntnisobjekt des inneren Sinns sein. Sonst könnten die Kategorien als Erkenntnismodi auf dieses empirische Objekt synthetisch angewandt werden.

Er verweist auf folgende Passage der *Kritik der reinen Vernunft*, um zu zeigen, dass Kant die *reine Apperzeption* „als eine der drei Bedingungen für die Möglichkeit synthetischer Urteile a priori" dargestellt hat:

38. Vgl. Nelson 1908, S. 57.
39. Janke 1971.
40. Ebd.
41. Vgl. *KrV*, A 346. Janke 1971, S. 451.

> „Also zugegeben: daß man aus einem gegebenen Begriffe hinausgehen müsse, um ihn mit einem andern synthetisch zu vergleichen; so ist ein Drittes nötig, worin allein die Synthesis zweener Begriffe entstehen kann. Was ist nun aber dieses Dritte, als das Medium aller synthetischen Urteile? Es ist nur ein Inbegriff, darin alle unsre Vorstellungen enthalten sind, nämlich der innre Sinn, und die Form desselben a priori, die Zeit. Die Synthesis der Vorstellungen beruht auf der Einbildungskraft, die synthetische Einheit derselben aber (die zum Urteile erforderlich ist) auf der Einheit der Apperzeption. Hierin wird also die Möglichkeit synthetischer Urteile, und da alle drei die Quellen zu Vorstellungen a priori enthalten, auch die Möglichkeit reiner synthetischer Urteile zu suchen sein, ja sie werden sogar aus diesen Gründen notwendig sein, wenn eine Erkenntnis von Gegenständen zu Stande kommen soll, die lediglich auf der Synthesis der Vorstellungen beruht.“[42]

Laut Janke setzt Kant die transzendentale Apperzeption in seiner „Deduktion des reinen Verstandesbegriffs“ als das erste und höchste Erkenntnisprinzip voraus. Die transzendentale Apperzeption stelle eigentlich eine *ursprünglich-synthetische Einheit* dar. Den Grund für diese Benennung erklärt er wie folgt: Sie heißt ursprünglich, weil sie „allen Vorstellungen zugrunde liegt“[43], sie aber selbst keine andere als Subjekt benötigt. Da sie ein „Aktus der Spontaneität“ ist, kann sie nicht als etwas Gegebenes angenommen werden,

> „sondern allererst in der Tätigkeit des Sich-auf-sich-Beziehens entspringt und ist [sic], und weil sie allen Vorstellungen zugrunde liegt, ohne selbst einer anderen als Subjekt zu bedürfen, so daß das Ich-denke alle meine Vorstellungen begleitet, ohne selbst von einer ursprünglicheren begleitet zu werden.“[44]

Dass die transzendentale Apperzeption eine synthetische Einheit ist, kann laut Janke so nachvollziehbar werden: Da in jeder Vorstellung der Bezug auf das „vorstellende Ich“ herausgefiltert werden kann, ist die „durchgängige Identität des Bewusstseins“[45] analytisch, aber sie ist nur aufgrund einer synthetischen Einheit möglich:

> „Die Einheit des Selbstbewußtseins beruht auf dem Bewußtsein eines apriorischen Verbindens; alles anschaulich Gegebene ist darin geeint, nicht bloß meine Vorstellung, sondern von mir verbundene Vorstellung

42. *KrV*, B 194.
43. *KrV*, B 132.
44. Janke 1971, S. 451.
45. Ebd.

> zu sein. – Dieser Satz, die ursprüngliche Einheit der A. sei synthetisch, ist der oberste Grundsatz einer transzendentalen Logik, d.h. er ist nicht Grundsatz des Anschauungsgebrauchs, und er ist eingeschränkt für den Gebrauch eines endlichen Verstandes, der nur denkt und nicht ‹intellektuell› anschaut.“[46]

Janke betont hier, dass die ursprüngliche synthetische Einheit des „Ich-denke“ dennoch für die Kantische Philosophie einen Ausgangspunkt bildet, von dem aus alles bestimmt wird. Er sieht den Grund dafür darin, dass sie „die Einheit von Subjekt und Objekt als solche“[47] ermöglicht. Er verweist dazu auf folgende Passage der *KrV*:

> „Und so ist die synthetische Einheit der A. der höchste Punkt, an den man allen Verstandesgebrauch, selbst die ganze Logik, und, nach ihr, die Transzendental-Philosophie heften muß.“[48]

Somit umfassen die bisherigen Beschreibungen das, was Nelson in der Erklärung der Kantischen Philosophie (der Erfahrung) präsentiert hat und die Kantischen Grundbegriffe und Grundsätze, die Nelson, ohne sie ausführlich zu erläutern, übernommen und in der Erklärung seines philosophischen Gedankensystems verwendet hat. Diese sind für das Verstehen der folgenden Teile dieses Kapitels notwendig.

In dem nun folgenden Abschnitt wird der erkenntnistheoretische Aspekt von Nelsons Sokratischer Methode betrachtet. Mit Hilfe der vorausgegangenen Darlegungen untersuche ich Nelsons Verständnis der Sokratischen Methode, in das er die Friessche Philosophie übernommen hat. Dafür werde ich nach erkenntnistheoretischen Prinzipien suchen, die Nelson für seine Methode angenommen hat, und herausfinden, wie er sie rechtfertigt.

2.1.3 Formale Apperzeption oder Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft

Hier soll gezeigt werden, dass die *formale Apperzeption* oder *das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft*[49] in der Konzipierung der Sokratischen Methode durch Nelson als der tiefste Grund für die Möglichkeit und Notwendigkeit seiner pädagogischen Methode dargelegt wurde. Obwohl das Prinzip eine Übernahme von

46. Janke 1971, S. 452.
47. Ebd.
48. *KrV*, B 134.
49. Beide Termini wurden zuerst von J. F. Fries verwendet (vgl. G. König 1998, Sp. 1397. und Fries 1828, S. 54-59).

Fries ist, verweist Nelson auf seine Bedeutung in der kritischen Methode –, die, wie in 2.2 dargestellt wird, eine andere Bezeichnung für die Sokratische Methode durch Nelson ist – mittels eines Zitats von Kant, in dem auf das Prinzip *implizit* hingewiesen wird:

> „Die Vernunft muß sich in allen ihren Unternehmungen der Kritik unterwerfen und kann der Freiheit derselben durch kein Verbot Abbruch tun, ohne sich selbst zu schaden und einen ihr nachteiligen Verdacht auf sich zu ziehen. Da ist nun nichts so wichtig in Ansehung des Nutzens, nichts so heilig, das sich dieser prüfenden und musternden Durchsuchung, die kein Ansehen der Person kennt, entziehen dürfte. Auf dieser Freiheit beruht sogar die Existenz der Vernunft, die kein diktatorisches Ansehen hat, sondern deren Ausspruch jederzeit nichts als die Einstimmung freier Bürger ist, deren jeglicher seine Bedenklichkeiten, ja sogar sein veto, ohne Zurückhalten muß äußern können.“[50]

Explizit jedoch führt Nelson in dem Vortrag „Die Sokratische Methode“ aus, dass das Prinzip auch von Sokrates geglaubt und in der Praxis der philosophischen Arbeit angewandt wurde:

> „Sokrates ist der erste, der, getragen von dem Vertrauen in die Kraft des menschlichen Geistes, die philosophische Wahrheit zu erkennen, mit diesem Vertrauen die Überzeugung verbindet, daß nicht Einfälle oder äußere Lehre uns diese Wahrheit erschließen, sondern daß nur planmäßiges unablässiges Nachdenken in der gleichen Richtung uns aus dem Dunkel zu ihrem Licht führt.“[51]

Erläuterung dieses Prinzips und seine Wichtigkeit für die Sokratische Methode bilden einen bedeutenden Teil des oben genannten Vortrags. Hier stellt er zunächst dar, dass im Gegensatz zu den mathematischen Axiomen, die Grundsätze in der Philosophie „das Dunkelste, Unsicherste und Umstrittenste“[52] sind. Daher braucht derjenige, der nach diesen Grundsätzen sucht, „das künstliche Licht der Methode“, um den Weg dahin „im metaphysischen Dunkel“ nicht zu verlieren.[53] Er fügt hinzu:

> „Unter diesen Umständen möchte man erwarten, daß das Problem der Methode bei niemandem so in dem Vordergrund des Interesses zu finden sei wie bei dem Philosophen. Doch ist zu bedenken, daß die eben

50. *KrV*, B 766f wie es in (Nelson 1973, S. 79) zitiert wurde.
51. Nelson 2002, S. 42.
52. Vgl. Nelson 2002, S. 30.
53. Vgl. ebd.

> angestellte Erwägung ihrerseits ja schon durch einen methodischen Gesichtspunkt bedingt ist, indem sie vor aller eigentlichen philosophischen Spekulation die Frage aufwirft nach dem Wesen der philosophischen Erkenntnis, und durch diese Vorfrage erst Licht fällt auf die den eigentlichen Inhalt der Philosophie angehenden Probleme.“[54]

Wenn man also eine (philosophische) Methode, die den Weg zur Erlangung der grundlegenden (philosophischen) Erkenntnisse zeigt, darstellen will, muss man zunächst festlegen, was unter „Erkenntnis“ verstanden werden kann.

Begründung, mittelbare und unmittelbare Erkenntnis

Um zu zeigen wie Nelson das Thema „Erkenntnis“ behandelt, beginne ich mit einer grundlegenden Unterscheidung, die er in diesem Zusammenhang macht. Dafür muss ich zunächst einführen, wie er „Begründung“ definiert. Die Begründung einer Erkenntnis laut Nelson bedeutet

> „diese Erkenntnis hinsichtlich ihrer Gültigkeit auf eine andere zurückzuführen. Eine Erkenntnis begründen, heißt eine andere Erkenntnis angeben, die ihren Grund bildet, d.h. von der sie ihrer Gültigkeit nach abhängt.“[55]

Mit Fortsetzung dieses Verfahrens, wird eine immer längere Kette von Erkenntnissen entstehen, die hinsichtlich ihrer Gültigkeit (mindestens in einer Richtung) von einander abhängig sind. Es wird aber nicht klar, wodurch sie letztendlich ihre Gültigkeit gewinnen. Nelson findet die oben angegebene Definition für Begründung nicht vollständig:

> „Wir fordern eine Begründung, wenn wir über die Gültigkeit einer Behauptung im Zweifel sind. Eine an und für sich zweifelhafte Behauptung kann nur dadurch gewiß werden, daß sich ein Grund für sie findet, in einer Erkenntnis nämlich, die an und für sich gewiß ist.“[56]

Folglich ist das Begründen nur dann sinnvoll, wenn die Kette der Begründungen terminiert, wenn also Erkenntnisse existieren, die an und für sich gewiss sind. In diesem Fall ist das ultimative Ziel der Begründung einer Behauptung, die nicht an und für sich gewiss ist, sie auf die Gewissheit der Erkenntnisse, die an und für sich gewiss sind, zurückzuführen. So wird die potentiell unendliche

54. Nelson 2002, S. 30f.
55. Nelson 1917 S. 48.
56. Ebd.

Abhängigkeitskette abbrechen und die Definition der Begründung nach Nelson überhaupt erst sinnvoll[57] werden. Die erfolgreiche Durchführung einer Begründung ergibt somit ein Resultat, nämlich die Gewissheit der Behauptung, die zunächst nicht gewiss war. Die Behauptung, die am Ende dieses Prozesses gewiss ist, ist dann eine Erkenntnis. Die Grenze des Begründungsprozesses, die die an und für sich gewissen Erkenntnisse sind, bezeichnet Nelson als „unmittelbare Erkenntnisse" und die Erkenntnisse, deren Gewissheit von anderen Erkenntnissen abhängig ist, nennt er „mittelbare". Daher erfordern nur die mittelbare Erkenntnisse eine Begründung.

Urteil

Nun stellt sich die Frage, wie die unmittelbaren Erkenntnisse aussehen. Dafür muss der Begriff „Urteil" erklärt werden, um die zweite grundlegende Unterscheidung Nelsons in seiner Epistemologie auch darlegen zu können:

> „Ein Urteil ist nämlich niemals an und für sich gewiß, sondern kann nur gewiß werden dadurch, daß es sich auf eine Erkenntnis gründet, die ihrerseits kein Urteil ist. Das Urteil beruht auf einer an sich willkürlichen Verbindung von Begriffen, von Vorstellungen also, die ihrerseits problematisch sind und nichts behaupten. Ein Urteil ist die Behauptung, daß einer solchen an sich willkürlichen Verbindung von Begriffen etwas wirkliches entspricht."[58]

Der obigen Definition folgend, brachte Nelson dieses Beispiel: „Dieser Tisch ist rund", ist ein Urteil, das auf einer willkürlichen Verbindung zwischen den Begriffen „Tisch" und „rund", die an und für sich nichts behaupten, basiert. Das Urteil behauptet, dass diese Begriffsverbindung einer Wirklichkeit entspricht. Für die objektive Gültigkeit dieser Verbindung benötigen wir ein „Kriterium". Aber dies kann selbst kein Urteil sein, ansonsten müsste es selbst vorausgesetzt werden, oder man müsste ein anderes Kriterium dafür finden. Die zuletzt genannte Bedingung führt zu einer unendlich langen Kette von Kriterien. Daher muss das Kriterium an und für sich gewiss sein und keine Begründung erfordern. In anderen Worten, das Kriterium kann nur eine unmittelbare Erkenntnis sein. Wenn wir uns eine Anschauung von dem Tisch machen können, haben wir so eine Erkenntnis erlangt. Fußend auf dieser Anschauung können wir die Gültigkeit der Behauptung beurteilen. Unsere Anschauung ist eine Erkenntnis, die an und für sich sicher ist. Es gibt keine Behauptung über eine willkürliche Begriffsverbindung in ihr und sie „ist

57. Ein besserer Ausdruck für diesen Sachverhalt wäre vielleicht: Begründung wird dadurch wohldefiniert.

58. Nelson 1917 S. 49.

unmittelbar assertorisch“.[59] Folglich hat dann erstens diese Erkenntnis nicht die Form eines Urteils und zweitens ist das Urteil „Der Tisch ist rund“, das auf Basis der unmittelbaren Erkenntnis begründet worden ist, daher assertorisch und eine Erkenntnis. Deshalb ist die Gültigkeit letzterer von einer unmittelbaren, nicht urteilsförmigen Erkenntnis abhängig. In anderen Worten kann daraus gefolgert werden:

> „Das Urteil ist eine mittelbare Erkenntnis, setzt also eine andere Erkenntnis als seinen Grund voraus: das liegt im Begriff des Urteils. Identifiziert man jedoch Erkenntnis und Urteil, so bleibt nur übrig, den letzten Grund aller Urteile im *Gegenstande* zu suchen, und man erhält an Stelle der Aufgabe der Zurückführung der Urteile auf die unmittelbare Erkenntnis das Problem des Verhältnisses der Erkenntnis zum Gegenstande.“[60]

Der Fehler in der unendlichen Abhängigkeit-Kette der Begründung liegt also in der Identifizierung von „Erkenntnis und Urteil“. Daher kann jedes Urteil erst dann begründet werden, wenn dieser Fehler vermieden wird:

> „Berichtigen wir diese Mißdeutung [...], so gewinnen wir die Möglichkeit eines Verfahrens, das uns gestattet, kein Urteil ohne Begründung anzunehmen, ohne uns doch in den unmöglichen unendlichen Regreß der Begründung zu verwickeln.“[61]

Daher sind die unmittelbaren Erkenntnisse Ankerpunkte, mittels derer Urteile überhaupt erst begründet werden können. Sie haben als solche einige Eigenschaften:

> „*Über die Wahrheit der unmittelbaren Erkenntnis kann kein Streit sein, sondern nur darüber, welches die unmittelbare Erkenntnis sei.* Wollten wir die Wahrheit der unmittelbaren Erkenntnis bezweifeln, so müßen wir sie, sofern sie unmittelbare Erkenntnis ist, zu diesem Zweifel selbst voraussetzen. Der Zweifel an der unmittelbaren Erkenntnis führt zum Widerspruch.“[62]

Nach Nelson ist es nicht möglich die „unmittelbare Erkenntnis des Irrtums zu verdächtigen“:

59. Vgl. Nelson 1917 S. 49f.
60. Nelson 1973 S. 155.
61. Nelson 1973 S. 155.
62. Nelson 1970b S. 24.

> „[D]enn Irrtum ist nur Abweichung von der unmittelbaren Erkenntnis, falsche Wiederholung der unmittelbaren Erkenntnis. [...] Aller Irrtum und Zweifel gehört der Reflexion und kann die unmittelbare Erkenntnis nicht antasten. “[63]

Vernunft und Verstand

Basierend auf diesen Unterscheidungen stelle ich eine weitere vor, die ebenso in der Epistemologie Nelsons grundsätzliche ist. Laut ihm müssen zwei Erkenntnisvermögen, nämlich die Vernunft und der Verstand, voneinander unterschieden werden. Barbara Neisser sagt in der Beschreibung der Vernunftkritik Nelsons:

> „Er entwickelt seine Theorie der Vernunft als Fortführung der Vernunftkritik von Fries und in kritischer Auseinandersetzung mit Kants transzendentallogischer Vernunftanalyse. Nelson wirft Kant vor, den Verstand in seiner Analyse mit der Vernunft verwechselt zu haben und den vergeblichen Versuch unternommen zu haben, die Normen der Wissenschaften, der Religion, der Ethik und der Ästhetik auf die bloße Reflexion zu gründen. Von diesem Fehler hat Fries nach Nelson die Kantische Philosophie befreit.“[64]

Im Anschluss daran beschreibt sie mit einem Zitat von Nelson weiter, wie Fries diese Erkenntnisvermögen und ihren Unterschied darstellt:

> „Er trennt den Verstand, der bloß der logischen Kombination fähig ist, scharf von der Vernunft als der Quelle der allgemeinen und notwendigen Wahrheiten. In der menschlichen Vernunft liegen die höchsten Wahrheiten auf religiösem, sittlichem und naturphilosophischem Gebiet an und für sich dunkel und dem einzelnen unbewußt. Nur in der Anwendung treten sie hervor, und nur durch Nachdenken können sie von ihrer ursprünglichen Dunkelheit befreit und zur Klarheit des Bewußtseins erhoben werden.
> Durch den Nachweis, daß der Mensch tatsächlich eine solche Vernunft besitzt, hat Fries die philosophischen Wahrheiten gegen alle dialektischen Zweifel sichergestellt.“[65]

Die grundlegenden Unterscheidungen der Epistemologie Nelsons sind also einerseits zwischen *Vernunft* und *Verstand*, andererseits zwischen *Erkenntnis* und *Urteil*.

63. Nelson 1970b S. 23.
64. Neißer 1994, S. 38f.
65. Nelson 1975, S. 122 wie es in (Neißer 1994, S. 39) zitiert wurde.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Unterscheidungen wird sichtbar, wenn man die folgende Äußerung NELSONs betrachtet:

> „Bezeichnen wir die unmittelbare Erkenntnis kurz als Vernunfterkenntnis, die mittelbare Erkenntnis durch Urteile als Reflexions- oder Verstandeserkenntnis, und entsprechend die Übereinstimmung der unmittelbaren Erkenntnis mit dem Gegenstande als *Vernunftwahrheit*, die Übereinstimmung der mittelbaren Erkenntnis mit der unmittelbaren Erkenntnis als *Verstandeswahrheit*, so können wir den gemeinschaftlichen Fehler der erkenntnistheoretischen und der dogmatischen Methode auch so bezeichnen: er beruht auf der Verwechslung der Verstandeswahrheit mit der Vernunftwahrheit.“[66]

Zusammenfassend kann man sagen, dass das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft sich auf diese beiden Unterscheidungen bezieht. Basierend auf ihnen, beschreibt es einen Sachverhalt über das Verfahren der Begründung der Erkenntnisse. NELSON stellt diesen Sachverhalt wie folgt dar:

> „Eine Begründung der unmittelbaren Erkenntnis selbst ist nicht nur nicht möglich, sondern auch nicht erforderlich; denn der Umstand, der überhaupt erst die Frage nach einer Begründung entstehen läßt, findet bei ihr nicht statt: die unmittelbare Erkenntnis ist eine solche, die an und für sich gewiß ist, die also ihre Gewißheit nicht erst von etwas außer ihr entlehnt. Wir können diesen Sachverhalt aussprechen als den *Grundsatz des Selbstvertrauens der Vernunft* auf die Wahrheit ihrer unmittelbaren Erkenntnis. Es gilt nur, diesen Sachverhalt ins Auge zu fassen, um sich der Forderung einer Begründung der unmittelbaren Erkenntnis zu entledigen.“[67]

Der Bezug Nelsons auf Platon

Eine Ähnlichkeit mit PLATONs *Anamnesis-Lehre* ist in dem oben genannten Prinzip deutlich zu erkennen. In der Tat sagt NELSON sogar explizit, dass das Prinzip eine Neuformulierung der Anamnesis-Lehre ist. In dem Vortrag „Die Sokratische Methode“ verweist er auf die praktische Anwendung des Prinzips durch SOKRATES und fügt hinzu:

66. Nelson 1973 S. 156f.
67. Nelson 1917, S. 51.

> „Freilich mußte die Lehre von der Wiedererinnerung, deren Wahrheit den eigentlichen und tiefsten Grund für die Möglichkeit und Notwendigkeit der sokratischen Methode bildet, erst im Fortgang der philosophischen Erkenntnis von der Umschlingung durch die platonische Mystik befreit werden. Diese Befreiung ist nach zwei Jahrtausenden gelungen durch die Errungenschaften der kritischen Philosophen Kant und Fries, die der regressiven Methode der Abstraktion die Vollendung gaben, darüber hinaus aber die Ergebnisse der Abstraktion, die zwar als Prinzipien keines Beweises fähig sind, aber doch als Urteile noch begründungsbedürftig bleiben, durch die Methode der sogenannten *Deduktion* sicherstellen.“[68]

Das Prinzip ist also im Kern mit der Anamnesis-Lehre identisch und die Didaktik, die Sokrates übernommen hat, basiert auf einer These, die mit dem oben genannten Prinzip übereinstimmt. Das wird von Nelson expliziter mit einem Hinweis auf die Anamnesis-Lehre dargelegt:

> „Wir wissen alle, daß hier die platonische Ideenlehre anklingt, die der geschichtliche Sokrates selbst nicht gelehrt hat. Und doch ist in diesem Worte sokratischer Geist, der starke Geist des Selbstvertrauens der Vernunft, die Ehrfurcht vor ihrer sich selbst genügenden Kraft. Sie gibt Sokrates die Ruhe, die nach Wahrheit Suchenden in die Irre gehen und straucheln zu lassen. Ja sie gibt ihm den Mut, sie in die Irre zu schicken, um die Überzeugungen zu erproben, um das nur übernommene Wissen von der Wahrheit zu sondern, die nur im eigenen Nachdenken langsam in uns zur Klarheit reift.“[69]

2.1.4 Antidogmatismus

Um den *Anti-Dogmatismus* als einen Hauptaspekt der Nelsonschen Didaktik zu untersuchen, beziehe ich mich zunächst erneut auf seinen Vortrag „Die Sokratische Methode“. Die Punkte, die für diesen Aspekt der Sokratischen Methode relevant sind, werden herausgearbeitet und dann mittels bereits thematisierten erkenntnistheoretischen Erklärungen im Detail analysiert.

Wie im ersten Kapitel erwähnt wurde, benutzt Nelson den Begriff *Anti-Dogmatismus* in seinem Vortrag nicht. Ich übernehme ihn von Gisela Raupach-Streys Darlegung der Sokratischen Didaktik, in der sie ihn verwendet, um das zu bezeichnen,

68. Nelson 2002, S. 42.
69. Nelson 2002, S. 51.

was NELSON „das erste Geheimnis der Sokratischen Methode“ nennt.[70] Um diesen Aspekt der pädagogischen Methode NELSONs vorzustellen, möchte ich zunächst einen weiteren Blick auf die Beschreibung des philosophischen Unterrichts werfen, die er in dem Vortrag gegeben hat:

> „Wer im Ernst philosophische Einsicht vermitteln will, kann nur die Kunst des Philosophierens lehren wollen. [...] Soll es also überhaupt so etwas wie philosophischen Unterricht geben, so kann es nur Unterricht im Selbstdenken sein, genauer: in der selbstständigen Handhabung der Kunst des Abstrahierens.“[71]

Daher ist das, was der Philosophie-Lehrer seine Schüler lehren muss oder, wie NELSON sagt, was er von ihnen erzwingen muss, „selbst zu denken“. Dieser „Zwang zum Selbstdenken“ oder die Abschaffung des *Dogmatismus* beinhaltet zwei Aspekte. Der erste ist, dass die Schüler ihre unbegründeten Dogmen aufgeben müssen. Gerade dies sei der Anlass seine Methode nach SOKRATES zu benennen:

> „Ein [SOKRATES] allgemein zugestandener Erfolg besteht zunächst darin, daß er durch seine Fragen die Schüler zum Eingeständnis ihrer Unwissenheit bringt und damit dem Dogmatismus bei ihnen die Wurzel durchschneidet.“[72]

Da NELSON selbst an keiner Stelle eine Erklärung des Dogmatismus gibt, werde ich mich auf KANTs Beschreibung beziehen, die NELSON mit großer Sicherheit kannte. Laut WOLFGANG NIEKE hat KANT „die erste Theorie der Erklärung des Ursprungs und der Überwindung des Dogmatismus“ geliefert.[73] Nach KANT sei der Dogmatismus ein Verfahren, „das ohne Kritik des Verstandesvermögens auszukommen sucht“. Im Anschluss daran legt NIEKE dar, dass der „Dogmatismus der Metaphysik [...] das Vorurteil [sei], in ihr ohne Kritik der reinen Vernunft fortzukommen“.[74] Weiter, angelehnt an KANT:

> „Dogmatismus ist eine Philosophie ohne vorhergehende Erkenntnistheorie.“[75]

Demnach vermeidet derjenige den Dogmatismus, der seine Vorurteile überwindet und beim Fällen eines Urteils auch gleichzeitig dessen Grundlagen kritisiert.

70. Vgl. Nelson 2002, S. 40.
71. Nelson 2002, S. 34f.
72. Nelson 2002, S. 39.
73. Vgl. Nieke 1972, Sp. 277
74. *KrV*, B XXX.
75. Nieke 1972, Sp. 277.

Nelson glaubt zwar, dass auch ein Vortrag zum „Selbstdenken“ führen kann, jedoch sei dies nicht garantiert:

> „Anregung zum Selbstdenken kann, zumal bei reiferen Schülern, auch vom Vortrag ausgehen. Aber zu welcher Anlockung auch solche Anregung sich steigern mag, unwiderstehlich ist sie nicht.“[76]

Den einzigen Weg, die Schüler zum „Selbstdenken“ zu animieren, sieht Neslon in einer direkten und praktischen Aufforderung. Er zählt vier Faktoren auf, die er als notwendig erachtet (vgl. Nelson 2002, S. 39): *erstens*, dass der Unterricht in Form eines Gesprächs erfolgt, *zweitens*, dass die Schüler „sich aussprechen“ können, *drittens*, „sich auf jede Querfrage einlassen“ und *viertens*, dass sie „über die Gründe jeder Behauptung Rechenschaft abzulegen“ haben.

Der andere Aspekt, den er zur Überwindung des Dogmatismus darstellt, ist, dass der Lehrer sich zu dem besprochenen Thema nicht in belehrender Weise äußert:

> „Die Entwicklung unseres Problems hat uns die tiefere Beziehung enthüllt, die besteht zwischen der kritischen Philosophie und der sokratischen Methode, so dass wir daraufhin das Wesen der sokratischen Methode geradezu bestimmt haben als die Ausschaltung des Dogmatismus im Unterricht, und das heißt hier: als den Verzicht auf jedes belehrende Urteil überhaupt.“[77]

Um diese Behauptung zu begründen, gibt Nelson eine Beschreibung des Philosophieunterrichts, die auf seinem erkenntnistheoretischen Prinzip basiert:

> „Der philosophische Unterricht löst seine Aufgabe, wenn er im Schüler die Einflüsse, die der Aufhellung der philosophischen Erkenntnis im Wege stehen, planmäßig schwächt, die ihr förderlichen planmäßig stärkt. Ohne hier die Frage zu beantworten, welche Einflüsse sonst hier in Betracht kommen, wollen wir jedenfalls das Eine festhalten: dass ein unbedingt auszuschaltender Einfluss derjenige ist, der von den Urteilen des Lehrers ausginge.“[78]

Im ersten Teil des obigen Zitats weist Nelson implizit auf das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft hin. Insofern die unmittelbaren Erkenntnisse als dunkle Vernunftserkenntnisse in uns allen, Lehrer und Schüler eingeschlossen, angelegt sind, kann der Unterricht Bedingungen herstellen, so dass diese dunklen Erkenntnisse aufgerufen werden und in das Bewusstsein gelangen können (siehe hierzu den

76. Nelson 2002, S. 39.
77. Nelson 2002, S. 44f.
78. Nelson 2002, S. 45.

folgenden Abschnitt 2.1.3). Im Folgenden versuche ich, die oben genannten Punkte aus dem Vortrag Nelsons detailliert zu überprüfen. Dafür werde ich, Nelson folgend, mit der Untersuchung des Dogmatismus bei Sokrates beginnen.

Der Platonische Sokrates als Initiator des Anti-Dogmatismus

Die beiden oben angeführten Aspekte des Anti-Dogmatismus hat Sokrates laut Nelson in seinen Gesprächen mit seinen Schülern berücksichtigt: Er hat versucht, sowohl die Dogmen bei seinen Schülern auszuräumen, als auch auf die Vermittlung jeglicher eigener Dogmen zu verzichten. Dies war jedoch kein Ergebnis einer konsequenten Durchführung einer pädagogischen Methode, zu deren Einhaltung er sich verpflichtet fühlte, sondern Sokrates war – wenn wir seine diesbezüglichen Aussagen ernst nehmen – zutiefst von seinem Nicht-Wissen überzeugt. Dies bedeutet, dass er bei sich nichts finden konnte, dessen er sich sicher war. Darüber hinaus prüfte Sokrates diesen Fakt fortlaufend mittels Reflexion und Diskussion mit anderen. Somit konnte er sich selbst auf keine Dogmen berufen, die er seinen Schülern hätte vermitteln können. Nelson weist auf diesen Punkt in seinem Vortrag ebenfalls hin:

> „Sokrates hat, wie jederman weiß, kein System aufgestellt. Er hat wieder und wieder sein Nicht-Wissen zugestanden. Er ist jeder Behauptung entgegengetreten mit der Aufforderung, den Grund ihrer Wahrheit zu suchen.“[79]

Unter diesen Bedingungen konnte Sokrates die Athener mit keinem Erkenntnisinhalt in Form einer Wahrheit belehren, allerdings nicht deshalb, weil er ihre Existenz leugnete. Vielmehr war er von der Existenz der Wahrheit überzeugt und forderte die Athener auf, diese zu suchen. Dies war nicht nur ein rhetorischer Aufruf, sondern Sokrates zeigt in diesem Zusammenhang, laut Nelson, auch einen Weg, auf dem sie zur Wahrheit gelangen könnten:

> „[Sokrates] hat, wie es in der »Apologie« heißt, seine Mitbürger »ausgefragt, geprüft und ins Gebet genommen«, nicht um ihnen lehrend eine neue Wahrheit zu vermitteln, sondern nur, um ihnen den Weg zu zeigen, auf dem sie sich finden läßt.“[80]

Für diesen Punkt liefert Platons Dialog *Menon* m. E. gute Belege. Darin fordert Sokrates Menon auf, eine Definition für *Tugend* zu geben. Der Definitionsversuch

79. Nelson 2002, S. 26.
80. Ebd.

erfolgt ohne weitere vorhergehende Prüfung durch Menon. Um eine Definition zu finden, die die im Dialog genannten Kriterien erfüllt, und nicht, weil er sich unbedingt dazu verpflichtet sah, den Dogmatismus bei Menon auszuräumen, hinterfragt er dessen Versuch einer Definition. Dieser Prozess wiederholt sich mehrmals, bis Menon verzweifelt das bekannte Paradoxon aufstellt. Obwohl sich Sokrates nun mit seiner Antwort auf Dichter und göttliche Männer und Frauen also auf Autoritäten bezieht, lässt er jedoch auch die Lösung des Paradoxons nicht ungeprüft stehen. Die Szene, die die Diskussion zwischen Sokrates und Menons Sklaven schildert, hat die Funktion einer Begründung dieser erkenntnistheoretischen Aussage. Ob diese Begründung – in Nelsons Terminologie eine Deduktion – ausreichend und akzeptabel ist, ist eine Frage, die an anderer Stelle untersucht werden soll. Der Hauptpunkt hier ist, dass sogar die Antwort von göttlichen Männern und Frauen nach Sokrates, der sich auch als gläubig bezeichnet, einer weiteren Prüfung bedarf. Dies kann für uns auch anzeigen, dass die Philosophie von Sokrates nicht ein System philosophischer Ansichten als Hauptkern hat, sondern dass eher eine Methode im Mittelpunkt steht, die dazu beiträgt, die philosophischen Erkenntnisse zu klären. Daher wird das, was als geistiges Vermächtnis geblieben ist, ebenso durch diese Methode untersucht und kann bestenfalls die Funktion eines Impulses – aus der Erfahrungswelt stammend – haben und als ein Faktor zur Klärung der dunklen Erkenntnisse dienen.

Wenn das Philosophieuniversum als etwas betrachtet wird, das zwei Welten in sich vereint, nämlich die Welt der Lehrsätze und die der Praxis, wobei in der ersten die *Anamnesis-Lehre* oder das *Prinzip* des Selbstvertrauens der Vernunft und in der zweiten die Sokratische *Methode* liegen, kann für den Anti-Dogmatismus eine Stellung zwischen diesen beiden Welten angenommen werden. *Einerseits* besteht zwischen dem Konzept der Sokratischen Methode und dem Prinzip eine starke Bindung, da die Überzeugung von der Existenz unmittelbarer Erkenntnisse, die nicht in Form von Urteilen vorliegen, die Entstehung von Dogmen verhindert, die ihrerseits die Form eines Urteils haben. Dieser Punkt kann in anderen Worten wie folgt lauten: Gemäß dem Prinzip sind nur diejenigen Erkenntnisse unmittelbar, die keiner Begründung bedürfen. Nur dann kann ein Urteil eine Erkenntnis sein, wenn eine Begründung dafür gegeben und seine Gültigkeit letztendlich auf eine unmittelbare Erkenntnis zurückgeführt werden kann. Unter Berücksichtigung der oben gegebenen Beschreibungen von Dogma und Dogmatismus ist ein Dogma vor allem ein Urteil. Daher kann ein Dogma keine unmittelbare Erkenntnis sein. Da die mittelbaren Erkenntnisse begründet worden sind, können sie auch keine Dogmen darstellen. Daher hat ein Dogma in einer Erkenntnistheorie, die das Prinzip berücksichtigt und es darüber hinaus als eine Erkenntnis anerkennt, keinen Platz.

In den zuletzt gemachten Ausführungen, die zur Klärung der starken Bindung zwischen dem Anti-Dogmatismus und dem Prinzip der Selbstvertrauens der Vernunft dienen sollten, hatte das Konzept Begründung auch eine zentrale Bedeutung. Das zeigt, dass der Anti-Dogmatismus *andererseits* mit der Methode in engem Zusammenhang steht. Diese wird in dem folgenden Abschnitt detailliert und mit Bezug zum Konzept der Begründung ausgeführt. Im Grunde beinhalten diese Ausführungen, dass die Methode den Anti-Dogmatismus voraussetzt, und deswegen bringt die Ausführung der Methode den Anti-Dogmatismus in die Praxis.

Der Anti-Dogmatismus kann also als der grundlegende Aspekt der Sokratischen Methode bezeichnet werden, der das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft, das den erkenntnistheoretischen Aspekt der Methode darstellt, an die Praxis heranführt.

2.2 Einführung in die Methodologie Nelsons

In diesem Teil der Arbeit folgt zunächst eine Auseinandersetzung in einem allgemeineren epistemologischen Kontext mit der *Sokratischen Methode* NELSONS. Dafür betrachte ich im Überblick den Begriff der *Methode*, besonders wie sie in PLATONS Werke verstanden und verwendet wurde, um ein Bild von dem Begriff in der Zeit von SOKRATES zu gewinnen. Ausführlicher untersuche ich aber diesen Begriff bei NELSON und die Rolle, die er in seiner Philosophie einnimmt. Die *Sokratische Methode* wird danach in 2.3 speziell bezüglich ihres Zusammenspiels mit der Mathematik und schließlich in 3.2 in Hinsicht auf ihre Anwendung im Mathematikunterricht untersucht.

Der Terminus *Methode*[81] wurde in philosophischer Relevanz zuerst von PLATON verwendet und bedeutet das Nachgehen und Verfolgen eines Ziels in einem regelgerechten Verfahren.[82] Aber die Bedeutung, so wie PLATON sie sieht, ist eine, die von Frühphilosophen wie PARMENIDES oder vorsokratischen Dichtern wie HESIOD geteilt wurde.[83] FRITZ-PETER HAGER spricht im Zusammenhang mit dem Begriff der Methode bei PLATON nur von der *dialektischen Methode*.[84] Er verknüpft PLATONS Dialektik mit zwei Bedeutungen:

- Erstens die Zurückführung einer Vielheit gleichnamiger Erscheinungen aus dem Bereich der Erfahrung auf die Einheit der Idee und

81. μέθοδος, zusammengesetzt aus μετά (hinter, nach) und ὁδός (Weg).
82. Vgl. Ritter 1980, Sp. 1304.
83. Ebd.
84. διαλεκτικὴ ἐπιστήμη, Diálektos. Vgl. Hager 1980, Sp. 1305.

- zweitens die begriffliche Einteilung der allgemeinsten Ideen und Obersten Gattungsbegriffe (Genus) in ihre Arten und Unterarten. Dieses Verfahren wird u.a. von Hager Dihairesis oder Dichotomie bezeichnet.[85]

Wie in der ersten Bedeutung der PLATONischen Dialektik erkennbar, hat diese Methode einen engen Bezug zur PLATONischen *Ontologie* und *Metaphysik*. Bei der Anwendung dieser Methode spielen die PLATONischen Ideen eine fundamentale Rolle. Dabei ist zu berücksichtigen, dass diese Definition und die daraus abgeleitete Funktion das ist, was PARMENIDES unter Methode versteht. JOACHIM RITTER selbst schreibt, dass Methode bei PLATON dieselbe Bedeutung wie bei PARMENIDES hat, nämlich den Weg als Metapher in zwiefacher Bedeutung: einerseits das Leben so zu führen, dass Wahrheit und Recht als Ziel definiert werden, wobei andererseits fragendes Forschen und vernünftiges Begreifen im Zentrum stehe.[86]

Bei PARMENIDES bezieht sich das vernünftige Begreifen nur auf das Seiende. Das unterscheidet sich von den Zugängen, die man gewohnheitsmäßig und in vergänglichen Vorstellungen hat, die aber keine Wahrheit in sich tragen.[87] Den Unterschied zwischen vergänglichen Meinungen und ewigen Wahrheiten findet man u.a. in PLATONS *Timaios*. PLATON bezieht ewige Wahrheiten auf das „Seiende“, vergängliche Meinungen auf das „Werdende“, zwei Termini, die eine große Rolle in PLATONS Ontologie spielen. Da, wo PLATON im *Timaios* über die Entstehung des Alls spricht, lässt er TIMAIOS die beiden oben genannten Begriffe kontrastieren:

> „Es ist nun meiner Meinung nach zuerst das Folgende zu unterscheiden: Was ist das immer Seiend, das kein Werden besitzt, und was das immer Werdende, das niemals ist? Das eine ist doch erfassbar durch das an der Vernunft orientierte Denken, da es immer mit sich selbst identisch ist, das andere hingegen ist durch auf vernunftlose Wahrnehmung bezogene Meinung erfahrbar, da es beständig entsteht und vergeht, aber niemals wirklich ist.“[88]

Zur Erklärung der *Dialektik* bei PLATON hat WILHELM RISSE ausgeführt, dass sie eine Theorie des Wissens darstellt, die durch Diskussion zwischen gegensätzlichen Meinungen entsteht.[89] Er nennt sie eine Disziplin, die *Analyse* und *Synthese* der Begriffe beinhaltet. Dabei weist er auf PLATONS Buch *Sophist* hin und bezeichnet wie HAGER als Hauptziel der Dialektik die Erkenntnis des Seienden, um die Ideen zu begreifen.

85. Ebd.
86. Ritter 1980, Sp. 1304.
87. Vgl. ebd.
88. *Tiamios*, 27d-28b
89. Vgl. Risse 1972, Sp. 164f.

Auch Armin Müller[90] sagt in diesem Zusammenhang, dass die Entstehung der *Dialektik* auf die Zeit von Parmenides und Zenon von *Elea* zurückzuführen ist. Als Grund für die Entwicklung der Dialektik nennt Müller das Bedürfnis nach einer Gesprächskunst, mittels derer man die komplizierten Theorien, die nicht durch einfache Gespräche vermittelt werden können, erläutern und verstehbar machen könnte. Er bezeichnet die Anwendung der Dialektik als „methodologische Zurüstung", mit deren Hilfe man damals versuchte, schwierige „theoretische" Ansichten nachvollziehbar zu machen und die hier auftretenden Interessenkonflikte zu beseitigen. Zenon wird von Müller als Erfinder dieser Methode dargestellt, wobei dieser zudem beabsichtigte, Parmenides Theorien zu erklären.

Dabei haben nicht nur die eleatischen Philosophen die dialektische Methode entwickelt und angewandt, sondern auch die Sophisten. Bei diesen ist sie eine Methode der rhetorischen Übung und der Vorbereitung der Anwendung von Rhetorik in der Praxis. Aus Müllers Sicht waren zwei Aspekte von Diálektos von besonderer Bedeutung: die dialektische Kunst und deren praktische Anwendung. Diese beiden Punkte waren die Ursache für das unterschiedliche Verständnis von Dialektik bei Platon und bei den Sophisten. Nach Ansicht der letzteren war Dialektik nur in verbaler Anwendung, d.h. im Streitgespräch, relevant, während für Platon die „sachliche Anwendung" im Sinne der Erkenntnis des Seienden im Vordergrund stand. Laut Müller stellte Platon für ein gelungenes dialektisches Gespräch das Einbeziehen von Rechtfertigung, auch als Forderung, als eine Bedingung.

Müller sieht die oben genannte Bedingung als Gründe dafür, dass Platon zwischen Dialektik und Eristik unterschied. Die Kunst des Widersprechens (ἀντιλογική τέχνη) bezieht sich anscheinend nur auf die Ansprüche, die im Diskurs niedergelegt sind. Dabei handelt es sich nach Müller hier lediglich um „Streit ερἶςειν um Worte, der sich in seiner Argumentation unfähig zeigt, den Sinn der Worte zureichend zu differenzieren."[91]

Die beiden oben genannten Eigenschaften der Dialektik bei Platon führten dazu, dass für ihn im Gegensatz zu den Sophisten nur die kritische Meinung des Gesprächspartners wichtig war, d.h., dass die unkritische Mehrheitsmeinung irrelevant ist. Müller nennt das Bestreben der Sophisten, anderen Menschen die Meinung durch verbale Ablenkung zu oktroyieren, „sophistische Verabsolutierung des Interesses" und meint, dass Platon ein „methodische Organon" entwickelt hat, um diesen Absichten entgegenzutreten. Da man dabei die Meinung der unkritischen Mehrheit nicht berücksichtigen sollte, müsste man zur Umsetzung des Organon eine gesellschaftliche Strukturierung in Form einer Hierarchie *in der Polis*, d.h. im

90. Vgl. A. Müller 1972, Sp. 167f.
91. A. Müller 1972, Sp. 167f.

Gemeinwesen, durchsetzen. Deswegen werde ich im Folgenden einen kurzen Blick auf den PLATONischen idealen Staat und die Rolle, die die Dialektik in ihm spielt, werfen. In der PLATONischen *Polis* sind Wächter zum Schutz des Gemeinwesens unerlässlich. Diese benötigen bestimmte Wissenschaften, um ihrer Aufgabe nachzukommen, dabei jedoch nicht nur solche Wissenschaften, die sie zur Ausführung ihrer täglichen Pflichten sowie zur Kriegsführung zum Schutz der *Polis* brauchen, sondern nach PLATON die herausragendste Wissenschaft, die für die Regelung und den Schutz der *Polis* erforderlich ist. Das Thema dieser Wissenschaft ist einerseits die „Idee des Guten“ (ἀγαϑον)[92], andererseits spielt diese Idee die Hauptrolle für das Sein, obwohl sie selbst über dem Sein steht.[93]

Um die Rolle der „Idee des Guten“ im Sein zu erklären, verwendet PLATON das Gleichnis der Sonne und der Helligkeit.[94] Den Prozess des Sehens unterscheidet er von den vier anderen Formen der Sinneswahrnehmung. Am Akt des Sehens ist eine Person, die des Sehen mächtig ist, beteiligt, sowie ein Objekt, das gesehen werden kann. Diese beiden Aspekte sind konstitutiv für alle Sinneswahrnehmungen. Was den Akt des Sehens von den anderen Wahrnehmungsformen unterscheidet, ist die Existenz von Helligkeit. Letztere erfordert eine Quelle, nämlich die Sonne. Deshalb ist die Existenz der Sonne für die Augen, um sehen zu können, und für das Objekt, um gesehen zu werden, notwendig. Aus diesem Grund ist die Sonne die Ursache des Sehens mittels der Augen und die Ursache für das Objekt, gesehen zu werden.[95] Daran anschließend vergleicht PLATON oben genannte Zusammenhänge mit dem „Sein“ und bezeichnet die Sonne als das Abbild der „Idee des Guten“ in der Schöpfung. PLATON sieht den Akt des Erkennens durch den erkennenden Geist so wie den Akt des Sehens durch die Augen des Betrachters, ebenso die Wahrheit des Erkennbaren so wie das zu sehende Objekt. In gleicher Weise braucht also der erkennende Geist, um die Wahrheit begreifen zu können, die „Idee des Guten“. D.h., die „Idee des Guten“ ist einerseits die Ursache des Erkennens, andererseits die Ursache der Wahrheit.[96] Nach PLATON ignoriert derjenige, der Dialektik betreibt, die Sinneswahrnehmungen und fokussiert sich nur auf die Kraft der Vernunft um mittels abstrakter Begriffe zum wahren Sein vorzudringen. Er müsste diese Arbeit fortsetzen, und um zur ultimativen Erkenntnis zu gelangen, müsste er bestrebt sein, die Essenz des Guten zu erfassen. Dies ist ähnlich wie im Sonnengleichnis

92. Vgl. *Politeia*, 505.
93. Vgl. *Politeia*, 509.
94. Vgl. *Politeia* 508f.
95. Vgl. ebd.
96. Wie man hier sieht, haben die Begriffe *Ursache* und *Wirkung* einen erweiterten Anwendungsbereich. Während *Kausalität* von KANT als ein Beispiel von *hypothetischer Relation* im Kontext der Physik dargestellt wird, benutzten PLATONisten das Begriffspaar, um die PLATONische Metaphysik zu beschreiben. Eine kurze Einführung in die PLATONistische Sichtweise der Kausalität findet sich im Appendix dieses Kapitels.

dargestellt, in dem der Betrachter dazu kommt, die Sonne selbst zu sehen. In dem Moment ist er beim Ursprung der Sehenswelt angelangt. [97]

Keine Wissenschaft kann zum Kern der Dinge vorstoßen.[98] Platon sagt, dass Künste und Wissenschaften mit Vorstellungen, Meinungen, Sehnsüchten verknüpft sind. Außerdem werden Wissenschaften etabliert, die dazu verwendet werden, Dinge zu errichten oder zu schützen. Die Wissenschaften, die dazu beitragen, dass wir uns dem Seienden nähern wie z.B. Geometrie oder Arithmetik, können nur ein vages Bild des Seienden schaffen. Das liegt daran, dass die Hypothesen für diese nicht begründet worden sind, weil sie nicht mittels der Dialektik tiefgründig in den Wissenschaften untersucht und gerechtfertigt werden können. Was mit solchen Hypothesen, die, wie gesagt, vage und unbekannt sind, seinen Anfang nimmt, behält diese Qualität des Vagen und Unbestimmtheit bis zum Schluss bei, da alles Weitere auf diesen aufbaut und zwangsläufig damit verwoben ist, und das kann man nicht Wissenschaft nennen.[99] Die dialektische Methode stellt alles in Frage, auch die Axiome, und geht dabei so tief, bis sie zum Anfang selbst gelangt. Auf diese Weise kann die Forschung, auf einem festen Fundament basierend, durchgeführt werden.[100] Um der Dialektik die ihr zustehende Bedeutung beizumessen, muss ein Dialektiker die Fähigkeit haben, das Wesentliche einer jeden Sache zu erklären. Wer dazu nicht in der Lage ist, hat darüber auch keine Erkenntnis.[101]

Platons Schüler Aristoteles hat jedoch das Konzept der *Methode* von einer ganz unterschiedlichen Perspektive untersucht. Die platonischen *Ideen*, die in Platons Charakterisierung der Dialektik eine zentrale Rolle spielen, haben in der aristotelischen Philosophie keinen Platz. Das Konzept der *Methode* wird jedoch in der *Logik* von Aristoteles ausführlich untersucht:

> „Sachlich hat Aristoteles in der Logik vor allem die Methoden der Induktion (ἐπαγωγή: Heranführung an das Allgemeine von einzelnen Fällen her) und der Definition (Begriffsbestimmung), welche er beide von Sokrates erstmals eingeführt glaubt, weiter ausgebildet, und neben der Lehre vom Urteil ganz besonders die Lehre vom apodiktischen Schließen, die Syllogistik, entwickelt.“[102]

Nach diesem Überblick über die Anwendung des Begriffs der Methode im Zeitalter des Sokrates mache ich einen zeitlichen Sprung von der Antike in die Moderne.

97. Vgl. *Politeia*, 532.
98. Vgl. *Politeia*, 533.
99. Vgl. ebd.
100. Vgl. ebd.
101. Vgl. *Politeia*, 534.
102. Hager 1980, Sp. 1305f.

Am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts machte Nelson die Konzeptualisierung und kritische Reflexion einer Methode und ihre Einbettung in eine pädagogische Methode zum Kern seiner Untersuchungen. Auch in seiner Methodologie nimmt Nelson einige fundamentale Differenzierungen vor, die er von Fries übernommen hat: Methoden sind entweder *progressiv* oder *regressiv*. Die Methode, die das Besondere unter das Allgemeine unterordnet, nennt Nelson progressiv.[103] Dagegen nennt er diejenige, die vom Besonderen zu dem Allgemeinen gelangt, regressiv.[104] Jede Wissenschaft ist ein logisches System, das auf ihren Grundsätzen – „die ihrerseits gesichert werden müssen"– mit Hilfe der logischen Folgerungen aufgebaut wird.[105] Ziel jeder Wissenschaft ist also, jede ihrer Aussagen auf ihre Grundsätze zurückzuführen und sie somit, nämlich die Aussagen, zu begründen. Der schwierige Teil der wissenschaftlichen Arbeit ist der regressive, in dem man nach Grundsätzen der Wissenschaft sucht, d.h., von speziellen Fällen zu allgemeinen Regeln gelangt und sich der Gültigkeit der allgemeinen Regeln vergewissert.[106] Nelson ist der Ansicht, dass die Mathematik im Vergleich mit anderen Wissenschaften einen Vorteil hat, nämlich dahingehend, dass ihre Grundsätze vollkommen klar und einleuchtend sind.[107] Für diese Kantisch-Hilbertische Behauptung paraphrasiert er in seinem Vortrag Hilbert, der seinerseits feststellt, dass „die mathematische Einsicht jedermann auf[zu]zwingen" sei.[108] Nelson kontrastiert Philosophie in diesem Zusammenhang mit der Mathematik. Philosophische Grundsätze sind nicht nur nicht „einleuchtende Wahrheiten", sondern sie sind in höchsten Maße dunkel, unsicher und umstritten.[109] Es ist möglich, dass man sich in der Praxis und in konkreten Situationen über diese „Sätze" einig ist, aber er betont, dass, wenn man diese „Sätze" abstrakt betrachtet, man in Verwirrung und „metaphysische Dunkelheit" gestoßen wird, aus der man sich nur mit Hilfe des „künstlichen Lichts" einer Methode befreien kann.[110] Deshalb ist seines Erachtens das Thema *Methode* eines der Hauptanliegen der Philosophen:

> „Unter diesen Umständen möchte man erwarten, daß das Problem der Methode bei niemanden so in dem Vordergrund des Interesses zu finden sei wie bei dem Philosophen. Doch ist zu bedenken, daß die eben angestellte Erwägung ihrerseits ja schon durch einen methodischen Gesichtspunkt bedingt ist, indem sie vor aller eigentlichen philosophischen Spekulation die Frage aufwirft nach dem Wesen der philosophischen

103. Vgl. Nelson 1970b, S. 14.
104. Vgl. ebd.
105. Vgl. Nelson 2002, S. 29 oder Nelson 1970b, S. 14.
106. Vgl. ebd.
107. Vgl. Nelson 2002, S. 29f.
108. Vgl. Nelson 2002, S. 29.
109. Vgl. Nelson 2002, S. 30.
110. Vgl. ebd.

> Erkenntnis, und durch diese Vorfrage erst Licht fällt auf die den eigentlichen Inhalt der Philosophie angehenden Probleme.“[111]

Nelson selbst versteht in diesem Zusammenhang als die wichtigste Aufgabe der Methode die Beleuchtung und Klärung der Prinzipien und Axiome. Er betrachtet hier den Einsatz von Logik als nicht zielführend. Seiner Meinung nach ist für einen Philosophen ansonsten auf allen Ebenen seiner Arbeit Logik unerlässlich. Die Erwartung aber, dass Logik an die Stelle der Methode treten kann, kann nicht erfüllt werden. Deshalb muss Methode unbedingt von Logik unterschieden werden.[112] Um die Frage, warum die wichtigste Aufgabe von *Methode* die Erhellung von Prinzipien und Axiomen ist, beantworten zu könne stellt sich eine weitere Frage, nämlich die, was Philosophieren nach Nelson bedeutet. Berücksichtigt an seine Vorstellung von Philosophie, muss man vor diesem Hintergrund herausfinden was seiner Meinung nach Arbeit im Bereich Philosophie darstellt. Nelsons Ziel ist, in dieser Disziplin wissenschaftlich zu arbeiten.[113] Wissenschaftlichkeit bedeutet laut Nelson, wie schon erwähnt, die Möglichkeit der Zurückführung jeder ihrer Aussagen auf ihre Grundsätze und deren Begründung. Da seines Erachtens philosophische Grundsätze das Umstrittenste und Dunkelste in der Philosophie sind, ist es nicht möglich, einfach mit diesen zu beginnen und mit Hilfe logischer Regeln *progressiv* zu philosophischen Sätzen zu gelangen. Klarheit findet man nur in auf den Einzelfall bezogenen Urteilen, die durch Beobachtung und durch verstandesmäßige Reflexion begrifflich geäußert werden. Es sind solche Urteile, die in den empirischen Wissenschaften und in der Lebenswirklichkeit anzutreffen sind.[114] Jedes dieser Urteile ist nun kritisch zu prüfen. In der Tat glaubt Nelson, dass jedes dieser Urteile, die durch Beobachtung zustande kommen, eine Erkenntnis beinhaltet, die selbst ein Prinzip voraussetzt.[115] Die Aufgabe der *Methode* ist nun, ausgehend von einem solchen Urteil, die darin versteckte Erkenntnis sichtbar zu machen und dadurch die angewandten Prinzipien zum Vorschein zu bringen. Erst dann wäre es möglich in der Philosophie wissenschaftlich zu arbeiten.[116] Die oben erwähnten Methode zur wissenschaftlichen Arbeit in der Philosophie nennt Nelson die *kritische*[117] oder die *Sokratische* Methode[118] und somit weist er auf ihren geschichtlichen Ursprung hin:

> „Diese Methode ist schon von Sokrates und Platon gefordert worden.

111. Nelson 2002, S. 30f.
112. Vgl. Nelson 2002, S. 30f.
113. Vgl. Nelson 2002, S. 24f.
114. Vgl. Nelson 2002, S. 30f.
115. Vgl. Nelson 2002, S. 32.
116. Vgl. Nelson 1970b, S. 14ff.
117. Vgl. Nelson 1970b, S. 16.
118. Vgl. Nelson 1917, S. 28f.

> Aber bereits ARISTOTELES hat die Sokratische Methode der Abstraktion unter der ἐπαγωγή mit der Induktion verwechselt. Dies Mißverständnis ist in der Geschichte stehengeblieben bis KANT. KANT hat zuerst die kritische Methode mit Bestimmtheit angewandt, in bewußtem Gegensatz zu dem progressiv-mathematischen Verfahren seiner deutschen wie zu dem induktiv-psychologischen seiner englischen Vorgänger.“[119]

Es war jedoch FRIES, der den „Kritizismus [...] mit voller Schärfe zuerst [...] gefordert und durchgeführt“ hat.[120] Die Bedeutung der Begriffe *kritische Methode* oder *Kritzismus* werde ich hier ausführlicher erörtern. Davor muss ich jedoch darauf hinweisen, dass NELSON *erstens* den Kritizismus als eine Art des Philosophierens ansieht, die ihren Ursprung in der Antike hat und sich diffrenzirter durch KANT und FRIES entwickelt hat. Um seinen Kritizismus und dessen Entwicklungsprozess zu beschreiben, schließt sich NELSON „in der Terminologie streng an den KANTischen Sprachgebrauch“[121] an. Ich habe die Untersuchung der kritischen Philosophie NELSONs mit seiner Rezeption von KANTs Theorie der Erfahrung[122] angefangen, um die KANTische Terminologie vorzustellen. Der Teil 2.1.1 hatte aber noch einen anderen Zweck, nämlich das, was NELSON von KANTs Abhandlungen in der Epistemologie umrisshaft darstellt, als ein Beispiel einer Anwendung der kritischen Methode vorzuführen. Bei der Beschreibung der kritischen Methode werde ich deswegen die Erläuterungen in 2.1.1 wieder aufgreifen. *Zweitens* erteilt NELSON der *Methode* die Hauptrolle im Kritizismus:

> „Es ist also der Kritizismus der Begriff einer *Methode* und nicht eines philosophischen Systems. Wer dieser *Methode* folgt, ist Kritiker, ganz unabhängig davon, zu welchen Resultaten er damit gelangen mag[.]“[123]

Was ich bisher dargelegt habe ist also, dass nach NELSON der Kritizismus aus einer Methode besteht, die zur Aufsuchung und Rechtfertigung der Prinzipien angewandt werden kann und weder progressiv noch induktiv ist.

Zwar haben die Induktion und die kritische Methode diese Gemeinsamkeit, dass sie beide regressiv sind, aber laut NELSON ist ihr Unterschied grundlegend. Er weist in verschieden Stellen auf ihre Gemeinsamkeit hin, da er der Meinung ist, dass sie der Grund für die Verwechslung der beiden Methoden ist. Ich werde hier in einem kurzen Exkurs die induktive Methode, wie sie von NELSON beschrieben

119. Nelson 1970b, S. 16f.
120. Vgl. Nelson 1970b, S. 38.
121. Nelson 1970b, S. 11.
122. S. 2.1.1.
123. Nelson 1970b, S. 37.

wurde, vorstellen, um danach die kritische Methode klarer davon unterscheiden zu können.

2.2.1 Die Induktion bei Nelson

Dass Aristoteles Sokrates als den Erfinder der *induktiven* Methode dargestellt hat, ist nach Nelson ein Fehler. Er charakterisiert diesen Fehler so, dass Aristoteles nur die *regressive* Methode der Induktion der *progressiven* Methode des Syllogismus entgegensetzt, und dabei übersieht er das, was Sokrates eigentlich im Sinne hatte, nämlich die *Kritik*[124], die ebenso regressiv ist. Der Fehler der „Entgegensetzung von Induktion und Deduktion [...] ist erst durch Apelts »Theorie der Induktion« verbessert worden.“[125] In seiner Methodologie bezieht Nelson sich öfters auf E. F. Apelt [126] , der selbst ein Nachfolger von Fries war. Nelson erklärt, dass Apelt

> „die Aristotelische Theorie des progressiven Syllogismus der *dogmatischen* Methode durch die Theorie des regressiven Syllogismus ergänzt und dadurch die *induktorische* Methode der Naturforschung philosophisch begründet hat.“[127]

Das ist der Grund, warum ich mich zur Erklärung der induktiven Methode auf Apelts Buch beziehe. In seiner Methodologie schließt sich Nelson sehr nah an Apelts Terminologie an. Apelt beginnt seine Abhandlung über Induktion mit der Beschreibung eines Schlusses:

> „Der Schluss (Syllogismus) ist die Ableitung eines Urtheils aus anderen Urtheilen.“[128]

Genauer kann man sagen:

124. Vgl. Nelson 1970b, S. 16f.
125. Nelson 1970b, S. 17. Hierbei ist zu beachten, dass in diesem Satz der Begriff „Deduktion“ nicht im Kantischen Sinne, sondern synonym mit dem „progressiven Syllogismus“ gemeint ist. „Deduktion“ im Kantischen Sinne wird später in 2.2.2 beschrieben.
126. Ernst Friedrich Apelt (1812-1859) war ein Philosoph, Unternehmer und ein Schüler von Fries. In seinem Buch „*Die Theorie der Induction*“, das im Jahr 1854 veröffentlicht wurde, hat Apelt die wissenschaftlichen Methoden nach Fries’ Epistemologie ausführlich aufgearbeitet. Sein Sohn, Otto Apelt (1845-1932), war der bekannte Philologe und Übersetzer von Platons Bücher. Er war auch neben Nelson einer der Gründer der *Neuen Friesschen Schule*.
127. Ebd.
128. Apelt 1854, S. 1.

> „Der Schluss ist ein Urtheil, in welchem ein Subject (der Unterbegriff, Terminus minor) [**S**] vermittelst eines Begriffes (des Mittelbegriffes, Terminus medius) [**M**] einem anderen Begriffe (dem Oberbegriff, Terminus major) [**P**] untergeordnet wird.“[129]

Dieses Urteil, das selber mindestens drei Urteile beinhaltet, kann so dargestellt werden[130]:

$$\begin{array}{cc} \text{Obersatz} & \text{M ist P} \\ \text{Untersatz} & \text{S ist M} \\ \cline{2-2} \text{Schlusssatz} & \text{S ist P} \end{array}$$

Da Laut Apelt ein Schluss eine Unterordnung eines Besonderen unter ein Allgemeines ist, sind zwei Fälle möglich. In dem ersten Fall ist das Allgemeine gegeben und man bestimmt aus diesem das Besondere. In diesem Fall haben wir einen *progressiven Schluss*. In dem zweiten Fall ist das Besondere gegeben und aus diesem soll sein Übergeordnetes erkannt werden. Dadurch erhalten wir einen *regressiven Schluss*.[131] Außerdem können Schlüsse danach geprüft werden, welche Art der *Relation* in ihnen zu finden ist, da sie selbst Urteile sind. Bei der Zusammenfassung der Urteilsformen bei Kant in 2.1.1 wurde erwähnt, dass durch die *Relation*, die das Verhältnis von Subjekt und Prädikat bestimmt, drei Arten von Urteilen unterschieden werden können. Abhängig davon, welche Art Verhältnis des Denkens in einem Urteil vorliegt, kann es in einer dieser Klassen untergeordnet werden.[132]:

1. *Kategorisch:* „das des Prädicats zum Subject.“[133]
2. *Hypothetisch:* „das des Grundes zur Folge.“[134]
3. *Divisiv:* „das der Theile zum Ganzen.“[135]

Divisive Urteile können selbst in zwei Arten unterteilt werden[136]:

- „*Conjuctive* Urtheile setzen den Inhalt eines Begriffes aus dem Inbegriff seiner wesentlichen Merkmale zusammen“.[137]

129. Apelt 1854, S. 3.
130. Ebd.
131. Vgl. Apelt 1854, S. 5.
132. Vgl. Apelt 1854, S. 5.
133. Ebd.
134. Ebd.
135. Ebd.
136. Vgl. Apelt 1854, S. 15.
137. Ebd.

- „*Disjunctive* Urtheile geben die Eintheilungsglieder an, die den Umfang eines Begriffes ausfüllen“.[138]

Da die Schlüsse Unterordnungen von besonderen unter allgemeine Urteile sind, können sie selber gemäß der Unterteilung bei den Urteilen klassifiziert werden.[139] Die Klassen von Schlüssen tragen dieselben Namen wie bei den Urteilen, nämlich *kategorisch*, *hypothetisch* und *divisiv*. Divisive Schlüsse werden auch wie die Urteile in zwei Arten, nämlich *conjuktive* und *disjunctive* unterteilt.[140] Verschiedene Arten der Schlüsse werden von Apelt so definiert:

1. *Kategorischer Schluss*: „Ein Prädicat wird von einem Subjecte auf das andere übertragen nach dem Dictum de Omni et Nullo, d.h. das eine Subject steht in der Sphäre des andern.“[141]

2. *Hypothetischer Schluss*: Sie schliessen „von der Giltigkeit einer Behauptung auf die Giltigkeit einer andern Behauptung, von der Giltigkeit des Grundes auf die Giltigkeit der Folge. Hier gelten die beiden Regeln:

   (1) Wenn der Grund gesetzt ist, so ist auch die Folge gesetzt.[...]

   (2) Wenn die Folge aufgehoben ist, so ist der Grund aufgehoben.“[142]

3. Von den *divisiven* Schlüssen werde ich nur den *disjunktiven* betrachten, da der *konjuktive* Schluss keine Rolle bei der Induktion spielt. „Disjunktiver Schluss kommt ebensowohl unter kategorischer wie unter hypothetischer Form vor. Ihre Regeln sind:

   (1) für die kategorische Form: Was von den Theilen einer Sphäre gilt, das gilt auch von dem Begriff selbst, in dessen Sphäre diese Theile stehen und

   (2) für die hypothetische Form: Wenn alle Folgen eines Grundes Statt finden, so findet dieser selbst Statt; findet hingegen nur eine nicht Statt, so findet auch der Grund nicht Statt.“[143]

138. Ebd.
139. Vgl. Apelt 1854, S. 5.
140. Vgl. Apelt 1854, S. 15.
141. Ebd. S. 6.
142. Ebd. S. 10f.
143. Ebd. S. 17.

Nach Apelt ist die *Induktion* ein *disjunktiver Schluss*.[144] Er gibt dafür unter anderem die folgenden Beispiele.

In der kategorischen Form:

> „Obersatz:
> Das Sonnensystem besteht aus der Sonne und den Planeten: Merkur, Erde, Mars, den Asteroiden, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun.
>
> Untersätze:
> Merkur bewegt sich von Abend gegen Morgen um die Sonne.
> Venus bewegt sich in der selben Richtung um die Sonne u.s.w.
>
> ---
>
> Schlusssatz:
> Alle Planeten bewegen sich von Abend gegen Morgen um die Sonne."[145]

Hierbei ist der Unterbegriff [S] *das Ganze* der Planeten im Sonnensystem, der Mittelbegriff [M] Glieder dieses Ganzes und der Oberbegriff [P] im Schlusssatz, das in den beiden Untersätzen auch vorkommt.[146] Apelt weist bei diesem Beispiel auf folgendes Charakteristikum der Induktion hin:

> „Bei der Induction wird also ein ganz neuer Oberbegriff durch die sogenannten Untersätze hinzugebracht und im Schlusssatz daraus eine neue Regel gebildet, die in den Prämissen nicht vorkam."[147]

In der hypothetischen Form:

In dieser Form der Induktion wird die Ursache/Wirkung- oder Grund/Folge-Relation zwischen den Begriffen überprüft und manchmal verallgemeinert:

> „Die Induction unter hypothetischer Form schliesst von der Allheit (oder wenn sie unvollständig ist von der Vielheit) der Folgen auf das Dasein des Grundes und von der Nichtigkeit Einer Folge auf die Nichtigkeit des Grundes. Das glänzendste Beispiel dafür in der Geschichte der inductiven Wissenschaften ist die astronomische Induction Newtons."[148]

Gemeint ist damit das folgende Beispiel in seiner logischen Form:

144. Ebd.
145. Ebd. S. 17.
146. Vgl. ebd.
147. Ebd.
148. Ebd. S. 23.

> „Obersatz:
> Die Planeten bewegen sich nach den drei Kepplerschen Gesetzen um die Sonne: [...]
>
> Untersätze:
> Das erste Gesetz, das der Gleichheit der Flächenräume mit den Zeiten, zeigt an, dass die Centralkraft, welche den Planeten stetig von der Tangente seiner Bahn abbiegt, ihren Sitz in der Sonne hat.
> Das zweite lässt erkennen, dass diese Kraft im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkt.
> Das dritte endlich giebt zu erkennen, dass dies Gesetz der Wirksamkeit der Kraft nicht bloss im Umlauf des einzelnen Planeten, sondern von Bahn zu Bahn gilt.
>
> ---
>
> Schlusssatz:
> Die Planeten werden von einer Kraft der Sonne angezogen, die mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt.“[149]

Dabei ist der Unterbegriff [S] das *Phänomen* der *Planetenbewegung. Die drei Gesetze* KEPPLERs, als *die Folgen* der Gravitationsregel, bestimmen den Mittelbegriff [M] und *die Gravitation* als *der Grund* ist der Oberbegriff [P].[150]

Zusammenfassend legt APELT die Methode der Induktion wie folgt dar:

> „Das Wesen der disjunctiven Schlussart oder der Induction besteht darin, dass sie durch die Beobachtung irgend ein Merkmal mit den Eintheilungsgliedern einer Sphäre verknüpft, diese Glieder dann sammelt und das Merkmal auf die ganze Sphäre überträgt. Dies Verfahren setzt offenbar voraus, dass man die ganze Sphäre übersieht d. i. dass man alle Glieder der Eintheilung vollständig aufzählen kann. Das letztere wird nun nicht immer der Fall sein. Oefters wird es sich treffen, dass man wohl einen Theil der Sphäre übersieht, eine gewisse Anzahl von Fällen kennt, aber die Kenntnis aller Fälle, der Ueberblick über das Ganze fehlt oder kann nicht erlangt werden. Nichtsdestoweniger werden aus solchen unvollständigen Disjunctionen zahllose Schlüsse gebildet in der Wissenschaft wie im Leben.“[151]

Das ist wiederum der Grund, warum er den Begriff *wahrscheinliche Erkenntnis* vorstellt:

149. Ebd. S. 23f.
150. Vgl. ebd.
151. Ebd. S. 34.

> „Durch die unvollständige Induction d.i. durch die Unvollständigkeit der Disjunction einer Sphäre kommt die Wahrscheinlichkeit in unsere Erkenntnis. Auf diesem Felde ist es, wo das Reich der Wahrheit an das Gebiet des Irrthums grenzt. Wahrscheinlich ist eine Erkenntnis, welche nicht volle Gewissheit hat, für welche es aber dennoch überwiegende Gründe gibt."[152]

Dieser Terminus kommt bei NELSON in dieser Form nicht vor. Er verwendet jedoch den Terminus *Wahrscheinlichkeitsschluss* und erläutert:

> „Die unvollständige Induktion beruht stets auf einem Wahrscheinlichkeitsschluss."[153]

Hierbei verweist er auf den von APELT erwähnten Punkt über die Gewissheit von Urteilen, die durch unvollständige Induktion erzielt werden.

2.2.2 Die kritische Methode bei Nelson

Laut APELT und NELSON gibt es also zwei Arten des Schließens: 1. *Progressives Schließen*, in dem ausgehend von allgemeineren Urteilen (wie z. B. Axiomen oder Postulaten) spezifischere Urteile abgeleitet werden. Diese Art des Schließens findet man beispielsweise in EUKLIDS *Elementen*. 2. *Regressives Schließen*, in dem allgemeinere Urteile aus spezifischeren Urteilen konkludiert werden. Die *Induktion* ist so ein Schluss. APELT und NELSON behaupten jedoch, dass es eine andere regressive Methode gibt, die kein Schluss ist:

> „Abstraction sowohl wie Induction ist ein regressiver Gedankengang d.h. ein Rückgang vom Besonderen zum Allgemeinen. Aber die Art des Regressus vom Besondern zum Allgemeinen ist bei dem einen und bei dem andern Verfahren gänzlich verschieden. Die Induction geht durch B e w e i s e, die Abstraction durch Z e r g l i e d e r u n g rückwärts."[154]

Wie oben erwähnt verweist NELSON auf diesen Unterschied in einem historischem Kontext und erläutert, dass ARISTOTELES „die Sokratische Methode der Abstraktion unter der ἐπαγωγή mit der Induktion verwechselt".[155] Diese Verwechslung hat aber eine erkenntnistheoretische Folge:

152. Ebd. S. 36.
153. Nelson 2004c, S. 79.
154. Apelt 1854, S. 56.
155. Nelson 1970b, S. 16.

> „Indem ARISTOTELES durch diese Verwechslung veranlaßt wurde, die Induktion als die regressive Methode dem συλλογισμός entgegenzusetzen, blieben ihm als ursprüngliche Erkenntnisquellen nur die Logik und die Empirie. Er übersah so die Leerheit der formalen Logik einerseits und die Unselbständigkeit der bloßen Empirie andererseits."[156]

Die drei erkenntnistheoretischen Punkte, die in diesem Zitat genannt wurden, bilden den epistemologischen Grund für den Unterschied zwischen der Induktion und der kritischen Methode: 1. Die Frage nach der Existenz anderer *Erkenntnisquellen* außer *Logik* und *Empirie*. 2. Die Ohnmacht der *Logik*, die die *Formalität* als ein Charakteristikum trägt, über den Inhalt der Grundsätze und demnach über den Inhalt seiner Aussagen etwas zu sagen und neue Erkenntnis geben, die nicht in den Grundsätzen vorkommt. 3. Die Untauglichkeit der *Empirie* die Möglichkeit und die Gültigkeit ihrer Erkenntnisse selber ohne Weiteres nachzuweisen. Alle drei Punkte sind zentrale Themen in der *Transzendentalphilosophie* und wurden in 2.1.1 besprochen. Hier werde ich sie wieder aufgreifen und ihr Verhältnis zu der kritischen Methode aufzeigen. Dafür erkläre ich zunächst wie NELSON angelehnt an KANT und FRIES verschiedene Arten der wissenschaftlichen Methoden darlegt. Eine Einteilung der Methoden bei NELSON, nämlich *progressiv* und *regressiv*, und ein Beispiel für regressive Methoden, nämlich die *Induktion*, wurden besprochen. Im folgendem Zitat beschreibt er die Einteilung der Methoden nochmals anders:

> „Nennen wir [...] *dogmatisch* das Verfahren einer Wissenschaft, die von der Aufstellung ihrer Prinzipien ausgeht, *kritisch* das Verfahren einer Wissenschaft, die auch ihre Prinzipien einer Prüfung unterwirft, so werden wir sagen können, daß für die Philosophie alles auf ein kritisches Verfahren ankomme und daß der Kritizismus in der Philosophie in der Befolgung der regressiven Methode bestehe."[157]

Es ist klar, dass die *dogmatischen* Methoden progressiv und die *kritischen* Methoden regressiv sind. Das kritische Verfahren wird erstens zur *Begründung* der Urteile und zweitens zur *Aufweisung* der *Grundsätze* gebraucht. Im letzteren Fall nennt NELSON die Methode die *regressive Methode der Abstraktion*.[158] Hier ist zu beachten, dass ein Grundsatz eine mittelbare Erkenntnis ist (s. 2.1.3). NELSON beansprucht bei einem Grundsatz seine Wahrheit. Er ist selbst ein Urteil und auf einer unmittelbaren Erkenntnis begründet, die kein Urteil sein kann. Außerdem ist die *regressive Methode der Abstraktion* von der *Induktion* zu unterscheiden. Später wird dieses Thema ausführlicher behandelt.

156. Nelson 1970b, S. 17.
157. Nelson 1970b, S. 14.
158. Nelson 1970b, S. 15ff.

Schon in dem Begriff des Urteils steckt nach NELSON der Bedarf nach einer Begründung:

> „Ein Urteil ist nämlich niemals an und für sich gewiß, sondern kann nur gewiß werden dadurch, daß es sich auf eine Erkenntnis gründet, die ihrerseits kein Urteil ist. Das Urteil beruht auf einer an sich willkürlichen Verbindung von Begriffen, von Vorstellungen also, die ihrerseits problematisch sind und nichts behaupten. Ein Urteil ist die Behauptung, daß einer solchen an sich willkürlichen Verbindung von Begriffen etwas wirkliches entspricht."[159]

Ferner ist das begründete Urteil eine *mittelbare Erkenntnis*.[160] Die Begründung des Urteils kann abhängig davon, von welcher Art die ihm zugrunde liegende Erkenntnis ist, in drei Wegen ausgeführt sein:

> „Es gibt [...] drei Arten der Begründung: Beweis, Demonstration und Deduktion."[161]

Die dem Urteil zugrunde liegende Erkenntnis kann selbst entweder *mittelbar* oder *unmittelbar* sein. In dem ersten Fall ist die Begründung ein *Beweis*.[162] D. h. in einem Beweis ist der Grund für das begründete Urteil selbst ein Urteil. Wenn eine unmittelbare Erkenntnis hingegen zur Begründung des Urteils aufgewiesen ist, nennt NELSON die Begründung:

- *Demonstration*, falls die unmittelbare Erkenntnis eine *empirische* oder *reine Anschauung* ist.[163]
- *Deduktion*, falls der Grund des Urteils nicht anschaulich ist;

  > „d. h. die [ihm] zugrunde liegende unmittelbare Erkenntnis kommt uns nicht unmittelbar, sondern *nur* durch Vermittlung der Reflexion, *nur* durch das Urteil zum Bewußtsein."[164]

In den oben genannten Definitionen sind die *empirische Anschauung* und die *Logik*, wie schon erwähnt, als Erkenntnisquellen auch bei ARISTOTELES zu finden. Die *reine Anschauung* und die – nicht-anschaulichen – *synthetischen* Erkenntnisse, auf die in der Definition von *Deduktion* hingewiesen wird, sind dagegen die Erkenntnisquellen, die zuerst von KANT vorgestellt wurden. Der Begriff *unmittelbare Erkenntnis*,

159. Nelson 1917 S. 49.
160. S. 2.1.3.
161. Nelson 1970b, S. 27.
162. Vgl. Nelson 1970b, S. 22.
163. Vgl. Nelson 1970b, S. 25.
164. Nelson 1970b, S. 26.

der auch eine zentrale Rolle in den Definitionen spielt, kommt explizit erst bei Fries vor. Diese drei charakteristischen epistemologischen Elemente der *kritischen* Methode bilden den Grund für den Unterschied zwischen der Nelsonschen und der Aristotelischen Methodologie. Im folgenden Zitat erklärt Nelson wie das selbst dazu führt, dass seine Methodologie sich auch von der logizistischen und empiristischen unterscheidet:

> „[Aristoteles] übersah [...] die Leerheit der formalen Logik einerseits und die Unselbständigkeit der bloßen Empirie andererseits. Dadurch ist er gemeinsamer Vater der beiden entgegengesetzten Irrtümer in der Geschichte der Wissenschaft geworden: der Begründer des logischen Dogmatismus in der Philosophie sowohl als auch der Begründer des naturwissenschaftlichen Empirismus, d. h. der irrigen Lehre von der Selbständigkeit der Induktion *neben* dem Syllogismus, der sich die meisten Naturforscher der neueren Zeit angeschlossen haben und die am hartnäckigsten von den englischen Philosophen verteidigt worden ist. Es ist dies derselbe Fehler, auf dem die noch heute in der Logik populäre Entgegensetzung von Induktion und Deduktion beruht.“[165]

Um die oben definierten Methoden, die von Nelson unter der *kritischen* Methode eingeordnet sind, und ihren Bezug auf die drei genannten Elemente darstellen zu können, greife ich zunächst den Inhalt von Teil 2.1.1 dieser Arbeit auf. In dem genannten Teil ist lakonisch dargestellt, wie Kant aus Sicht Nelsons die *kritische* Methode in seiner *Transzendentalphilosophie* anwendet. Der Begriff *transzendental* weist laut Nelson auf „die Untersuchung des Grundes der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori“.[166] Die *kritische* Methode wurde also beispielsweise von Kant angewandt, um die Möglichkeit der synthetischen Urteile a priori, die den Grund für die Möglichkeit der Erfahrung bilden, zu begründen. Die Durchführung des kritischen Verfahrens wurde in zwei Hauptaufgaben aufgeteilt.[167]:

> „[Kant] nannte [die] Aufsuchung der Prinzipien durch logische Zergliederung der mit dem Anspruch auf Apodiktizität auftretenden Urteile und Beurteilungen *Grundlegung* oder auch *metaphysische Erörterung* und unterschied sie noch von der *transzendentalen Deduktion* der Prinzipien, die sich mit ihrem Rechtsnachweis beschäftigt.“[168]

Hierbei sind zwei Punkte zu beachten: 1. Diese Aufteilung der kritischen Methode ist auch bei Fries und Neslon zu finden. Sie verwenden jedoch den Terminus

165. Nelson 1970b, S. 17.
166. Nelson 1970b, S. 41.
167. Nelson 1970b, S. 17.
168. Ebd.

regressive Methode der Abstraktion oder einfach *Abstraktion* statt *metaphysische Erörterung*[169], und *Deduktion* statt *transzendentale Deduktion.*[170] 2. Die von Kant gegebene Beschreibung der *metaphysischen Erörterung* ist nicht so klar ausgedrückt wie bei Nelson:

> „*Ich verstehe aber unter Erörterung (expositio) die deutliche (wenn gleich nicht ausführliche) Vorstellung dessen, was zu einem Begriffe gehört; metaphysisch aber ist die Erörterung, wenn sie dasjenige enthält, was den Begriff als a priori gegeben, darstellt.*“[171]

Der Terminus „*transzendentale Erörterung*“ nichtsdestoweniger hat ähnliche Bedeutung für Kant:

> „*Ich verstehe unter einer transzendentalen Erörterung die Erklärung eines Begriffs, als eines Prinzips, woraus die Möglichkeit anderer synthetischer Erkenntnisse a priori eingesehen werden kann. Zu dieser Absicht wird erfordert, 1) daß wirklich dergleichen Erkenntnisse aus dem gegebenen Begriffe herfließen, 2) daß diese Erkenntnisse nur unter der Voraussetzung einer gegebenen Erklärungsart dieses Begriffs möglich sind.*“[172]

Bei beiden Arten der Erörterung wird von einer *Analyse* oder *Zergliederung* eines Begriffs ausgegangen, um seinen Inhalt zu beschreiben.[173] Der einzige Unterschied der *transzendentalen*- von der *metaphysischen* ist offenbar, dass dabei die erörtete Grundbegriffe – wie z.B. Raum – als der Grund für die Möglichkeit der synthetischer Erkenntnisse a priori – wie z.B. Geometrie – dargestellt werden.[174] Daniel Dohrn verweist jedoch auf die „Verständnisschwierigkeiten der Unterscheidung von metaphysischer und transzendentaler Erörterung“ und ebenso auf die Möglichkeit,

> „dass die Erörterung nicht immer eine bloße Begriffsanalyse ist, zumal sie ja im Hinblick auf synthetische Erkenntnisse geschieht, sondern vielleicht selbst schon synthetische Urteile umfasst, weil der jeweilige Begriff im Fall der transzendentale Erörterung mit je verschiedenen anderen Begriffen zusammen analysiert wird, die sich im Kontext einer transzendentalen Untersuchung ergeben, um daraus Schlüsse zu ziehen.“[175]

169. Vgl. Brandt 2002 S. 69f u. Nelson 1970b, S. 17ff.
170. Vgl. Elsenhans 1906 S. 173f, Brandt 2002 S. 89f u. Nelson 1970c, S. 114.
171. *KrV*, B 38.
172. *KrV*, B 40.
173. Vgl. Dohrn 2015, S. 564.
174. Vgl. ebd.
175. Ebd.

Auch NELSON weist darauf hin, dass die *transzendentale Erörterung* sich auf synthetische Urteile beziehen kann.[176] Basierend auf diesen Erklärungen könnte vermutet werden, dass die „*transzendentale Erörterung*“ – besonders in der Theorie der Erfahrung – besser die von NELSON gegebene Beschreibung der „*metaphysischen Erörterung*“ entspricht. Folgende Aussage von KANT ist ein weiterer Hinweis auf die eben erwähnte Behauptung:

> „Der Teil der transzendentalen Logik also, der die Elemente der reinen Verstandeserkenntnis vorträgt, und die Prinzipien, ohne welche überall kein Gegenstand gedacht werden kann, ist die transzendentale Analytik, und zugleich eine Logik der Wahrheit.“[177]

Im „1. Hauptstück“ der „Analytik der Begriffe“, nämlich „Von dem Leitfaden der Entdeckung aller reinen Verstandesbegriffe“, stellt KANT die Tafel der „Kategorien“ dar. Ebenda führt er eine genauere Beschreibung der „*transzendentalen Analytik*“ aus, die der Charakterisierung der „*transzendentalen Erörterung*“ affin ist und die oben erwähnte Behauptung unterstützt:

> „Diese Analytik ist die Zergliederung unseres gesamten Erkenntnisses a priori in die Elemente der reinen Verstandeserkenntnis. Es kommt hiebei auf folgende Stücke an. 1. Daß die Begriffe reine und nicht empirische Begriffe sein. 2. Daß sie nicht zur Anschauung und zur Sinnlichkeit, sondern zum Denken und Verstande gehören. 3. Daß sie Elementarbegriffe sein und von den abgeleiteten, oder daraus zusammengesetzten, wohl unterschieden werden. 4. Daß ihre Tafel vollständig sei, und sie das ganze Feld des reinen Verstandes gänzlich ausfüllen.“[178]

Trotz dieser Ausführungen kann man, wenn von den Namen, die KANT für die verschiedenen Stufen seiner Kritik angewendet hat, abgesehen wird, seine Methodologie ähnlich zu dem, was NELSON erwähnt hat, als ein zweistufiges Verfahren darlegen. THEODOR ELSENHANS Philosoph, Theologe und ein Zeitgenosse NELSONs gibt so eine Darlegung in seiner Habilitationsschrift „Das KANT-FRIESsche Problem“[179]:

> „Das Verfahren Kants in den drei Kritiken, so wie er es selbst methodologisch aufgefaßt wissen will, zerfällt also stets in zwei Stadien,

176. Vgl. Nelson 1970c, S. 122.
177. *KrV*, B 87.
178. *KrV*, B 89.
179. Ich werde hier an die vervollkommnete Version der Habilitationsschrift, die in 1906 erschienen wurde Elsenhans 1906 verweisen. NELSON bezieht sich in seiner Doktorarbeit Nelson 1970c jedoch oft auf die primäre Version der Habilitationsschrift von 1902.

> deren erstes die Aufzeigung und Darstellung des Apriori in seiner Verschiedenheit von allem Empirischen entspricht, während im zweiten die Rechtfertigung der allgemein-notwendigen Giltigkeit gegeben wird.“[180]

Wie oben erwähnt, nennt NELSON das erste Stadium *regressive Methode der Abstraktion* oder *Abstraktion* und das zweite *Deduktion*. In Bezug auf *Abstraktion* stellt sich nun folgende Frage: was erlangt man durch *Abstraktion* und wie wird diese Methode konkret durchgeführt? Die Resultate einer *Abstraktion* sind:

> „Neue Wahrheiten nur insofern, als wir die Wahrheit der Daten, von denen unsere Zergliederung ausging, voraussetzen. Denn wenn auch die Grundsätze von den Konsequenzen, durch deren Zergliederung wir sie aufweisen, logisch abhängig sind, so bleibt doch unsere Aufweisung derselben von ihren Konsequenzen abhängig.“[181]

Der Prozess der *Abstraktion* besteht also im Aufsuchen des Wissens, an dessen Wahrheit es keinen Zweifel gibt. Sie werden dann als Prinzipien oder Grundsätze in einem logischen System verwendet. Dieses Charakteristikum der *Abstraktion* zeigt auch einen Unterschied zwischen ihr und der *Induktion*. Wie oben erwähnt wurde, erlangt man durch (unvollständige) *Induktion* nur Lehrsätze, die höchstens wahrscheinlich sind. Außerdem ist die *Induktion* ein regressiver Schluss, während der Prozess der *Abstraktion* aus Zergliederung oder Idealisierung besteht, die die Existenz einer Wahrheit voraussetzt und bezweckt sie aufzuweisen. Der Grund der Möglichkeit dieses Prozesses ist das *Prinzip der Selbstvertrauen der Vernunft* oder die *formale Apperzeption*. Ohne das Prinzip, das eine Übernahme der PLATONischen *Anamnesis-Lehre* ist[182], wäre das Verfahren der *Abstraktion* „willkürlich“. Im folgendem Zitat, in dem NELSON die *Abstraktion* als eine *Idealisierung* darlegt, rechtfertigt er, warum er wie KANT und FRIES die Apodiktizität der Resultate dieses Verfahrens voraussetzt:

> „In der Tat setzt jede Idealisierung ein Ideal voraus, das die Art des Vorgehens regelt. Ohne das Ideal würde der Idealisierung die Norm fehlen, und sie wäre willkürlich. Wäre sie aber willkürlich, so könnte sie keinen Anspruch auf strenge Genauigkeit und Allgemeingültigkeit erheben. Denn wir hätten keine Gewähr, daß, wenn wir uns einmal auf die Idealisierung eingelassen haben, diese unbegrenzt im Einklang mit unseren immer genauer werdenden Beobachtungen bleiben würde. Sie wäre vielmehr ihrerseits einer ständigen Berichtigung unterworfen. Die

180. Elsenhans 1906, S. 173.
181. Nelson 1970b, S. 17f.
182. S. 2.1.3.

> Idealisierung setzt also eine Erkenntnis voraus, die sowohl von unseren Beobachtungen als auch von unserem Willen unabhängig ist.“[183]

Diese Idealisierung, die den Übergang des Konkreten zum Idealen beschreibt, kann im Kontext der Anschauung oder des Begrifflichen stattfinden. Im anschaulichen Kontext ist sie der Übergang von empirischer zu reiner Anschauung.[184] In seinem Vortrag „die Sokratische Methode“ beschreibt Nelson das Verfahren im begrifflichen Kontext in aller Kürze. Die Beschreibung stellt auch eine kurze Antwort zu der zweiten Frage, nämlich „wie wird *Abstraktion* konkret durchgeführt?“, dar:

> „Stellen wir die Frage nach den Bedingungen [der] Möglichkeit [von Erfahrungsurteilen], so stoßen wir auf allgemeinere Sätze, die den Grund der gefällten Einzelurteile bilden. Wir gehen durch Zergliederung zugestandener Urteile zurück zu ihren Voraussetzungen. Wir verfahren regressiv, indem wir von den Folgen zu den Gründen aufsteigen. Bei diesem Regress abstrahieren wir von den zufälligen Tatsachen, auf die sich das Einzelurteil bezieht, und heben durch diese Absonderung die ursprünglich dunkle Voraussetzung heraus, auf die jene Beurteilung des konkreten Falles zurückgeht. Die regressive Methode der Abstraktion, die zur Aufweisung der philosophischen Prinzipien dient, erzeugt also nicht neue Erkenntnisse, weder von Tatsachen noch von Gesetzen. Sie bringt nur durch Nachdenken auf klare Begriffe, was als ursprünglicher Besitz in unserer Vernunft ruhte und dunkel in jedem Einzelurteil vernehmlich wurde.“[185]

Die von Nelson gegebene Definition der *Deduktion*[186] ist auch eine Übernahme von Kant. Im Gegensatz zu Kant teilt Nelson sie jedoch nicht in verschiedene Arten auf. Zwei Eigenschaften dieser Methode sind für Nelson zentral, nämlich, dass sie erstens eine *Begründungsmethode* ist, und dass man sie zweitens zur Begründung *metaphysischer* und *mathematischer* Grundsätze anwenden kann[187], Kant aber liefert zunächst eine allgemeine Beschreibung der *Deduktion*. Dazu greift er rechtswissenschaftliche Termini auf:

> „Die Rechtslehrer, wenn sie von Befugnissen und Anmaßungen reden, unterscheiden in einem Rechtshandel die Frage über das, was Rechtens ist (quid iuris), von der, die die Tatsache angeht (quid facti); und indem sie von beiden Beweis fordern, so nennen sie den erstem, der die Befugnis

183. Nelson 1970a, S. 173f.
184. Vgl. Nelson 1970a, S. 174. Eine ausführlichere Beschreibung dieses Verfahrens kommt in 2.3
185. Nelson 2002, S. 33.
186. S. o.
187. Vgl. Nelson 1970b, S. 37.

> oder auch den Rechtsanspruch dartun soll, die Deduktion. Wir bedienen uns einer Menge empirischer Begriffe ohne jemandes Widerrede und halten uns auch ohne Deduktion berechtigt, ihnen einen Sinn und eingebildete Bedeutung zuzueignen, weil wir jederzeit die Erfahrung bei Hand haben, ihre objektive Realität zu beweisen. Es gibt indessen auch usurpierte Begriffe, wie etwa Glück, Schicksal, die zwar mit fast allgemeiner Nachsicht herumlaufen, aber doch bisweilen durch die Frage: quid iuris, in Anspruch genommen werden, da man alsdann wegen der Deduktion derselben in nicht geringe Verlegenheit gerät, indem man keinen deutlichen Rechtsgrund weder aus der Erfahrung, noch der Vernunft anführen kann, dadurch die Befugnis ihres Gebrauchs deutlich würde.“[188]

Die Aufteilung der Arten der *Deduktion* ist parallel zu der der Arten der *Erörterung*: *Deduktion* auch kann entweder *transzendentale* oder *metaphysische* sein. Es gibt jedoch zusätzlich noch eine Art der *Deduktion*, nämlich die *empirische*:

> „Ich nenne daher die Erklärung der Art, wie sich Begriffe a priori auf Gegenstände beziehen können, die transzendentale Deduktion derselben, und unterscheide sie von der empirischen Deduktion, welche die Art anzeigt, wie ein Begriff durch Erfahrung und Reflexion über dieselbe erworben worden, und daher nicht die Rechtmäßigkeit, sondern das Factum betrifft, wodurch der Besitz entsprungen.“[189]

Metaphysische Deduktion allerdings wird von KANT nur ein Mal in der Kritik der reinen Vernunft erwähnt[190]:

> „*In der metaphysischen Deduktion wurde der Ursprung der Kategorien a priori überhaupt durch ihre völlige Zusammentreffung mit den allgemeinen logischen Funktionen des Denkens dargetan, in der transzendentalen aber die Möglichkeit derselben als Erkenntnisse a priori von Gegenständen einer Anschauung überhaupt (§§ 20. 21.) dargestellt.*“[191]

Die *transzendentale Deduktion* wird selbst von KANT in zwei Arten aufgeteilt: *subjektive* und *objektive*.

188. *KrV*, B 116f.
189. *KrV*, B 117.
190. Vgl. Nelson 1970c, S. 120.
191. *KrV*, B 159.

> „Diese Betrachtung, die etwas tief angelegt ist, hat aber zwei Seiten. Die eine bezieht sich auf die Gegenstände des reinen Verstandes und soll die objektive Gültigkeit seiner Begriffe a priori dartun und begreiflich machen... Die andere geht darauf aus, den reinen Verstand selbst, nach seiner Möglichkeit und den Erkenntniskräften, auf denen er selbst beruht, mithin ihn in subjektiver Hinsicht zu betrachten.“[192]

Die *objektive Deduktion* untersucht die Frage[193] „Was und wieviel kann Verstand und Vernunft, frei von aller Erfahrung, erkennen?“[194] Die *subjektive* dagegen untersucht die Frage „Wie ist das *Vermögen zu Denken* selbst möglich?“[195] In seiner Doktorarbeit untersucht und vergleicht Nelson die Arten der *Deduktion* bei Kant. Dabei weist er auf die Schwierigkeit der „genaue[n] Bestimmung des Begriffs der transzendentalen Erörterung oder Deduktion“[196] hin. Die *transzendentale Erörterung* kann erstens sich sowohl auf Begriffe als auch auf „anderer synthetischer Erkenntnisse a priori“ beziehen.[197] Zweitens ist die *Unterscheidung* der *transzendentalen Erörterung* von der *transzendentalen Deduktion* nicht klar.[198] Nelson verweist auf das Beispiel der *transzendentalen Erörterung* des Raumes, nämlich „die Erklärung der Raumanschauung als des Prinzips der Möglichkeit der Geometrie“, die auch die „transzendentale Deduktion der Geometrie“ darstellt.[199] Die Unterscheidung des *Inhalt*s von dem *Gegenstand* in der *Kritik*, die er von Fries übernimmt, wird auch in diesem Kontext untersucht. Dadurch erklärt Nelson, welche Stellung der Inhalt der *Kritik* – d. h. die transzendentalen Erkenntnisse – für Kant, Fries und ihn selbst einnehmen:

> „Der Gegenstand der transzendentalen Untersuchung, die den Inhalt der Kritik bildet, sind also Erkenntnisse a priori. Erkenntnisse aber erkennen wir überhaupt nur durch innerer Erfahrung. Die transzendentale Erkenntnis der Kritik ist also offenbar Erkenntnis aus innere Erfahrung. Hat also gleich transzendentale Kritik Erkenntnisse a priori zum Gegenstande, so ist es doch selbst eine empirische Wissenschaft. Wer nun nicht hinreichend genau Gegenstand und Inhalt der transzendentalen Kritik unterscheidet, wer die transzendentale Erkenntnis, den Inhalt der Kritik, mit ihrem Gegenstande, der philosophischen Erkenntnis, verwechselt, der wird leicht die Ungleichartigkeit beider übersehen,

192. *KrV*, A XVI, wie in Nelson 1970c, S. 122f zitiert wurde.
193. Vgl. Nelson 1970c, S. 123.
194. *KrV*, A XVII.
195. Ebd.
196. Nelson 1970c, S. 122.
197. Ebd.
198. Ebd.
199. Ebd.

> der wird leicht die psychologische Natur der ersteren verkennen und sie selbst für philosophisch, also für eine Art der Erkenntnis a priori halten."[200]

Nelson verweist am Ende des vorhergehenden Zitat auf folgende Äußerung Kants:

> „Und hier mache ich eine Anmerkung,... nämlich: daß nicht eine jede Erkenntnis a priori, sondern nur die, dadurch wir erkennen, daß und wie gewisse Vorstellungen (Anschauungen oder Begriffe) lediglich a priori angewandt werden oder möglich sein, transzendental... heißen müsse. Daher ist weder Raum, noch irgendeine geometrische Bestimmung desselben a priori eine transzendentale Vorstellung, sondern nur die Erkenntnis, daß diese Vorstellungen gar nicht empirischen Ursprungs sein, und die Möglichkeit, wie sie sich gleichwohl a priori auf Gegenstände beziehen können, kann transzendental heißen."[201]

Nelson lastet Kant den Fehler an, die transzendentalen Erkenntnisse statt empirisch, a priori zu verstehen. Im Bezug auf das obige Zitat schreibt er:

> „Hier bezeichnet Kant die transzendentale Erkenntnis ausdrücklich als eine Art der Erkenntnis a priori. *Es kann also keinem Zweifel unterliegen, daß Kant die psychologische Natur der transzendentalen Erkenntnis verkannt hat.*"[202]

Dass die Kritik der reinen Vernunft von *psychologischer* Natur ist, erklärt Nelson als eins der Hauptelemente der Friesschen Abhandlungen und der Grund dafür, dass Fries „hiermit einen wesentlichen methodischen Fortschritt über Kant hinaus zu tun behauptet".[203] Die Überzeugung, dass die transzendentalen Erkenntnisse empirisch sind und dass sie zur Psychologie gehören, rechtfertigt er folgenderweise:

> „Denn wir gehen gar nicht auf die individuellen Phänomene des Bewußtseins aus, sondern auf die allgemeine Form des innern Lebens, wie sie der Vernunft als solcher angehört, den Bewußtseinstätigkeiten als Norm zugrunde liegt und der Reflexion ihre Regeln gibt. Mag man nun dies nicht als eine Aufgabe der Psychologie bezeichnen – um den Namen ist es uns nicht zu tun, gebrauchen wir das zweideutige Wort Erkenntnistheorie, oder nennen wir es mit Rücksicht auf den Zweck und

200. Nelson 1970b, S. 41.
201. *KrV*, B 80f.
202. Nelson 1970c, S. 132.
203. Nelson 1970c, S. 114.

> das Interresse Transzendentalpsychologie oder auch *philosophische Anthropologie* –, so wird dich unter allen Umständen nur innere Erfahrung der dadurch bezeichnete Aufgabe zu genügen imstande sein."[204]

Er weist ebenso auf die Aufgabe der Kritik und auf den scheinbaren Widerspruch, den sie mit der psychologischen Natur des Inhalts der Kritik darstellt. Der Grund für den Widerspruch wird so beschrieben, dass die Kritik bezweckt, die metaphysischen Grundsätze – d. h. synthetische Erkenntnisse – zu begründen.

> „Dies Resultat wird nicht mehr paradox erscheinen, wenn man beachtet, daß es sich [...] in der Kritik nicht um den Beweis eines metaphysischen Grundsatzes handelt, denn ein solcher ist in der Tat unbeweisbar, sondern um den Beweis, daß ein Satz wirklich ein metaphysischer Grundsatz ist. Mit andern Worten: die Kritik beweist den *psychologischen* Satz, daß die Erkenntnis, die ein gewisser metaphysischer Satz ausspricht, eine unmittelbare Erkenntnis aus reiner Vernunft ist. *Der Beweis dieses psychologischen Lehrsatzes ist die Deduktion jenes metaphysischen Grundsatzes.*"[205]

Die Kritik ist also nach Nelson eine „Erfahrungswissenschaft", die wie jede andere „unter ihren Prämissen bereits metaphysische Prinzipien als Bedingungen ihrer Möglichkeit voraussetzen".[206] Sie kann diese Prinzipien nicht beweisen, sondern nur *deduzieren*, d. h. „ihren Ursprung in der reinen Vernunft zu beweisen."[207]

Die *Deduktion*, die den zentralen Bestandteil der *kritischen* Methode bildet, hat ihre Wurzeln nach Nelson in der Sokratisch-Platonischen Philosophie und in der *Anamnesis-Lehre*. In dem Vortrag „Die Sokratische Methode" gibt Nelson eine Beschreibung dieser Methode, die diesen Zusammenhang darstellt:

> „In der Tat: Wenn ich von der Deduktion, diesem schwer verständlich zu machenden Meisterstück der Philosophie, hier überhaupt einen Begriff zu geben versuchen soll, so kann ich ihr Wesen nicht prägnanter bezeichnen, als indem ich sage: Durch sie gelangt — wörtlich und buchstäblich zu verstehen — das sokratische Vorhaben zur Ausführung, den Nicht-Wissenden dadurch zu belehren, dass man ihn zur Einsicht zwingt, das wirklich zu wissen, wovon er nicht wusste, dass er es weiß."[208]

204. Nelson 1970b, S. 29.
205. Nelson 1970b, S. 32.
206. Nelson 1970b, S. 32f.
207. Ebd.
208. Nelson 2002, S. 43.

Wie oben in der Definition der Begründung dargestellt, beschreibt Nelson die *Deduktion* in seinem allgemeinem Sinne als Begründung eines Urteils, dessen Grund kein Urteil und nicht anschaulich ist. Er fügt allerdings hin, dass nicht nur die begrifflichen Erkenntnisse deduzierbar sind, sondern auch mathematische Erkenntnisse kann man auch deduzieren. Zu der Anwendung der kritischen Methode in der Mathematik schreibt er:

> „Dieses Verfahren, das man in der Geometrie nach seinem Zweck das axiomatische nennt, ist offenbar nichts anderes als eine *Anwendung der kritischen Methode auf die Geometrie*. Mit Hilfe dieser Methode ist in der neueren Geometrie mancher Satz bewiesen worden, den man früher nicht nur als selbstverständlich, sondern auch als unbeweisbar angesehen hatte.“[209]

In dem nächsten Teil dieser Arbeit (2.3) wird die Anwendung der *Deduktion* in Bezug auf mathematische Erkenntnisse ausführlich betrachtet. Nicht nur die Rolle der *Deduktion* für die Begründung und die Beschreibung der Mathematik, sondern auch der Kontext der Mathematik, als eine Wissenschaft mit speziellen Eigenschaften, die hilfreiche Mittel zur Erklärung der kritischen Methode an die Hand geben, ist dort das Thema der Untersuchung.

2.3 Nelsons Philosophie der Mathematik

Die Frage, die wir in diesem Abschnitt der Arbeit untersuchen, ist, welche Stellung die Mathematik im philosophischen System Nelsons einnimmt. Es ist klar, dass dies keine ausführliche Darstellung seiner Philosophie der Mathematik sein kann, sondern es ist beabsichtigt, zunächst die notwendigen Vorbemerkungen zu liefern, den Zusammenhang zwischen der Mathematik und den Voraussetzungen sowie den Aspekten der Sokratischen Methode, die wir in den vorhergehenden Abschnitten ausgeführt haben, aufzuzeigen. Dieser Teil wird also die Aspekte der Mathematik aus Nelsons Sicht vorstellen, mit derer Hilfe folgende Fragen geklärt werden können:

- Inwieweit spielen unmittelbare und mittelbare Erkenntnisse für die Genese und Geltung der Mathematik eine Rolle?
- In welchem Zusammenhang stehen die wissenschaftlichen Methoden in der Mathematik zur Nelsonschen kritischen Methode?

209. Nelson 1917, S. 27.

- Inwieweit ist der *Antidogmatismus* in der mathematischen Arbeit notwendig und erlaubt?

Die Philosophie der Mathematik NELSONs ist – wie wir später sehen werden – von zwei Faktoren beeinflusst: einerseits von der Philosophie der Mathematik PLATONs, KANTs und FRIES' und andererseits von der mathematischen Praxis DAVID HILBERTs und seines Kreises. Mit anderen Worten, PLATONs und KANTs Philosophie der Mathematik bilden Grundlagen der Mathematikphilosophie NELSONs. Letzterer hat mittels der FRIESschen Lehre seine Theorien bezüglich der Mathematik dargestellt, jedoch ist er an manchen Stellen von der Neukantischen Linie abgewichen und hat sich explizit von FRIES' Theorien, speziell in Bezug auf die Arithmetik, distanziert. Diese Einsichten NELSONs beruhen auf der engen Kooperation mit HILBERT und seinem Kreis und folglich seiner Kenntnis der damals aktuellen Mathematik. Einen Beleg für seine intensive Beschäftigung mit aktuellen Fragen der mathematischen Grundlageforschung findet man in seiner Autologie-Heterologie-Antinomie, die er mit KURT GRELLING (1886-1942) vorgestellt hat.[210] Diese Antinomie, die ein semantisches selbstbezügliches Paradoxon ist, ist eng an das RUSSELLschen Paradoxon in der Mengenlehre angelehnt. Ein weiterer Beleg ist darin zu sehen, dass er im Wintersemester 1910/11 „Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften“[211] durchgeführt hat, in denen er ausführlich die Grundlegung der Arithmetik von RICHARD DEDEKIND (1831–1916) und ERNST ZERMELO (1871-1953) philosophisch untersucht hat. Diese Tatsache zeigt auch die Bedeutung seiner Philosophie der Mathematik im Kontext der Geschichte der Mathematik.

In diesem Teil der Arbeit werde ich primär drei Beiträge NELSONs berücksichtigen. Zunächst eine zweiteilige Schrift, die er 1905/06 veröffentlicht hat:„*Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit*“, dann seinen Vortrag von 1914 in Paris zur Begründung der internationalen Gesellschaft der Mathematikphilosophie: „*Des fondaments de la géométrie*“ sowie seinen Vortrag „*Kritische Mathematik und mathematische Axiomatik*“, den er kurz vor seinem Tod in der Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner im September 1927 in Göttingen gehalten hat. Neben diesen Quellen werde ich die von seinen Schülern gefertigten Manuskripte seiner Veranstaltungen, die wir bereits zu Beginn des Abschnitts erwähnt haben, benutzen. Die Sekundärliteratur, die ich einbeziehen werde, ist die ausführliche Untersuchung von VOLKER PECKHAUS „*Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*“ sowie KAY HERRMANNs Veröffentlichung zur Erklärung der *Nelsonschen Philosophie der Natur und der Mathematik*, die er mit den oben genannten Manuskripten publiziert hat.

210. Vgl. Nelson 1908, S. 57.
211. Nelson 2004c.

NELSONs Philosophie der Mathematik wurde von ihm *Kritische Mathematik* genannt (vgl. Peckhaus 1990 S. 158ff und Herrmann 2004 S. 195ff). NELSON hat im Jahre 1904 die „Neue FRIESsche Schule“ gegründet, in der die FRIESsche anthropologische Vernunftkritik untersucht und mittels derer die Grundlagen der Mathematik bearbeitet wurden.[212] Einer, der NELSON bei der Gründung der Schule begleitet hat, war GERHARD HESSENBERG. Letzterer war vor NELSONs Abiturprüfung dessen Privatlehrer im Fach Mathematik in Berlin. Die philosophischen Ideen NELSONs, die er von FRIES entnommen und mit HESSENBERG im Kontext der Mathematik diskutiert hatte, führten dazu, dass HESSENBERG ihm HILBERTs Arbeit zu den Grundlagen der Geometrie vorstellte. NELSON sagt darüber selber in einem Brief an HILBERT:

> „Ich darf vielleicht hier den Umstand erwähnen, dem ich die erste Bekanntschaft mit Ihrem Namen verdanke, und den ich als eine der glücklichsten Fügungen meines Lebens betrachte. In meiner Primanerzeit gab mir Hessenberg, der damals selbst noch junger Assistent an der technischen Hochschule in Charlottenburg war, Privatunterricht, den wir sehr bald durch mathematisch-philosophische Unterhaltung in den Sphären unserer beiderseitigen Interessen rückten. Bei dieser Gelegenheit – wir hatten gerade über den Entwurf eines geometrischen Axiomensystems gesprochen, den ich ihm vorgelegt hatte,– wies mich Hessenberg, mit Ausdrücken begeistert Verehrung für den Verfasser, auf Ihr eben erschienenes Buch über die Grundlagen der Geometrie hin [...].“[213]

Später haben diese beiden mit Bezug auf die neue FRIESsche Schule philosophische Forschungen zu den Grundlagen der Mathematik durchgeführt. Das erste Ergebnis dieser Forschungen war der Vortrag „Über die kritische Mathematik“, den HESSENBERG 1903 in Göttingen gehalten hat[214]. HESSENBERG hat dazu auch einen Aufsatz veröffentlicht, in dem er die Hauptcharakteristika der *Kritischen Mathematik* so dargelegt hat:

> „1. die scharfe Trennung zwischen Inhalt und Gegenstand der Kritik
>
> 2. die Frage nach der Erkenntnisquelle von mathematischen Erkenntnissen.“[215]

212. Vgl. Peckhaus 1990, S. 131ff.
213. Nelson 1916, S. 14f, entnommen von Peckhaus 1990, S. 124f.
214. Herrmann 2004, S. 195.
215. Herrmann 2004, S. 196.

Hier sieht Kay Herrmann den Punkt, an dem Hessenberg das Programm der *Kritischen Mathematik* initiiert hat. Laut Herrmann hat nelson sich in den folgenden Jahren zur Aufgabe gemacht, dieses Thema detailliert auszuarbeiten. Er attestiert folgenden Themen in nelsons Mathematikphilosophie grundsätzliche Bedeutung:

> „1. Die Rolle der Anschauung
>
> 2. Charakter und Quelle der mathematischen Erkenntnis
>
> 3. Deduktion der mathematischen Axiome."[216]

Wenn man die Basis der Mathematikphilosophie Nelsons unter Berücksichtigung der vorangegangenen Teile, d.h. dessen, was über erkenntnistheoretische Prinzipien sowie nelsons Verständnis der Platonischen, Kantischen und Friesschen Philosophie erklärt wurde, aufzuzählen beabsichtigt, ist das Ergebnis das folgende:

a) Formale und transzendentale Apperzeption

b) Grundlegung der Mathematik auf der Basis anschaulicher synthetischer Urteile a priori

c) Regressive Methode der Abstraktion, Demonstration und Deduktion.

Es ist nicht auszuschließen, dass andere Punkte, z.B. die logischen Beziehungen zwischen mathematischen Axiomen, in der Philosophie der Mathematik nelsons eine wichtige Rolle spielen.[217] Das wird besonders ersichtlich, wenn nelson darauf hinweist, dass die Methodologie, wenn man sie mit der Friesschen vergleicht, durch die moderne Mathematik einen bedeutenden Fortschritt gemacht habe.[218] Keiner dieser Aspekte jedoch ist wie die oben genannten grundlegend im eigentlichen Sinne.

Die Punkte *a*) und *b*) betrachten einerseits die Quelle der mathematischen Erkenntnisse, andererseits ihre Qualität. Diese Aspekte wurden auch von Herrmann in den Punkten 1. und 2. einbezogen. Punkt *c*) verweist auf die Methode zur Erlangung und Untersuchung der mathematischen Erkenntnisse bzw. Urteile. Wie zuvor in dem Abschnitt über die Methodologie ausführlich diskutiert wurde, sind die Bestandteile der *kritischen Methode* die *regressive Methode der Abstraktion* und die *Deduktion*.

Die Untersuchung diese Punkte im Kontext der Mathematik ist hier meine Hauptaufgabe. Durch diese Untersuchung werden die drei oben aufgeworfenen Fragen

216. Ebd.
217. Vgl. Nelson 1927, S. 193f u. Peckhaus 1990, S. 159.
218. Nelson 1927 S. 193f.

beantwortet und die Möglichkeit für einen Vergleich zwischen der Philosophie der Mathematik NELSONs und der von PLATON vorbereitet.

2.3.1 Inhalt und Gegenstand der kritischen Mathematik

Um die Stellung der oben genannten Punkte *a*) bis *c*) in der Mathematikphilosophie NELSONs zu verdeutlichen, beschreibe ich kurz die von NELSONkonzipierte *Kritische Mathematik*, wie dieses Gedankensystem entstanden und erweitert worden ist.

Zunächst muss ich die Themen, die in 2.2 erwähnt wurden, aufgreifen. Im Vorwort des ersten Heftes der Neuen Folge der *Abhandlungen der Friesschen Schule* haben HESSENBERG, KAISER und NELSON - die drei Herausgeber des Heftes - ihre Intention als „das Bestreben «Wissenschaft an die Stelle des zügellosen Spiels der Originalitätssucht zu setzen»“[219] beschrieben. In diesem Zusammenhang haben sie die Tradition, die von KANT begründet und durch FRIES und APELT weitergeführt wurde, verfolgt, um zu zeigen, dass „unsere Philosophie auf ebenso strenger wissenschaftlicher Methode beruht wie die Mathematik und wie die Naturwissenschaften“.[220] Die Kritik, die das Hauptelement dieser Tradition ist, bahnt den Weg zu den letztgenannten Intentionen. Die wichtigste Aufgabe der Kritik ihrerseits ist aber die *Deduktion*. Im Folgenden werde ich dies näher betrachten.

Um darüber sprechen zu können, was mit der FRIES-NELSONschen *Deduktion* gemeint ist und was überhaupt *deduziert* werden soll, muss ich zunächst das besprochene Thema in (2.1.3) aufgreifen, nämlich die *formale Apperzeption* oder das *Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft*. Das Prinzip beruht auf der Existenz der unmittelbaren Erkenntnisse und besagt, dass sie erstens an und für sich sicher sind und dass sie zweitens die Basis für die Begründung der mittelbaren Erkenntnisse bilden.[221] Die mittelbaren Erkenntnisse haben im Gegensatz zu unmittelbaren Erkenntnissen alle die Form eines Urteils. Es gibt aber zwei Arten von unmittelbaren Erkenntnissen:

- „die Anschauung (die empirische Anschauung als Grund für empirische Urteile, die mathematische (reine) Anschauung als Grund für mathematische Urteile)
- die nicht-anschauliche, unmittelbare Erkenntnis der reinen Vernunft als Grund für metaphysische Urteile.“[222]

219. Peckhaus 1990, S. 151. Sowohl hier als auch in dem nächsten Zitat bezieht sich PECKHAUS auf das oben genannte Vorwort Nelson 1904.
220. Nelson 1904, S. IX, wie in Peckhaus 1990, S.159 zitiert wurde.
221. Vgl. 2.1.3.
222. Peckhaus 1990 S. 157.

NELSON ist der Auffassung, dass die Grundsätze durch *Aufweisung* unmittelbarer Erkenntnisse begründet werden können. Dies kann in zweierlei Weise erfolgen:

- Demonstrationen, die in den empirischen und mathematischen Wissenschaften benutzt werden und in denen (empirische oder mathematische) Anschauungen aufgezeigt werden, die als Grund für die Grundsätze gelten.
- Deduktion, die die Grundsätze der Metaphysik begründet.[223]

Dazu führt NELSON aus:

> „Die nur deducierbaren Urteile aber haben ihren Grund nicht, wie die demonstrierbaren, in der Anschauung; d.h. die ihnen zugrunde liegende unmittelbare Erkenntnis kommt uns nicht unmittelbar, sondern *nur* durch Vermittelung der Reflexion, *nur* durch das Urteil zum Bewußtsein.“[224]

Wie jedoch PECKHAUS in der Erklärung der oben genannten Tradition darlegt, ist NELSON der Meinung, dass „das Geschäft der Deduktion und damit der Anwendungsbereich des Kritizismus [...] sich nicht nur auf die Metaphysik“[225] beschränkt und dass in der Mathematik auch synthetische Urteile a priori vorkommen. NELSON fordert,

> „daß, das Gebiet des Deducierbaren in unserer Erkenntnis auch mit der Philosophie nicht abgeschlossen ist. Es muß – außer der die Evidenz schon mit sich führenden und darum dem Interesse des Mathematikers allein genügenden Begründung durch Demonstration – auch eine *kritische Deduktion der Axiome der Mathematik*, ihrem ganzen Umfange nach, möglich sein. Diese Übertragung der Kritik auf Axiomsysteme der Mathematik konstituiert eine eigene wissenschaftliche Disciplin: die Philosophie der Mathematik oder, nach besserer Bezeichnung, die *Kritische Mathematik*“[226]

Die meisten der bisher gebrachten Erläuterungen über NELSONs Philosophie der Mathematik, insbesondere die oben genannte Aussage NELSONs, kann in FRIES’ Schriften gefunden werden. Es sind FRIESsche Einsichten über mögliche Begründungsverfahren für die mathematischen Axiome, die von NELSON reflektiert worden sind. Das folgende Zitat von FRIES zeigt u.a., wie stark NELSON sich bei der

223. Vgl. Peckhaus 1990 S. 157.
224. Nelson 1970b S. 22f, wie es in Peckhaus 1990 S. 158 zitiert wurde.
225. Peckhaus 1990, S. 158.
226. Nelson 1970b, S. 37, wie es in Peckhaus 1990 S. 158 zitiert wurde.

Definition von Begründung der Grundsätze auf die FRIESschen Einsichten bezogen hat:

> „In reiner Mathematik entwickelt das Hypothetische System mit beständiger Beyhülfe der Demonstrationen aus reiner Anschauung sehr reiche Folgen aus wenigen Grundsätzen. Die Grundsätze lassen sich hier auf zwey Weisen begründen. Ersichtlich was für den Unterricht hinlangt, durch bloße Berufung auf ihre Evidenz, welches eben eine einfache Demonstration aus reiner Anschauung ist; zweytens aber auch durch Deduction mit Hülfe einer anthropologischen Grunduntersuchung.“[227]

Reine Mathematik ist also ein logisches hypothetisches System, dessen Gültigkeit von der Gültigkeit seiner Grundsätze abhängt. Seine Grundsätze wiederum werden durch Demonstration auf reiner Anschauung begründet und dadurch gehaltvoll. FRIES glaubt, dass Grundsätze im Allgemeinen entweder durch Demonstration oder Deduktion begründet werden können. Es ist jedoch unklar, dass das Wort „hier“ in „Die Grundsätze lassen sich hier auf zwey Weisen begründen.“ in Bezug auf Mathematik heißen soll oder im Kontext der «Anthropologie». Die weiteren Charakteristika mathematischer Erkenntnis, die er unten aufzählt – und die bei NELSON auch wiedergefunden werden können –, lassen den Verdacht aufkommen, dass einige der von FRIES erwähnten Grundsätze eigentlich Sätze in der *Philosophie der Mathematik* sind:

> „Reine Anschauung nemlich ist eine ursprüngliche Form unserer vernünftigen Erkenntniß, deren einzelne Formen durch eine Theorie der erkennenden Vernunft erklärbar seyn müssen; die Grundsätze, welche die Grundbestimmungen dieser Formen aussprechen, müssen also hier als nothwendig nachgewiesen werden können. Diese zweyte Begründung gehört zur Einsicht in mathematische Wahrheiten gar nicht, denn diese Deduction ist viel undeutlicher als alle mathematische Wahrheit, aber sie dient zur Beurtheilung des Wesens der reinen Anschauung selbst, welche in der mathematischen Erkenntniß immer als gegeben voraus gesetzt wird. Größe und Zahl setzt die Arithmetik, den unendlichen Raum die Geometrie als rein anschaulich gegeben voraus, wie aber diese Anschauungen in unsre Erkenntnis kommen, weiß die Mathematik nicht zu beantworten. Diese Frage können wir nur an jene anthropologische Deduction thun. Das Interesse dieser Fragen ist nemlich eigentlich das philosophische, welche Bedeutung die mathematische Erkenntniß im

227. Fries 1837, S. 377, wie es in Herrmann 2004 S. 200 zitiert wurde.

> Ganzen unsrer Ueberzeugung habe. Man nennt daher diese Art der Untersuchungen *Philosophie der Mathematik*."[228]

Deduktion ist also die Art der Begründung, die nicht innerhalb der Mathematik und basierend auf reiner Anschauung, sondern für Sätze über die mathematischen Erkenntnisse angewendet wird. Dass die mathematischen Erkenntnisse auf reiner Anschauung begründet werden, ist nach FRIES daher ein Satz, der sich nur durch Deduktion begründen lässt. Dies wird später anhand eines Beispiels näher erläutert. Die meisten der Hauptelemente von NELSONs Philosophie der Mathematik sind in den letzten beiden Zitaten von FRIES sehr kompakt erwähnt worden. Sie werden hier jedoch zusammen mit den Abweichungen NELSONs von der FRIESschen Philosophie der Mathematik ausführlich erklärt. NELSONs starker Bezug auf FRIES wurde schon zu Beginn der Untersuchungen erwähnt. Bereits im Nachtrag von HESSENBERGS oben genannten Vortrag hat er „aus einem Brief des Herrn «cand. phil. Leonard NELSON in Göttingen» " zitiert [229]:

> „Fries hat auf die Möglichkeit einer Übertragung der Kritik auf die Mathematik zuerst 1798 hingewiesen, die Aufgabe der Deduktion ihrer Axiome in der «Logik» (§112)[230] präzisiert und die kritische Mathematik selbst ausgeführt in der «Mathematischen Naturphilosophie» , deren ganze erste Hälfte sie einnimmt. Hier tritt sie also schon als «selbständiger eigener Wissenszweig» auf (1822)."

NELSON trägt zur Erweiterung der *Kritischen Mathematik* bei, indem er diese in den Kontext der mathematischen Entwicklungen seiner Zeit einbettet. Die Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrien und ihre logische Möglichkeit sowie die Grundlagenforschungen in der Mathematik, die von HILBERT und dem Mathematiker-Kreis um ihn durchgeführt worden waren, spielen in NELSONs Arbeit eine wichtige Rolle. Er sieht die erste Teilaufgabe der *Kritischen Mathematik* in der regressiven Aufweisung der Axiome. Diese Aufgabe ist „durch Arbeiten im Anschluß an HILBERTs axiomatisches Programm [...] weitgehend bewältigt" (Peckhaus 1990, S. 165). Laut PECKHAUS ist NELSON der Meinung, dass die *Deduktion* dieser Axiome selbst die zweite Teilaufgabe ist.

NELSON weist in seinem Vortrag „*Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik*"[231] auch auf dieses Thema hin. Er erläutert dort, dass die *Kritische Mathematik* nichts anderes ist als das, was in der modernen Mathematik Axiomatik genannt

228. Fries 1837, S. 377f, wie es in Herrmann 2004 S. 200 zitiert wurde.
229. Datiert Göttingen, 16.01.1904. Vgl. Peckhaus 1990, S. 161.
230. PECKHAUS erläutert an dieser Stelle in einer Fußnote an dieser Stelle des Zitats, dass NELSON sich auf Fries 1837 beziehe.
231. Nelson 1927.

wird. Somit erkennt er FRIES als den eigentlichen Begründer der modernen Axiomatik an; denn FRIES „hat als Erster nicht nur das Problem dieser Wissenschaft allgemein gestellt, sondern sie auch systematisch bearbeitet".[232] Obwohl NELSON glaubt, dass die axiomatische Methode seiner eigenen Zeit viel fortgeschrittener sei als die Methode, die FRIES vorgestellt hat, erkennt er dies aber als eine Bestätigung für die Richtigkeit des Weges, den FRIES eingeschlagen hat.[233]. Die Anwendung der Logik wird von NELSON als der Grund für den Fortschritt in der modernen Axiomatik im Vergleich mit der FRIESschen Methode herausgestellt. Die Logik werde hier, d.h. in der Zeit NELSONS, als ein Instrument angewendet, um die „Unabhängigkeit bestimmter mathematischer Erkenntnisse von Logik"[234] zu zeigen.

Um dies zu erklären, untersucht er als Beispiel die Axiome der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrien. Dieses Beispiel ist für NELSON vor dem Hintergrund zweier Aspekte von zentraler Bedeutung. Erstens ist diese Erläuterung ein Beleg für die Theorie von KANT und FRIES, dass es eine weitere Erkenntnisquelle neben Logik und Erfahrung gebe. Zweitens liefert er ein Beispiel, mit dem er demonstriert, wie Kritik auf der Mathematik angewandt wird. Dafür stellt er zunächst eine Definition der Beweisbarkeit eines mathematischen Satzes mittels bestimmter Prämissen vor:

> „Das Kriterium der Beweisbarkeit eines Satzes aus bestimmten Prämissen ist bekanntlich die Tatsache, daß die Aufhebung des zu beweisenden Satzes zu einem Widerspruch führt mit einer Konsequenz aus diesen Prämissen."[235]

Daran anschließend schlussfolgert er, dass ein Satz unabhängig von gewissen anderen Sätzen ist, wenn die Verneinung dieses Satzes mit den Konsequenzen aus den anderen Sätze keinen Widerspruch bildet.[236] Als Beispiel dafür verweist er nun gerade auf die Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. Er fügt hinzu, dass GAUSS, LOBATSCHEWSKY und BOLYAI durch ihre Entdeckung gezeigt hätten, dass der Aufbau eines widerspruchsfreien geometrischen Systems, aber abweichend von dem Euklidischen, möglich sei. Des Weiteren führt er in seinem Vortrag aus, dass durch moderne Axiomatik die relative Widerspruchsfreiheit der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometire gezeigt werde, d.h. die Euklidische Geometrie wäre notwendigerweise widersprüchlich, wenn man in der Nicht-Euklidischen Geometrie einen Widerspruch fände. Dies zählt er als ein Kriterium dafür, dass keine Konsequenzen der Nicht-Euklidischen Geometrie zu einem Widerspruch führen

232. Ebd., S. 96.
233. Vgl. Ebd., S.97.
234. Ebd.
235. Ebd., S. 98.
236. Vgl. ebd.

können. Wichtig für ihn ist aber das Ergebnis, das die Anwendung der modernen Axiomatik ergibt. Seiner Meinung nach sind die bisher gelieferten Erläuterungen ein Beleg für die Beschränktheit im Bereich der mathematischen Erkenntnisse und er folgert daraus, dass die mathematischen Axiome „von «synthetischem» Charakter“ sind.[237] Er rechtfertigt seine Behauptung:

> „Denn wenn bewiesen ist, daß die Negation eines solchen Axioms auf keinen Widerspruch führen kann selbst unter Hinzunahme der übrigen Axiome, so ist damit erst recht bewiesen, daß sie ohne Hinzunahme der anderen Axiome auf keinen Widerspruch führt. Und dieses war ja gerade das bereits von KANT angegebene Kriterium des synthetischen Charakters eines Urteils: die Widerspruchslosigkeit seiner Verneinung.“

Zusammenfassend kann man also Folgendes festlegen: NELSON bettet die Fortschritte seiner Zeit in der Mathematik und deren Grundlagen einerseits in die Kritische Philosophie ein, indem er die epistemologischen Folgen der Fortschritte herausarbeitet. Er verwendet sie, um die Lehre von KANT und FRIES auch zu rechtfertigen. Hierzu zeigt NELSON durch einen Vergleich, dass die HILBERTsche Axiomatik ein Beispiel von der Anwendung der kritischen Methode im Kontext der Mathematik darstellt. NELSON glaubt andererseits, dass die Axiomatik zu einem besseren Verständnis der epistemologischen Grundlagen der kritischen Philosophie beitragen kann. Er wiest darauf hin, dass durch die Axiomatik und HILBERT relative Widerspruchsfreiheit der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie die Synthetizität der geometrischen Erkenntnisse bestätigt wurde. Dadurch zeigt er aber auch, welche wichtige Rolle Logik in der Kritik spielt.

Um die Affinität der FRIESschen *kritischen Methode* mit der modernen *Axiomatik* zu zeigen, weist NELSON auf die von ihm entdeckten Gemeinsamkeiten der beiden Methoden hin. Eine der Gemeinsamkeiten, die einen wichtigen Aspekt der wissenschaftlichen Methode nach NELSON aufzeigt, ist die klare Trennung zwischen *Inhalt* und *Gegenstand* der Erkenntnis. Über diese Trennung bei FRIES führt NELSON aus:

> „Was jedoch für uns hier noch weit wichtiger ist, das ist die Bestätigung, die durch die moderne Axiomatik dem charakteristischen Grundgedanken der Friesschen Methode zuteil geworden ist: jener charakteristischen und bei keinem Philosophen sonst zu findenden klaren Trennung von Inhalte und Gegenstand der kritischen Erkenntnis. Das Eigentümlische der Kritik der Vernunft beruht gemäß der ihr von FRIES gegebenen Wendung darin, daß dieselbe Erkenntnis, die den Inhalt des Systems

237. Vgl. ebd. S. 99f

> der Metaphysik bildet, zum Gegenstand derjenigen Erkenntnis wird, die den Inhalt der Kritik der Vernunft bildet.“[238]

Diese klare Trennung zwischen Inhalt und Gegenstand der Erkenntnis findet man laut Nelson auch in der modernen *Axiomatik*, nämlich, „daß diejenigen Sätze, die den Inhalt des Systems der Mathematik bilden, zum Gegenstand derjenigen Sätze gemacht werden, die den Inhalt der Axiomatik bilden und also der Kritik der Mathematik“.[239] Um diesen Zusammenhang zu erklären, verwendet er, wie erwähnt, das Beispiel der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrien. Wenn man das Parallelenaxiom, das ein Satz in dem System der Geometrie ist, A nennt, wird A laut Nelson in der Kritik der Geometrie zum Gegenstand eines Satzes, den er A’ nennt:

> „A’) *A ist unbeweisbar.*
>
> Dieser Satz der geometrischen Kritik hat jenen Satz des geometrischen Systems zum Gegenstand, wie man ja aus seiner Formulierung ohne weiteres sieht. Er hat es nicht zu tun mit der Gültigkeit dieses geometrischen Satzes. [...] Nicht der Satz A, wohl aber der Satz A’ wird hier bewiesen. Daß es sich in der Kritik nicht um einen Beweis des Axioms handeln kann, das wird gerade an diesem Fall handgreiflich, da es ja geradezu die Unbeweisbarkeit von A ist, was A’ behauptet.“[240]

Die gleichen Verhältnisse findet man in der Friesschen Kritik der Vernunft, das jedenfalls behauptet Nelson. Für die „*Deduktion*“ der metaphysischen Prinzipien, die *nicht* als einen *Beweis* der Prinzipien verstanden werden darf, kann ein ähnliches Beispiel dargestellt werden:

> „B) *Jede Veränderung hat eine Ursache.*“[241]

B ist das Prinzip der Kausalität und ein Satz in der Metaphysik. In der Kritik der Vernunft wird er jedoch zum Gegenstand eines Satzes wie:

> „B’) *B ist die Wiedergabe einer unmittelbaren Erkenntnis.*
>
> Dieser Satz B’ wird seinerseits bewiesen, und dieser Beweis von B’ ist eben die *Deduktion* von B.“[242]

238. Ebd. S. 100.
239. Ebd.
240. Nelson 1927, S. 101.
241. Nelson 1927, S. 102.
242. Ebd.

Außer dieser Analogie zwischen der Verhältnissen in der *Kritik der Metaphysik* und den Verhältnissen in der *Axiomatik* oder *Metamathematik* im Sinne Hilberts weist Nelson auf, die Ähnlichkeit der Zwecke, die die Kritik, und die Axiomatik zu erfüllen bestreben:

> „Auch der Zweck der Einführung der Kritik ist ein ganz ähnlicher hier wie dort. Der Zweck der Axiomatik ist,[...] nicht die Sicherung der Gültigkeit der mathematischen Erkenntnis, sondern die Sicherung des abstrakten Systems der mathematischen Prinzipien – gerade so, wie der Zweck der Kritik der Vernunft nicht die Sicherung der Gültigkeit der metaphysischen Erkenntnis ist, sondern die Sicherung des Abstrakten Systems der metaphysischen Prinzipien. [...] Der Zweck liegt dort [...] darin, sie auf die Form der Wissenschaft zu bringen. Denn die Form der Wissenschaft verlangt systematische Einheit und also Reduktion auf Prinzipien.“[243]

Dieses Zitat kann auf mindestens zwei Arten und Weisen im Kontext von Nelsons Philosophie interpretiert werden: 1. Die Rechtfertigung einer mathematischen Aussage kann durch Zurückführung ihrer Gültigkeit auf die von einer anderen Aussage oder durch Aufweis auf eine unmittelbare Erkenntnis – wie z.B. eine Anschauung – nicht garantieren, dass sie eine Wahrheit ausspricht. Weil der Begründungsprozess mit Hilfe der Logik, durch Reflexion und im Verstand erfolgt, ist die begründete Aussage nach Nelson eine Verstandeserkenntnis, die nicht notwendigerweise mit einer Vernunfterkenntnis übereinstimmt. Die Aussage ist erst dann eine Verstandeswahrheit, wenn ihre Übereinstimmung mit einer unmittelbaren Erkenntnis gezeigt werden kann. Einbettung dieser Aussage in ein konsistentes Erkenntnissystem erhöht ihre Überzeugungskraft. 2. Eine mathematische Aussage ist erst dann wissenschaftlich begründet, wenn sie als einen Bestandteil eines konsistenten axiomatischen System dargestellt werden kann. D.h. die Rechtfertigung durch Zurückführung ihrer Gültigkeit auf die von einer anderen Aussage oder durch Aufweis auf eine unmittelbare Erkenntnis ist nur ein Teil der wissenschaftlichen Begründung.

Die Rolle der Axiomen und des Axiomensystems wird später durch einen Vergleich zwischen Nelsons und Freges Überzeugungen ausführlicher betrachtet.

243. Ebd.

2.3.2 Die Grundlagenforschung der Mathematik kurz nach Nelsons Abscheiden

Bevor wir diese Untersuchung über die Methode Nelsons im Kontext seiner Mathematikphilosophie abschließen, möchte ich auf einige Punkte in der Geschichte der Grundlagenforschung der Mathematik hinweisen, die für gewisse Punkte der Arbeit Nelsons relevant sind.

Der österreichische Mathematiker und Logiker Kurt Gödel (1906-1978), dessen Forschungen auf die Grundlagen der Mathematik – und eigentlich zugunsten des Hilbertprogramms – fokussiert waren, hat durch seine Unvollständigkeitssätze gezeigt, dass in keinem konsistenten formalen axiomatischen System, das mächtig genug ist – wie die Arithmetik – und dessen Sätze von einem Algorithmus aufgezählt werden können, alle wahren Aussagen beweisbar sind. Darüber hinaus kann dieses System die eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen.[244] Somit hat er die Unmöglichkeit des Hilbertprogramms gezeigt, dessen Ziele von Peckhaus so dargestellt werden:

- „die Forderung nach Erstellung eines umfassenden Axiomensystems für ein jedes Gebiet der Mathematik;
- die Forderung nach einem Widerspruchsfreiheitsbeweis für jedes dieser Axiomensystems, insbesondere aber für die grundlegenden Systeme der Arithmetik und der Mengenlehre;
- das Postulat der «Entscheidbarkeit einer jeden mathematischen Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen» im Rahmen einer mit finiten Verfahren operierenden Beweistheorie.“[245]

Der für uns hier interessante Aspekt seiner Arbeit ist das Verfahren, das Gödel in dem Beweis seines Unvollständigkeitssatzes angewendet hat. Dieses Verfahren scheint der Nelsonschen kritischen Methode konträr zu sein. In Nelsons Sprache hat Gödel seinen Satz, der die Kritik der Mathematik zum Inhalt hat, mit arithmetischen Mitteln[246], die die Mathematik zum Inhalt hat, bewiesen. Er hat auch in seinem Beweis die Trennung zwischen dem Inhalt und dem Gegenstand der Erkenntnis unterlaufen. Obwohl der Beweis mathematische Gegenstände beinhaltet, sollte er aber als kein mathematischer Beweis, sondern als ein Beweis eines Satzes in der *Kritischen Mathematik* betrachtet werden. Der Grund dafür ist, dass der Satz etwas über mathematische Axiome behauptet und sie als den Gegenstand der

244. Vgl. Buldt 2001.
245. Peckhaus 1990, S. 1.
246. – z.B. durch Arithmetisierung der Beweisbarkeitsrelation –

Untersuchung behandelt. Sie werden nicht nach ihrer Gültigkeit untersucht, sondern als ein einen Teil des Systems. Die Aussagen der Unvollständigkeitssätze bezieht sich auf einer Eigenschaft eines logischen Systems innerhalb der Mathematik von einer besonderen Art.

Man kann also folgern, dass der GÖDELsche Satz für NELSON ähnlich dem Satz A' in dem oben genannten Beispiel ist. Wir haben schon erwähnt, dass NELSON selber der Meinung war, dass der Beweis von A' mittels *moderner Axiomatik* und *Logik* durchgeführt wurde. Die Tatsache, dass er wegen seines frühen Todes diese Entwicklungen nicht erleben konnte, lässt die Frage offen, wie er auf diese Anwendung der mathematischen Mittel – nicht als ein Teil des ganzen mathematischen Systems, sondern nur als Hilfsmittel zum Beweis eines Satzes außerhalb des mathematischen Systems – in der *Kritischen Mathematik* reagieren würde:

- Nimmt er den GÖDELschen Beweis des Unvollständigkeitssatzes als einen Teil der *Kritischen Mathematik* an?
- Ist die Anwendung der Mathematik, die ihre Anwendung in der Erfahrung hat, in der *Kritischen Mathematik* überhaupt in der KANT-FRIESschen *Transzendentalphilosophie* legitimierbar?

Da der Begriff «Kritik» – insbesondere der Begriff «Deduktion» – und ihre Voraussetzungen nicht klar formalisiert und die Rolle, die Mathematik überhaupt dabei einnehmen kann, nicht ausführlich genug untersucht wurde, kann man nicht explizit sagen, welche Position NELSON in Bezug auf «Deduktion» gegen diesen Satz einnehmen würde. Es ist aber sicher zu sagen, dass der Unvollständigkeitssatz nach NELSON der *Kritischen Mathematik* gehört. Es handelt sich also um einen Satz, der nicht in der Mathematik – oder verankert in der Anschauung – bewiesen wird. Der Inhalt dieses Satzes ist nicht von anschaulicher Natur. Deswegen ist dafür eine andere Art der Begründung zu verwendet, nämlich «Deduktion». Im folgenden Zitat verweist NELSON auf den Unterschied zwischen den beiden möglichen Arten der Begründung, nämlich «Demonstration» und «Deduktion»:

> „Unter ‚Deduktion' der metaphysischen Prinzipien ist nicht etwa ein Beweis dieser Prinzipien zu verstehen, wohl aber eine Begründung. Diese Begründung ist ein höchst verwickeltes und kunstvolles Verfahren[...]. Sie besteht darin, daß man die fraglichen Prinzipien in analoger Weise auf eine unmittelbare Erkenntnis zurückführt, wie man die Axiome rechtfertigt, indem man bei ihrer Einführung auf die Anschauung verweist. Der Unterschied ist nur der – und darauf beruhen alle die tiefliegenden Schwierigkeiten dieses Verfahrens –, daß die unmittelbare Erkenntnis, auf die es hier gilt die Prinzipien zurückzuführen, nicht

> anschaulicher Art ist und also nicht klar zu Tage liegt, sondern erst künstlich, vermittels einer Theorie der Vernunft, ausgesucht werden muß.“[247]

Was Nelson in diesem Zitat über mathematische Axiome aussagt, ist die Beschreibung ihrer *Demonstration*, und nicht ihrer *Deduktion*. Wie oben erwähnt, ist die *Demonstration* auch eine Art Begründung, die er wie Fries klar von der *Deduktion* unterscheidet (vgl. z.B. Nelson 1970b S. 22f.). Weil in der *Deduktion* der mathematischen Axiome ihre Anschaulichkeit keine Rolle spielt, enthält somit diese *Deduktion* – wie bei der von metaphysischen Prinzipien – auch „tiefliegende Schwierigkeiten“. Der Beweis des Gödelschen Satzes, der als ein Teil der „Theorie der Vernunft“ gelten sollte, wird mittels der Mathematik, genauer gesagt durch eine Arithmetisierung, ausgeführt. Anwendung der Mathematik, um einen Satz in der *Kritischen Mathematik* zu beweisen, setzt einige Annahmen voraus, einschließlich die Axiome, die in der Basis der Mathematik liegen. Diese sind jedoch selbst der Gegenstand der Untersuchung. Dieser Punkt fordert eine tiefere und ausführlichere philosophische Untersuchung über die philosophische Bedeutung, Stellung und Gültigkeit des Satzes. Diese Tatsache macht es schwer zu glauben, dass solche Art Anwendung der Mathematik und somit der Beweis des Gödelschen Satzes in dem philosophischen Gedankensystems Nelsons legitimierbar sein kann.

Der nächste interessante Punkt in diesem Zusammenhang ist die These, die von zwei anderen Mathematikern und Logikern, Alonzo Church (1903-1995) und Alain Turing (1912-1954), vorgestellt wurde. Diese These ist bekannt als Church-Turingsches Unentscheidbarkeitstheorem der Prädikaten-Logik 1. Stufe. Wilhelm Ackermann (1896-1962), Mathematiker und Schüler Hilberts, hat in den *Anmerkungen zur Neuausgabe der vorstehenden Abhandlungen*[248], die er zu Nelsons Vortrag Nelson 1927 geschrieben hat, auf diesen Satz Bezug genommen:

> „1935 zeigt Alonzo Church, daß wir nie ein Entscheidungsverfahren besitzen können, das uns erlaubt, die Richtigkeit oder Falschheit aller zahlentheoretischen Sätze festzustellen. Dies bedeutet jedoch nicht, daß wir je einen bestimmten zahlentheoretischen Satz angeben könnten – man kann diese Behauptung sogar widerlegen –, der nachweislich unentscheidbar wäre. Für die höheren Teile der Mathematik erwähnen wir die Cantorsche Kontinuumhypothese, bei der sich immer mehr die Einsicht durchsetzt, daß aus einleuchtenden mathematischen Prinzipien noch ihre Falschheit beweisen werden könne, obwohl ein Beweis (von Kurt

247. Nelson 1927, S. 101.
248. Ebd., S. 125.

> Gödel) bis jetzt erst für den zweiten Teil der Behauptung vorhanden ist.“ [249]

Diese Anmerkung ACKERMANNS bezieht sich auf die folgende Erläuterung NELSONS:

> „Eine Überzeugung, die jeden tieferen Mathematiker bei seinen Forschungen leitet und ihm die Spannkraft verleiht, trotz aller Fehlschläge bei einer Untersuchung auszuharren, eine Überzeugung, die wiederum durch den HILBERTschen Ausbau der Axiomatik mehr und mehr in den Vordergrund des Interesses gerückt worden ist, geht dahin, daß jedes mathematische Problem e n t s c h e i d b a r sein muß, in dem Sinne, daß wir über Wahrheit oder Falschheit jedes mathematischen Satzes durch reines Denken, ohne Hilfe von außen, zu entscheiden vermögen [...].“[250]

NELSON äußert sich sogar über die Vollständigkeit in der Mathematik auch sehr optimistisch:

> „Die mathematische Erkenntnis muß ja eine solche sein, über die wir u n a b h ä n g i g von den Umständen verfügen, und zwar so, daß sie k e i n e r E r w e i t e r u n g b e d ü r f t i g ist, um uns den Zugang zur Entscheidung eines Problems auf rein logischem Wege zu gestatten.“[251]

Diese Einsicht NELSONS wurde von ACKERMANN mit der folgenden Anmerkung konfrontiert:

> „1931 zeigt KURT GÖDEL, daß es kein Axiomensystem gibt, aus dem alle richtigen mathematischen Sätze abgeleitet werden können, daß es vielmehr für jedes Axiomensystem richtige mathematische Sätze gibt, die erst bei einer Erweiterung des Axiomensystems ableitbar werden.“[252]

ACKERMANNS Kritik an NELSONS Einsichten ist, wie er selber in der Vorbemerkung zu NELSONS Vortragsmanuskript (vgl. Nelson 1927, S. 92) sagt, mit Berücksichtigung der Ergebnisse in der mathematischen Grundlagenforschung zwischen 1930 und 1936 erzielt worden. Im Bezug zu diesem Thema muss ich anmerken, dass man jedoch die Forschungen in diesem Bereich bis heute, geschweige denn in dem oben genannten Zeitraum, nicht als abgeschlossen ansehen kann. Sowohl GÖDELS als auch CHURCHS und TURINGS Werke wurden erforscht und kritisiert[253], und das

249. Ebd.
250. Ebd., S. 106.
251. Ebd., S. 107.
252. Nelson 1927, S. 125.
253. S. z.B. Wittgenstein 1984, Lampert 2017, K. Müller 2018 und Rodych 1999.

zeigt, dass dies noch kein abgeschlossenes Thema ist. Ein Beispiel eines aktuellen Forschungsprogramms zur Kritik des Church-Turing-Theorems ist *The New Logic Project*.[254]

Hier werde ich das, was ich bisher über die *kritische Methode* im Zusammenhang mit der Mathematik erklärt habe, zusammenfassen. Die klare Trennung zwischen dem Inhalt und dem Gegenstand der (kritischen) Erkenntnis ist in diesem Kontext von zentraler Bedeutung. Außerdem sind *Vollständigkeit* und *Entscheidbarkeit* Eigenschaften, die Nelson vom mathematischen System erwartet, wobei Anschaulichkeit für ihn selbstverständlich ist. So ist die Mathematik das optimale Milieu für seine wissenschaftliche Methode, in dem sie sich entfalten kann, weit abseits von den Komplexitäten und den Vagheiten, die der Philosophie innewohnen. Seine Erwartungen wurden durch Gödels und Churchs Arbeiten jedoch angefochten. Diese Herausforderungen sind allerdings selbst ihrerseits als Thesen kritisiert und in Frage gestellt worden. Wenn man in dem philosophischen Gedankensystem Nelsons immanent denkt, stellt sich die Mathematik wegen ihrer (überwiegenden) Anschaulichkeit und systematischen Gestalt im Vergleich mit der Philosophie viel mehr in Form einer Wissenschaft dar, trotz der Herausforderungen in ihren Grundlagen.

2.3.3 Nelson und Hilbert

An dieser Stelle der Arbeit möchte ich zwischen dem bereits untersuchten und dem zweiten Thema aus der Liste *a*) bis *c*) eine Brücke schlagen. Das untersuchte Thema bezog sich auf Punkt *c*), nämlich die Untersuchung der Nelsonschen wissenschaftlichen Methode im Kontext der Mathematik, das zweite auf Punkt *b*), nämlich die Natur und den Ursprung der mathematischen Erkenntnisse in der Mathematikphilosophie Nelsons. Die Verbindung zwischen diesen beiden Themen werde ich durch die Betrachtung der Stellung von Hilberts philosophischen Einsichten in dem philosophischen Gedankensystem Nelsons herstellen. Der Vergleich basiert nicht auf einer ausführlichen Untersuchung der Mathematikphilosophie Hilberts. Diese wird nur mittels Sekundärliteratur, nämlich Leonard Nelsons, Volker Peckhaus', Kay Herrmanns und José Ferreirós' Erläuterungen, bearbeitet, jedoch wird seinem Beitrag zum *Axiomatischen Denken* Hilbert 1918 mehr Raum gegeben.

Die Gemeinsamkeiten der Philosophie der Mathematik Nelsons und der von Hilbert beschränken sich auf das, was oben erwähnt wurde, nämlich die Anwendung

254. S. Lampert 2018.

der *axiomatische/kritische* Methode, um die Existenz einer *Sicherheit* in der Mathematik nachweisen zu können. Der Begriff *Sicherheit* besitzt jedoch verschiedene Bedeutungen. HERRMANN weist auf diesen Punkt folgendermaßen hin:

> „Zudem muss angemerkt werden, dass das Grundanliegen der hilbertschen Axiomatik, nämlich den Axiomen Festigkeit und Sicherheit zu geben, indem sie zum Gegenstand einer Metasprache gemacht werden, der fries-nelsonschen Philosophie entgegenläuft. Es sind ja gerade Fries und Nelson, die darauf hinweisen, dass die mathematischen Erkenntnisse dem Irrtum ausgesetzt sind, sobald sie in Urteile gefasst werden.“[255]

Diese Anmerkung HERRMANNs bedeutet nicht, dass nach FRIES und NELSON keine Art *Sicherung* irgendwie möglich ist, sondern sie macht darauf aufmerksam, dass ein Unterschied zwischen der nach HILBERT erreichbaren mathematischen *Sicherheit* und der *Sicherheit* in der Mathematik, die FRIES und NELSON *aufweisen* wollen, existiert. Nach HILBERTs Interpretation entspringt diese *Sicherheit* aus der Logik. Dies werde ich im Folgenden näher betrachten.

FERREIRÓS argumentiert in Ferreirós 2009, dass HILBERT mindestens für eine Epoche seines Lebens als Logizist angesehen werden kann. Diese Behauptung wurde von ihm durch Hinweise auf mehrere Stellen von HILBERTs Schriften, Vorträgen und Vorlesungen belegt. Obwohl die logizistischen Einsichten bei HILBERT, die in den ersten Jahren von RICHARD DEDEKIND maßgeblich beeinflusst waren, von zentraler Bedeutung sind, führt FERREIRÓS aus:

> „The development of Hilbert's foundational ideas was marked by exploration and doubts much more than his confident (but conflicting) remarks suggest. He explored in detail ideas related to all the three famous, classical foundational viewpoints – intuitionism, formalism, logicism – and one can go as far as saying that he extracted from each of them some viewpoints and methods of lasting value.“[256]

Dennoch übertreffen die logizistischen Einsichten HILBERTs, wie in dem Beitrag von FERREIRÓS gezeigt wurde, die anderen. Diese Einsichten kommen besonders deutlich in seinem Vortrag „Axiomatisches Denken“[257] zum Vorschein:

> „Nur in zwei Fällen nämlich, wenn es sich um die Axiome der *ganzen Zahlen* selbst und wenn es sich um die Begründung der *Mengenlehre* handelt, ist dieser Weg der Zurückführung auf ein anderes spezielleres

255. Herrmann 2004 S. 200.
256. Ferreirós 2009, S. 34.
257. Hilbert 1918.

> Wissensgebiet offenbar nicht gangbar, weil es außer der Logik überhaupt keine Disziplin mehr gibt, auf die alsdann eine Berufung möglich wäre.“[258]

Wie wir später ausführlicher betrachten werden, verknüpft er die *Sicherheit* der Mathematik mit ihrer Widerspruchslosigkeit. Darüber hinausgehend, um die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie und der Mengenlehre zu zeigen, sagt er sogar, dass notwendigerweise gezeigt werden muss, dass sie Teile der Logik sind:

> „Da aber die Prüfung der Widerspruchslosigkeit eine unabweisbare Aufgabe ist, so scheint es nötig, die Logik selbst zu axiomatisieren und nachzuweisen, daß Zahlentheorie, sowie Mengenlehre nur Teile der Logik sind.“[259]

Diese Erläuterungen Hilberts, Dedekinds Einflüsse auf ihn, Freges Einwände ihm gegenüber sowie Zermelos Beiträge als sein Schüler wurden u.a. von Ferreirós detailliert betrachtet, um seine logizistischen Überzeugungen darzustellen. Ich werde mich hier nur auf Hilberts Korrespondenz mit Frege beschränken. Da diese in Peckhaus 1990, auf das in Ferreirós 2009 des öfteren hingewiesen wird, ausführlicher berücksichtigt wurde, werde ich mich darauf beziehen. An dieser Stelle ist allerdings zunächst erwähnenswert, dass laut Ferreirós Hilberts Logizismus nicht nur ein kurzlebiger Ausbruch bei ihm war:

> „We began this paper with Hilbert’s logicistic ideas of 1917 and the usual understanding that they were but a short-lived outburst of enthusiasm. Now we are coming to consider it plausible that, quite to the contrary, what was short-lived is the critique of logicism expressed in Hilbert’s address at the ICM of 1904.“[260]

Ferner verweist er auf einen von Peckhaus vorgelegten Beleg, nämlich eine Aussage in einem Brief von Hessenberg an Nelson am 7.2.1906. Er sieht ihn als eine Stütze für seine Interpretation (vgl. Ferreirós 2009, S. 65):

> „Zermelo ist der Ansicht, daß auch Hilberts Logizismus undurchführbar ist, hält aber Poincaré’s Einwendungen für unbegründet.“[261]

Die starke Verbindung zwischen der Mathematik und der Logik bei Hilbert war auch ein Thema der Untersuchung bei Peckhaus. Bei der Betrachtung von

258. Hilbert 1918, S. 412.
259. Ebd.
260. Ferreirós 2009, S. 64f.
261. Peckhaus 1990, S. 116.

„*Widerspruchsfreiheit als Problem*“[262] hat er auf solche Einsichten HILBERTs hingewiesen, die zeigen, dass Widerspruchsfreiheit in HILBERTs Mathematikphilosophie grundlegend ist. Dies ist damit begründet, dass HILBERT für den Bereich der Mathematik Widerspruchsfreiheit mit Existenz gleichsetzt. PECKHAUS greift dies auf und erklärt, dass HILBERT ein konkretes Beispiel dazu in seinem Vortrag auf dem *internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris* erläutert, nämlich:

> „Der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Axiome der reellen Zahlen sei zugleich ein Beweis für die mathematische Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen, also des Kontinuums.“[263]

Darüber hinaus verweist er auch auf ein anderes konkretes Beispiel in HILBERTs Vortrag, das jedoch ein negatives ist, was nämlich für ihn ein „mathematisch nicht existierender Begriff“[264] ist. Da die Aufstellung eines axiomatischen Systems für das *System aller Mächtigkeiten überhaupt* unmöglich ist, ist das letztgenannte System ein Beispiel für einen „mathematisch nicht existierende[n] Begriff“.

Des Weiteren untersucht PECKHAUS die „*philosophischen Implikationen des axiomatischen Programms*“[265], wobei er den Briefwechsel zwischen HILBERT und GOTTLOB FREGE[266] heranzieht. Dabei existieren Punkte, wodurch sich der Sinn der oben genannten Stellungnahme HILBERTs erschließt. Es sind diese Punkte, die klarmachen, aus welchem Grund er die Widerspruchsfreiheit der mathematischen Axiome mit der Existenz der entsprechenden Gegenstände gleichsetzt. Außerdem tragen FREGEs Einsichten, nachzulesen in seiner Korrespondenz mit HILBERT, dazu bei, dass sich die Kluft zwischen NELSONs und HILBERTs Mathematikphilosophie offenbart. Dafür werde ich hier nur die Ausschnitte von PECKHAUS' Erörterungen dazu wiedergeben, die für das letztgenannte Ziel relevant sind.

Als eine Reaktion auf die Veröffentlichung des Festschriftbeitrages über die „*Grundlagen der Geometrie*“ hat FREGE in einem Brief „HILBERTs Gebrauchsweisen der Ausdrücke ‚Erklärung‘, ‚Definition‘ und ‚Axiom‘, die nicht hinreichend voneinander geschieden seien“[267], kritisiert. PECKHAUS führt dazu ein Beispiel an, das laut FREGE zeigt, dass insbesondere die Grenzen zwischen „Definitionen“ und „Axiomen“ unscharf sind. Um die für unser Thema relevanten Meinungsunterschiede zu betrachten, werde ich mich hier auf ihre Erläuterungen zu dem Begriff „Axiom“ beschränken.

262. Ebd., S. 34.
263. Ebd., S. 36.
264. Vgl. ebd., S. 36.
265. Vgl. ebd., S. 40.
266. FRIEDRICH LUDWIG GOTTLOB FREGE (1848 - 1925) war ein deutscher Logiker, Mathematiker und Philosoph.
267. Peckhaus 1990, S. 41.

Die Bedeutung des Begriffs „Axiom", die HILBERT in dem Beitrag erläutert, ist für FREGE eine „nicht recht faßbare".[268] FREGE selber meint, dass Axiome diejenigen Sätze sind,

> „die wahr sind, die aber nicht bewiesen werden, weil ihre Erkenntnis aus einer von der logischen ganz verschiedenen Erkenntnisquelle fliesst, die man Raumanschauung nennen kann. Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen. Das bedarf also keines weiteren Beweises."[269]

Diese Ansicht FREGEs über „Axiome" und ihre Wahrheit ist HILBERTs Verständnis vollkommen entgegengesetzt. PECKHAUS folgert daraus, dass FREGE somit das ganze axiomatische Programm in Frage stellt:

> „Mit dieser Auffassung der Widerspruchsfreiheit als Folge der Wahrheit der Axiome stellt Frege die Bedeutung des Konsistenzbeweises in Frage. Freges Kritik ist also nicht reduzierbar auf einen Appell an größere Klarheit und begriffliche Strenge, sondern sie rüttelt an den Grundfesten von Hilberts axiomatischem Programm."[270]

PECKHAUS beschreibt diese Gegensätzlichkeit als eine Folge des Unterschiedes der Ziele, die FREGE und HILBERT jeweils bei ihrer Arbeit in der mathematischen Grundlagenforschung im Sinne hatten. Während er FREGEs Vorhaben in den *Grundlagen der Arithmetik* als

> „einen schrittweisen, strengen Aufbau der Arithmetik ausgehend von einer logistischen Begründung des Anzahlbegriffs."[271]

darstellt, sei HILBERTs Bestreben „pragmatisch an aktuellen Problemen mathematischer Forschung orientiert".[272] HILBERT will damit in der mathematischen Forschung sicherstellen, dass ihre wichtigsten Ergebnisse verstanden werden können.[273] Für ihn sind Axiome

> „Merkmale der in den «Erklärungen» gesetzten und dadurch vorhandenen Begriffe."[274]

268. Frege 1976, S. 61f, entnommen von Peckhaus 1990, S. 41.
269. Frege 1976, S. 63, entnommen von Peckhaus 1990, S. 41.
270. Peckhaus 1990, S. 41.
271. Ebd.
272. Ebd.
273. Vgl. ebd., S. 42.
274. HILBERTs Brief an FREGE, datiert 29.12.1899. S. Frege 1976, S. 65ff, zitiert nach Peckhaus 1990, S. 42.

Dabei spielt aber die Freiheit der Mathematiker beim Setzen der Merkmale eine zentrale Rolle,

> „denn sobald ich ein Axiom gesetzt habe, ist es vorhanden und «wahr» ; [...] Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge.“[275]

Die Darstellung der Unterschiede zwischen HILBERTs und FREGEs Einsichten klärt einerseits HILBERTs Sichtweise bezüglich der Grundlagen der Mathematik, mit denen wir NELSONs Erläuterungen besser nachvollziehen können. Andererseits sind die Unterschiede auch unmittelbar für das Verständnis der Mathematikphilosophie NELSONs eine große Hilfe.

Obwohl FREGEs Einsichten mit denen von NELSON nicht ganz übereinstimmen, sind ihre Gemeinsamkeiten jedoch deutlich. Insbesondere hat die klare Trennung zwischen „Definition“ und „Axiom“, die oben als ein zentrales Thema bei FREGE bezeichnet wurde, in NELSONs Philosophie ebenso eine grundlegende Stellung. Die Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Urteilen, die er von KANT übernommen hat, kann als einer der entscheidendsten Aspekte der Mathematikphilosophie NELSONs betrachtet werden. Die notwendige Bedingung für diese Unterscheidung ist, dass „Definitionen“, woraus analytische Sätze abgeleitet werden, von „Axiomen“, die selber und ihre Konsequenzen nach NELSON synthetische Sätze sind, strikt unterschieden werden. Die andere Ähnlichkeit ihrer Denkweise ist die Erkenntnisquelle der Axiome. Sie glauben beide, dass diese außerhalb der Logik liegt. Dies kann im Grunde als eine Konsequenz der vorhergehenden Gemeinsamkeit gesehen werden, denn nur analytische Urteile können ausschließlich aus der Logik entspringen. Darüber hinaus glauben sie beide jedoch, dass die (geometrischen) Axiome aus der Raumanschauung entstehen.

Der zwischen FREGE und NELSON dennoch bestehende Meinungsunterschied soll nun aufgegriffen werden. Dieser besteht in der Notwendigkeit des *Beweises der Widerspruchslosigkeit* in einem axiomatischen System. FREGE sieht einen solchen Beweis für ein axiomatisches System als unnötig und überflüssig an (s.o.). NELSON hingegen ist anderer Meinung. Obwohl für ihn dieser Beweis kein Kriterium für die Wahrheit der mathematischen Axiome ist, sieht er ihn als notwendig an, um die Übereinstimmung zwischen den reflektierten Urteilen, die wir Mathematik nennen, und mathematischen Erkenntnissen zu überprüfen. Dieser Zwiespalt geht vermutlich auf die Andersartigkeit ihres jeweiligen Verständnisses des Begriffs Axiom zurück. NELSON erkennt „Axiom“ als ein „Urteil“ an und ähnlich FREGE

275. Ebd.

glaubt er, dass diese besonderen Urteile keinen Beweis benötigen. Aber wie schon in dem Abschnitt über seine Erkenntnistheorie erwähnt wurde, unterscheidet er auch zwischen Urteil und Erkenntnis. Die Urteile, die wahr sind, sind mittelbare Erkenntnisse, deren Wahrheit auf eine unmittelbare Erkenntnis zurückgeht. Daher sind Axiome bei Nelson Urteile, die mittels ihrer Begründung, d.h. Zurückführung auf unmittelbare mathematische Erkenntnisse, wahr sein können. Diese Begründung oder Zurückführung, wie in dem obigen Teil über die Methode im Kontext der Mathematik gesagt wurde, findet entweder durch *Deduktion* oder *Demonstration* statt. Folglich sind die Axiome mittelbare Erkenntnisse oder, anders gesagt, durch ein Urteil reflektierte mathematische Erkenntnisse. Diese Reflexion kann – wie später ausführlicher darzulegen ist – vorschnell und unvollständig erfolgt sein. Die Widersprüchlichkeit eines axiomatischen Systems jedoch kann ein Beleg dafür sein, dass diese Reflexion nachlässig vorgenommen wurde. Andererseits ist seine Widerspruchslosigkeit nicht zwingend ein Kriterium für seine Wahrheit. Laut Nelson kann also die Überprüfung der Widerspruchslosigkeit eines axiomatischen Systems als ein Teil des Deduktionsprozesses angesehen werden.

Nach dieser Einleitung in Hilberts Mathematikphilosophie und dem Vergleich zwischen Nelsons und Freges Einsichten widme ich mich daran anschließend Nelsons Äußerungen über Hilberts Mathematikphilosophie. Im Briefwechsel zwischen Nelson und Hessenberg haben sie ihre Einschätzungen zu Hilberts Mathematikphilosophie niedergeschrieben.[276] Das Interessante hier ist der Prozess, währenddessen sich die anfänglich scharfen Einwände Nelsons gegen Hilbert in eine Sympathie für dessen philosophische Einstellungen zur Mathematik verwandeln. Der Austausch zwischen den beiden Begründern der Neuen Friesschen Schule beginnt mit einem Brief Nelsons im Februar 1905. Dieser enthält die erste Fassung des Manuskripts des Vortrags „Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewissheit“ Nelson 1905 an Hessenberg „mit der Bitte [...], er möge ihm zu einem Titel raten“. Als Antwort verweist er Nelson auf Hilberts philosophische Schriften. Im Juni 1905 schrieb Nelson an Hessenberg:

> „Von Hilberts philosophischen «Resultaten» mach’ Dir nur lieber keine große Hoffnungen. Ich bin bereits durch das, was er bisher davon produziert hat, recht enttäuscht. So lange er mit rein mathematischen Mitteln operiert, ist er zwar oft schwer verständlich, aber was er bringt, ist natürlich bewunderungswürdig. Daß er das Bedürfnis nach mehr fühlt, ist ja auch sehr schön, aber so wie er das rein Mathematische

276. In diesem Zusammenhang betrachtet Peckhaus die Korrespondenz zwischen Nelson und Hessenberg. Vgl. Peckhaus 1990, S. 166ff.

> verläßt, wird er einfach albern. Von der ganzen kritischen Auffassung der Ursprungsfrage hat er offenbar niemals gehört, soviel er auch über das Thema redet, erwähnt er doch nicht einmal ihre Möglichkeit, geschweige denn ihre Existenz. Ein von andern Sätzen unabhängiges Axiom ist für ihn von vornherein identisch mit einer neuen Beobachtung. [...] Um den Widerspruch in der Mengenlehre zu beseitigen, will er (nicht etwa die Mengenlehre sondern) die Logik reformieren. Nun, wir wollen sehen, wie er es macht.“[277]

Hessenberg war mit dieser Äußerung Nelsons überhaupt nicht einverstanden, und in einem Brief hat er dies, wie unter erkennbar, dargestellt. Das folgende Zitat kann vielleicht als Ausgangspunkt für Nelsons Meinungsänderung Hilbert gegenüber gesehen werden:

> „Daß man, um die Mengenlehre widerspruchsfrei zu machen, die Logik reformieren muss, halte ich durchaus nicht für paradox. Erstens einmal ist die Logik bisher überhaupt noch nicht scharf von arithmetischen Betrachtungen zu trennen. Zweitens aber: wenn in der Mengenlehre Paradoxien stecken, so sind entweder die Schlüsse unkorrekt, oder die gebildeten Begriffe sind widerspruchsvoll. In beiden Fällen ist es eine logische Aufgabe, entweder den Schlussfehler oder den der Begriffsbildung aufzudecken. Und mit Recht, meines Erachtens, wird der Fehler in der Begriffsbildung gesucht. Nach den Gesetzten der Logik aber fällt ein Ding a entweder unter den Begriff b oder nicht. Ein anderes Princip wird beim Mengenbegriff nicht gebraucht. Hilbert stellt nun für die Arithmetik in dem betreffenden Vortrag viel schärfere Anforderungen an die Begriffsbildung. Dadurch wird z.B. der paradoxe Begriff der Menge aller Mengen oder der Menge aller Dinge von vornherein hinfällig, ebenso wird es von vornherein unzulässig[,] den Begriff der Menge aller Mengen[,] die sich selbst enthalten, zu bilden.“[278]

Peckhaus verweist zunächst darauf, dass Hessenberg in seinen Aussagen auf Hilberts Vortrag in Heidelberg „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“ rekurriert und danach auf den erkenntnistheoretischen Aspekt von Hessenbergs Überlegungen zu Hilberts Axiomatik:

> „Das Problem des Ursprungs der Erkenntnis mag Hilbert wohl nicht bekannt sein. Es gehört ja aber auch nicht in die Logik sondern in die Psychologie.“[279]

277. Peckhaus 1990, S. 166.
278. Hessenbergs Brief an Nelson, dat. Grunewald, 26.06.1905. S. Peckhaus 1990, S. 167.
279. Ebd.

Nelson liest diesen Beitrag Hilberts. Er schreibt seine Meinung über diesen Beitrag und vielleicht auch über Hilberts Vorlesung „Über die logischen Principien des mathematischen Denkens“ in zwei verschiedenen Briefen. In dem Brief an Hessenberg vom 7.7.1905 sagt er:

> „Der Grundmangel des Ganzen scheint mir darin zu liegen, daß er [Hilbert] kein Princip zur Scheidung analytischer u[nd] synthetischer Urteile hat u[nd] diesen ganzen Unterschied nicht kennt. Daher das gänzliche Durcheinander von Logik u[nd] Arithmetik. Der Begriff der Menge ist zweifellos *kein* arithmetischer, sondern ein rein philosophischer. Die Frage kann nur sein, ob er metaphysisch (als Kategorie der Vielheit, nämlich der Dinge, die unter einen Begriff fallen) oder irgend wie rein logisch unterzubringen ist, was ich nicht glaube.“[280]

In seinem zweiten Brief vom 16.8.1905 führt er dazu aus:

> „Ich glaube damit was die Sache betrifft, ganz mit Hilbert übereinstimmen u[nd] nur seine unbeholfene Sprache ins Philosophische zu übersetzen. Was ich damals gegen seine scheinbare Ineinssetzung von Logik u[nd] Arithmetik schrieb, muß ich ganz zurücknehmen, er stellt nur den Sprachgebrauch vielfach auf den Kopf, steht aber im Wesentlichen auf dem von mir angegebenen Standpunkt. Er fügt jedesmal einem aufgestellten Axiomensystem das allgemeine Axiom hinzu: Es *giebt* Dinge, die etc.“[281]

Nelson sieht die Aufgabe des Hilberts Axiomatischen Programms, d.h. die Darlegung der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems, durch die *Kritische Mathematik* erreichbar:

> „Es sei sein höchstes Ziel bei all’ diesen Untersuchungen, zu beweisen, daß jedes mathematische Problem lösbar sei, ein Ziel, von dem er noch gar nicht absehen könne, wie es zu erreichen sei. Nach meiner Ansicht ist dies Ziel für die kritische Auffassung eo ipso erreicht. Dies Beispiel kann zeigen, daß man mit rein mathematischen u[nd] logischen Methoden bei diesen Fragen nicht auskommt, daß vielmehr die Kritik (die Frage des Ursprungs) nicht zu umgehen ist.“[282]

280. nelsons Brief an hessenberg, dat. Grunewald, 7.7.1905. S. Peckhaus 1990, S. 167.
281. nelsons Brief an hessenberg, dat. Grunewald, 16.08.1905 undat. Postkarte, Poststempel Berlin, Göttingen. S. Peckhaus 1990, S. 167f.
282. Nelsons Brief an Hessenberg, dat. Westend, 14.8.1905. S. ebd., S. 168.

Es scheint so, dass Nelson hier von einigen Ansichten Hilberts absieht und versucht, sich auf ihre philosophischen Gemeinsamkeiten zu konzentrieren. Wie oben bereits erwähnt, hat Hilbert in seinen späteren Vorträgen sowie auch in seinen Schriften darauf hingewiesen, dass die Mathematik ihre Wurzeln in der Logik hat. In der Tat besaß er, wie Ferreirós argumentiert, mit Ausnahme einer kurzen Episode, starke logizistische Ansichten. Das Interessante daran ist, dass dies der Punkt ist, den Nelson in seinen Vorträgen und Schriften zu den Grundlagen der Mathematik widerlegt. Wie die obigen Zitate deutlich machen, betont er die Ähnlichkeiten zwischen der axiomatischen und der regressiven Methode, die Fries vorgestellt hat, und er glaubt, dass das Ziel des Hilbertprogramms durch Fries-Nelsons eigenes mathematik-philosophisches Konzept erreichbar ist. Nelson vertritt diese Ansicht trotz der Tatsache, dass die wissenschaftliche Methode nicht unabhängig von der Erkenntnisquelle betrachtet werden kann. Der Grund dafür kann wahrscheinlich in dem, was Hessenberg in dem o.a. Zitat angibt, gefunden werden, da Nelson in dem oben erwähnten Vortrag ausführt:

> „Diese Existenzialaxiome lassen sich allerdings durch eine geeignete Methode auf ein minimales Maß einschränken. Dadurch nämlich, daß man die Zahlen von vornherein nur dadurch definiert, daß sie ein System von Dingen bilden, welches die in arithmetischen Axiomen formulierten Bedingungen erfüllt. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß alle durch diese Methode überhaupt ableitbaren Eigenschaften der Zahlen in dem bloßen Begriff der Zahl ihren Grund haben. Allein, so fruchtbar sich diese (auch in der Geometrie anwendbare) «axiomatische» Methode für gewisse mathematische Untersuchungen erweist, so ist es geltend zu machen, daß den auf solche Weise definierten Dingen zwar, sofern die definierenden Bedingungen ein in sich widerspruchsloses System bilden, logische Möglichkeit, an und für sich aber noch keineswegs mathematische Existenz zukommt."[283]

Auch in diesem Zitat hat Nelson Hilberts Arbeit so reflektiert, wie er sie in den Briefen erklärt hatte. Zudem ergänzt er jedoch, dass die Darstellung dieser Axiome und ihre Widerspruchslosigkeit nicht als Grund für die Existenz der in ihnen benannten Gegenständen angenommen werden können.

Um dieses Problem anzugehen, nämlich die Existenz in der Mathematik zu klären, sieht er die *Kritische Mathematik* als notwendig an. In diesem Zusammenhang verweist Peckhaus auf eine „populäre Fassung des Aufsatzes [Nelsons], die in der

283. Nelson 1905, S. 43f.

«Illustrierten Zeitschrift für Astronomie und verwandte Gebiete» Das Weltall veröffentlicht wurde“[284], in dem er die Aufgabenbeschreibung der kritischen Mathematik und die Rolle, die HILBERTs axiomatische Methode in ihr einnimmt, darlegt:

> „Es ist dies die Aufgabe der von HILBERT ‚axiomatisch‘ genannten Untersuchungsweise, die er dahin definiert, daß sie eine mathematische Wahrheit nicht mit Rücksicht auf neue, aus ihr abzuleitende Sätze zu erforschen habe, sondern, «daß sie vielmehr die Stellung eines Satzes innerhalb des Systems der bekannten Wahrheiten in der Weise klarzulegen habe, daß sich sicher angeben läßt, welche Voraussetzungen zur Begründung jener Wahrheit notwendig und hinreichend sind».[285] Diese axiomatische Untersuchung erschöpft indessen nicht die Aufgabe der Kritischen Mathematik. Wir können nämlich den regressiven Gedankengang noch weiter fortsetzen, indem wir die Frage aufwerfen: Welches ist der Ursprung der Axiome, und worauf beruht ihre Geltung? Die Untersuchung dieser Frage ist die zweite Aufgabe der Kritischen Mathematik. Den Gegenstand dieser Aufgabe bildet die Erkenntnisquelle der mathematischen Axiome und somit der mathematischen Wahrheiten überhaupt. Während also die erste Aufgabe wesentlich logischer Natur ist, ist die zweite Aufgabe erkenntnistheoretischer Natur.“[286]

In diesem Zitat ist klar erkennbar, dass NELSON den von HESSENBERG erläuterten Punkt über HILBERTs Mathematikphilosophie konzediert: Nämlich, dass HILBERTs Axiomatik, in der die Logik eine zentrale Rolle spielt, ein unerlässlicher Teil der *Kritischen Mathematik* ist. Diese jedoch ist für die Darlegung der Existenz der mathematischer Objekte nicht hinreichend, dafür muss die Quelle der mathematischen Erkenntnisse betrachtet werden. Das ist allerdings nicht innerhalb der Logik machbar, sondern es ist eine Aufgabe der Erkenntnistheorie, oder wie HESSENBERG, angelehnt an FRIES, sagte, eine Aufgabe der *Psychologie*.

2.3.4 Ideal und Idealisierung

Zu Anfang dieses Kapitels wurde bereits kurz in der Beschreibung der Rezeption NELSONs, die Philosophie KANT-FRIES’ betreffend, sowie in den erkenntnistheoretischen Voraussetzungen als auch in der Untersuchung der kritischen Methode (2.1.1-2.2) das Thema Psychologie aus NELSONs Sicht angerissen. An dieser Stelle werde ich erklären, wie NELSON das Problem der Mathematik im Kontext der

284. Peckhaus 1990, S. 164.
285. Hilbert 1903, S. 88.
286. Nelson 1906, S. 149, entnommen von Peckhaus 1990, S. 164.

Psychologie gesehen hat. In dem von Paul Bernays verfassten Protokoll zu den „Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften“[287] wurde gesagt:

> „Wir gingen auch noch kurz auf den psychologischen Charakter der reinen Anschauung ein. Zu den Vorstellungen der geometrischen Gebilde gelangen wir durch ein Abstraktionsverfahren, welches wir auf Gegenstände der äußeren Wahrnehmung anwenden. Diese Abstraktion geschieht nicht in der Weise, dass wir die Merkmale, die mehreren Gegenständen gemeinschaftlich sind, absondern, sondern sie besteht in einer Idealisierung, das heißt einer Annäherung, für welche die Richtung durch die reine Anschauung vorgeschrieben ist. Die Möglichkeit eines solchen Verfahrens setzt eine nicht-empirische Vorstellung von etwas voraus, dem als Grenze die Idealisierung zustrebt. Da diese nicht nach Begriffen geschieht, so muss jenes Etwas anschaulich aufgefasst werden.“[288]

Das Thema der Diskussion ist hier, wie die geometrischen Erkenntnisse – genauer gesagt, die für diese grundlegende reine Anschauung – erlangt werden können. Wenn Nelson also in der Kritischen Mathematik die Erkenntnisquelle untersucht, meint er damit nicht, wo diese Erkenntnisse unabhängig von uns existieren, sondern, wie und durch welche Mittel *wir* zu ihnen gelangen. Paul Bernays schreibt dazu:

> „Mit der Behauptung, dass wir eine Anschauung von geometrischen Gebilden besitzen, soll aber nicht gesagt sein, dass wir in der Einbildung ein vollkommenes Phantasiebild, etwa einer Geraden oder eines Punktes, haben können, vielmehr gibt uns die reine Anschauung nur eine Regel, äußere Gegenstände nach bestimmten Gesichtspunkten aufzufassen und lässt uns die Gesetze ihrer Zerlegung und Zusammensetzung erkennen.“[289]

Im Folgenden werde ich die von Nelson erwähnten Punkte in den obigen Zitaten, die die zweite Aufgabe der *Kritischen Mathematik* darstellen, zergliedern. Von diesem Punkt an wird ausschließlich Nelsons Mathematikphilosophie betrachtet. Dazu muss ich die zentralen Begriffe der obigen Zitate in Betracht ziehen: *reine Anschauung*, *Abstraktion*, *Ideal* und *Idealisierung*.

Es wurde schon im Teil über die erkenntnistheoretischen Voraussetzungen darauf hingewiesen, dass Nelson die Existenz eines Ideals als für jede Idealisierung

287. Nelson 2004c.
288. Ebd., S. 50.
289. Ebd., S. 50f.

notwendig erachtet. An dieser Stelle müssen als erstes die beiden Äußerungen Nelsons darüber wiedergegeben werden, und danach werde ich versuchen, die hier behandelten Themen zu analysieren. Nelson führt in dem Vortrag (Nelson 1905), dessen Hauptideen ihre Wurzeln in den Hilbertschen Schriften zur Axiomatik der Geometrie (vgl. Peckhaus 1990 S. 166)haben, aus:

> „Allein, jede Idealisierung setzt ein Ideal voraus, und wir müssen uns daher fragen, von welcher Beschaffenheit und welchen Ursprungs denn das hier vorausgesetzte Ideal sein soll? Dies Ideal kann offenbar nicht selbst der Beobachtung entlehnt sein, da es ja gerade die Norm zur Korrektur der Beobachtung bilden soll. Dies Ideal ist in der Tat nichts anderes als die reine Anschauung und der hier als Idealisierung bezeichnete Prozeß besteht nicht sowohl in dem Übergang von der ‚Anschauung' zu den Axiomen als vielmehr in dem Übergang von der empirischen Anschauung zur reinen (nicht ‚inneren') Anschauung."[290]

Fast neun Jahre später hat er in seinem Vortrag in Paris „Des fondements de la géométrie" eine ähnliche Aussage gemacht, diesmal aber mit mehr Information über die Hauptbegriffe *Idealisierung* und *Ideal*:

> „In der Tat setzt jede Idealisierung ein Ideal voraus, das die Art des Vorgehens regelt. Ohne das Ideal würde der Idealisierung die Norm fehlen, und sie wäre willkürlich. Wäre sie aber willkürlich, so könnte sie keinen Anspruch auf strenge Genauigkeit und Allgemeingültigkeit erheben. Denn wir hätten keine Gewähr, daß, wenn wir uns einmal auf die Idealisierung eingelassen haben, diese unbegrenzt im Einklang mit unseren immer genauer werdenden Beobachtungen bleiben würde. Sie wäre vielmehr ihrerseits einer ständigen Berichtigung unterworfen. Die Idealisierung setzt also eine Erkenntnis voraus, die sowohl von unseren Beobachtungen als auch von unserem Willen unabhängig ist. In Wahrheit geht man bei der Idealisierung der Beobachtung durch die Axiome nur von der sinnlichen zur reinen Anschauung über, das heißt, man abstrahiert von den zufälligen Gegebenheiten und der Ungenauigkeit der Sinne."[291]

Später erwähne ich einige Beispiele von Abstraktion im Kontext der Geometrie, die von Nelson vorgestellt wurden. Eines der seltenen Beispiele, an denen er demonstriert, wie Abstraktion im Kontext der Arithmetik vollzogen wird, stammt aus seinen "Vorlesungen über moderne Naturphilosophie":

290. Nelson 1905, S. 34.
291. Nelson 1970a, S. 173f.

> „Die Rechnungsoperationen bestehen in der Anwendung gewisser allgemeiner Prinzipien. Bei der Multiplikation mehrstelliger Zahlen z.B. verfahren wir folgendermaßen:
>
> $$7.23 = 7.(20 + 3) = 7.20 + 7.3 = 140 + 21 = 161.$$
>
> Anstatt also die Summen mit einer Zahl zu multiplizieren, multiplizieren wir jeden Summanden einzeln damit und addieren die beiden Produkte. Wir kommen so durch Abstraktion zu dem distributiven Gesetz der Multiplikation: $a(b + c) = ab + ac$. Dieses Gesetz ist nicht aus diesem Einzelfall erschlossen, es macht im Gegenteil diese Multiplikationsweise erst möglich, und es gilt mit voller Gewissheit für jede mögliche Multiplikation.“[292]

Alle wiedergegebenen Zitate, beginnend mit denen aus der Korrespondenz zwischen Nelson und Hessenberg bis zu diesem Abschnitt, haben nur ein Hauptanliegen, nämlich die Genese und Geltung der mathematischen Erkenntnisse – im Speziellen der geometrischen Erkenntnisse – zu klären. Dieses Thema wurde in Nelsons Artikel in der Zeitschrift „Das Weltall“[293] anhand von *zwei* Aufgaben der *Kritischen Mathematik* erläutert. Die *erste* Aufgabe war, die Akkumulation aller mathematischen Urteile in Form eines wissenschaftlichen Systems und mit einer spezifischen Struktur darzustellen, ähnlich dem, was Hilbert für die Euklidische Geometrie geleistet hat. Auf diese Weise wird die Stellung jedes Satzes in dem System der mathematischen Wahrheiten so geklärt, dass es möglich geworden ist, klarzustellen, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen für seine Begründung erforderlich sind. Somit wird einerseits erfassbar, dass die Geltung eines jeden Satzes in dem System abhängig von bestimmten Urteilen ist, des Weiteren, auf welche Weise jede Aussage aus anderen hergeleitet werden kann.[294]

Hiervon muss man jedoch die *Grundsätze* ausnehmen. Obwohl ihre Stellung somit in dem System evident wird, bleibt dennoch sowohl ihre Begründung – und daher ihre Geltung – als auch die Qualität ihrer Erlangung unbeleuchtet. Daher wurde bisher das Problem der Genese und Geltung der mathematischen Erkenntnisse lediglich partiell bearbeitet. Um dies zu vervollständigen, muss nun die Frage nach dem Ursprung und der Geltung der mathematischen Grundsätze ebenfalls untersucht werden. Nelson nennt dies die erkenntnistheoretischen oder psychologischen Betrachtungen der mathematischen Erkenntnisse und damit die sogenannte *zweite* Aufgabe der Kritischen Mathematik.[295] Hier ist der Punkt beachtenswert, dass

292. Nelson 2004d, S. 102.
293. Nelson 1906, S. 149.
294. Vgl. ebd.
295. Vgl. ebd.

das, was Hessenberg als Reaktion auf Nelsons Kritik an Hilberts Mathematikphilosophie geschrieben hat, im Grunde die Beschreibung der beiden Aufgaben der Kritischen Mathematik darstellt, darüber hinaus enthält seine Antwort den Hinweis auf die Auffassung, dass Hilberts Werk in diesem Kontext unter Bearbeitung der ersten Aufgabe subsumiert werden muss.

Die erkenntnistheoretischen Betrachtungen Nelsons, die Mathematik betreffend, können wie folgt aufgeteilt werden:

1) in diejenigen, in denen Nelson argumentiert, dass die Unterscheidung der logischen und empirischen Erkenntnisse nicht vollständig ist und den mathematischen Erkenntnissen weder logische noch empirische Erkenntnisquellen zugrunde liegen.

2) in diejenigen, die direkt auf die Beschreibung der Quelle der mathematischen Erkenntnisse und die Qualität ihrer Erlangung abzielt.

Ich werde mich an dieser Stelle nun auf den zweiten Punkt konzentrieren. Hier ist wichtig, dass die Voraussetzungen, die in 2.1.3 benannt wurden, in den Fokus kommen. Das wohl grundlegende Prinzip ist die Unterscheidung, die Nelson zwischen Vernunft und Verstand macht. Dieser Punkt, bei dem sich Nelson zumindest terminologisch von Kant unterscheidet, zeigt sich in der Einsicht Nelsons, dass die grundlegenden mathematischen Erkenntnisse – die synthetisch, *a priori* und anschaulich sind – mittels Vernunft erlangt werden und dunkel in uns liegen. Tatsächlich ist dies eine Facette des *Prinzips des Selbstvertrauens der Vernunft*, auf das ich später zurückkommen werde und das aussagt, dass diese grundlegensten mathematischen Erkenntnisse unmittelbare Erkenntnisse sind, die keine Begründung erfordern.

Bei der Abhandlung der Frage, wie diese Erkenntnisse erlangt werden, d.h. bei der Aufklärung der dunklen Vernunfterkenntnisse in uns, muss eine andere Voraussetzung Nelsons auch beachtet werden, nämlich die schon in Abschnitt 2.1.3 erwähnte Unterscheidung zwischen Urteil und Erkenntnis. Nicht jede Erkenntnis hat also die Form eines Urteils und nicht jedes Urteil ist eine Erkenntnis. Die Erkenntnisse, die die Form eines Urteils haben, sind mittelbare Erkenntnisse, und sie sind schon in unserem Bewusstsein und reflektiert. Die unmittelbaren Erkenntnisse sind jedoch nicht als Urteil gefasst worden. Sie sind selbst entweder anschaulich oder nicht anschaulich. Die anschaulichen Erkenntnisse sind zudem entweder empirisch oder rein. Diese drei Arten der unmittelbaren Erkenntnisse nach Nelson wurden zuvor mit seinen Beispielen bereits konkretisiert.[296] Hier ist allerdings unsere Betrachtung dieser Differenzierungen in den obigen Zitaten, insbesondere die letzten beiden, prioritär. Er hat in diesen Zitaten klar zwischen Axiomen und

296. S. 2.3.1 o. 2.1.3

reinen Anschauungen unterschieden. In den beiden zuletzt referierten Aussagen hat Nelson den Prozess beschrieben, wie die reine Anschauung erlangt werden kann. Dieser Prozess, den er „Idealisierung“ oder „Abstraktion“ nennt, hat als Ergebnis eine unmittelbare Erkenntnis, die nicht mehr dunkel ist. Die Abstraktion reiner Anschauungen aus empirischen Anschauungen ist jedoch laut Nelson nur ein Teil des Aufklärungsprozesses der unmittelbaren Erkenntnisse. Sie müssen nämlich noch reflektiert werden, damit sie jeweils in Form eines Axioms, also eines speziellen Urteils, in unser Bewusstsein gelangen. Daher umfasst der Prozess der Aufklärung von mathematischen unmittelbaren Erkenntnissen – oder der der reinen Anschauungen – sowohl das Verfahren der Idealisierung als auch der Reflexion. Bisher wurde die Existenz dieser besonderen Erkenntnisse nicht angesprochen. Nelson setzt aber ihre Existenz voraus. Er unterstreicht die Notwendigkeit ihrer Existenz, d.h. die der Ideale, für den Prozess der Idealisierung. Somit ist eine Norm gegeben, mit deren Hilfe laut Nelson der Idealisierungsprozess bewertet werden kann. Diese Forderung selbst setzt aber voraus, dass der Idealisierungsprozess einer Kontrolle wie auch einer Bewertung unterzogen werden kann, um sein Ergebnis mit dem angestrebten Ideal zu vergleichen.

Diese Tatsache ist nach Nelsons Meinung der grundlegende Unterschied zwischen Idealisierung und *Induktion*. Für beide Prozesse werden Prüfung und Kontrolle gefordert. Für einen davon ist das Ideal, die unmittelbare Erkenntnis, das Kriterium; für den anderen ist das Kriterium weitere Beobachtungen, deren Ergebnisse zufällig und nicht notwendig sind. Er fordert von dem ersten Prozess „strenge Genauigkeit“, und es scheint, dass diese hohe Erwartung nur durch ein solch starkes Kriterium erfüllbar ist. Durch die bloße wiederholte Beobachtung der Phänomene kann man wegen ihrer Zufälligkeit keineswegs zu einem solchen Ziel gelangen. Wie Nelson selbst sagt, setzt daher „die Idealisierung [...] eine Erkenntnis voraus, die sowohl von unseren Beobachtungen als auch von unserem Willen unabhängig ist“.[297] Diese Erkenntnis ist „eine nicht-empirische Vorstellung von etwas [...], dem als Grenze die Idealisierung zustrebt“.[298]

2.3.5 Reine Anschauung und Synthetisches *a priori*

Die oben genannte Idealisierung erfolgt nicht mittels Begriffen.[299] Nelson argumentiert, dass das, von dem wir eine Vorstellung erlangen, anschaulich, nicht aber begrifflich, aufgefasst wird. Nach Nelson heißt das, dass der Idealisierungsprozess nichts anderes als ein „Übergang“ von der sinnlichen zur reinen Anschauung

297. Nelson 1970a, S. 173f.
298. Nelson 2004c, S. 50.
299. Vgl. ebd.

darstellt. Somit wird bei der Idealisierung von willkürlichen Aspekten der Beobachtungen und Ungenauigkeiten der Sinne abstrahiert, um eine Annäherung an eine anschauliche Erkenntnis, die „strenge Genauigkeit und Allgemeingültigkeit“ besitzt, zu realisieren.[300] Wegen dieser Eigenschaften nennt man die zuletzt genannten anschaulichen Erkenntnisse reine Anschauungen, dabei bedeutet „rein“ in diesem Zusammenhang, dass die Anschauungen nicht empirisch sind. Das heißt jedoch nicht, dass diese nicht-empirischen anschaulichen Erkenntnisse logisch wären. Anhand eines Beispiels erklärt Nelson diese Behauptung und damit beschreibt er auch den Prozess der *Idealisierung*:

> „Wenn nun die reine Anschauung räumlicher Gebilde verschieden ist von einer empirischen Anschauung, so darf sie andererseits nicht mit einem Denkakt gleichgesetzt werden. Wenn wir etwa finden, dass eine gespannte Schnur einem Stück einer geraden Linie sehr ähnlich ist, so gelangen wir zu dieser Erkenntnis nicht dadurch, dass wir in Gedanken die verschiedenen geometrischen Axiome durchgehen und prüfen, ob sie mit größerer Annäherung für die Schnur gelten, sondern wir fassen die Ähnlichkeit mit einem Mal auf. Indem wir die Schnur empirisch wahrnehmen, stellt sie sich uns unmittelbar als etwas dar, dessen Idealisierung eine Gerade ergibt. Dies ist aber nur dadurch möglich, dass wir eine anschauliche Vorstellung von der Gestalt einer gradlinigen Strecke besitzen.“[301]

Das Beispiel soll darstellen, wie die Gerade als eine Form in der reinen Anschauung, die weder empirisch noch ein Denkakt ist, aus einer Vorstellung der Schnur, die ein „räumliches Gebilde“ ist, abstrahiert wird. Hiermit möchte Nelson auch seine Behauptung veranschaulichen, dass Geometrie weder auf Logik noch auf Empirie beruht: Die geometrischen Aussagen sind nicht analytisch und lassen sich auch im Empire nicht begründen. Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es, die Rechtfertigungen und Argumentationen darzustellen, die Nelson für seine kantianische Sichtweise liefert: Die mathematischen Aussagen im Allgemeinen – und die geometrischen im Besonderen – basieren auf synthetischen Urteilen *a priori* und reiner Anschauung. Zu diesem Zweck wird nach Nelson die *Deduktion* auf die mathematischen Axiome angewandt. Dies ist die zweite Aufgabe der „Kritischen Mathematik“, die in 2.3.4 vorgestellt wurde: die mathematischen Axiome werden auf ihren Ursprung und ihre Gültigkeit untersucht.

Dafür werde ich eine tiefer gehende Untersuchung der reinen Anschauung aus Nelsons Sicht vornehmen und die Frage stellen, ob alle mathematischen Erkennt-

300. Nelson 1970a, S. 173f.
301. Nelson 2004c, S. 51.

nisse solche Merkmale aufweisen. Hier werden zunächst nur die geometrischen Erkenntnisse als Beispiele für reine Anschauungen untersucht. Ausgehend von den bereits erwähnten Einsichten NELSONs bezüglich Geometrie lässt sich in diesem Kontext zusammenfassend feststellen, dass NELSON behauptet, dass die geometrischen Erkenntnisse anschaulich sind und eine nicht-empirische und nicht-logische Erkenntnisquelle haben. Er vertritt damit die KANTische Überzeugung, dass sie von synthetischer Natur sind. Bevor ich diese Thema aufgreife, müssen einige Punkte bezüglich der Anschaulichkeit mathematischer Erkenntnisse erwähnt werden, die auch zur Erklärung der Abstraktion dienen.

NELSON weist darauf hin, dass unsere Anschauungen geometrischer Gegenstände nicht als Bilder von den Gegenständen in unserer „Phantasie" gedacht werden dürfen, sondern vielmehr als Formen der Anschauungen. Diese vermitteln tatsächlich „Regeln", mit deren Hilfe man „äußere Gegenstände nach bestimmten Gesichtspunkten" begreift. Sie veranlassen uns, die Gesetze der „Zerlegung und Zusammensetzung" der Gegenstände zu finden. NELSON beschreibt daher die reine Anschauung als ein Instrument für die Erkenntnis von äußeren Gegenständen, d.h. für die Erfahrung:

> „Einen isolierten psychischen Akt, in welchem man ein vollkommenes Bild eines geometrischen Gegenstandes vor sich hat, gibt es nicht, vielmehr können wir die reine Anschauung nur aus der empirischen Anschauung als deren Form abstrahieren."[302]

Er betont sogar die Notwendigkeit der Erfahrung für die Genese der anschaulichen Vorstellungen:

> „Diese anschauliche Vorstellung tritt jedoch nie für sich auf, sondern nur als ein formales Moment der sinnlichen Anschauung."[303]

In seinem Vortrag über die Nicht-Euklidische Geometrie Nelson 1905 schildert NELSON, wie die geometrischen Grundbegriffen als Formen der Anschauung durch Abstraktion erlangt werden, obwohl diese Vorstellungen nicht aus der Erfahrung entspringen:

> „Die Abstraktion, durch die wir zu den geometrischen Grundbegriffen gelangen, besteht in der Reflexion auf die räumliche Form der Anordnung der uns in der Erfahrung gegebenen Sinnesqualitäten und auf die Ausdehnungs- und Maßverhältnisse dieser Anordnung, während wir von den in diesen Verhältnissen angeordneten Qualitäten selbst

302. Ebd.
303. Ebd.

> absehen. Wir erwerben uns also nicht erst die Raumanschauung durch Abstraktion aus der Erfahrung, sondern wir isolieren sie nur durch diese Abstraktion aus dem verbundenen Ganzen unserer Erkenntnis und bringen sie uns abgesondert zum Bewußtsein.“[304]

In Bezug auf die Anschaulichkeit der Mathematik betrachtet Nelson die Fehler auch, die in der Geschichte der Mathematik aufgrund eines starken Bezugs zur Anschauung entstanden sind. Er führt die „Differenzierbarkeit aller stetigen Funktionen“ als Beispiel dafür auf. Bis zum Ende des neunzehnten Jahrhundert wurde von vielen Mathematiker geglaubt, dass jede stetige Funktion differenzierbar ist. Am 18. Juli 1872 zeigte Weierstrass in einen Vortrag jedoch, dass stetige Funktionen existieren, die für keinen Wert differenzierbar sind.[305] Über die Gründe der Entstehung solcher Fehler sagt Nelson:

> „Ein solcher Fehler liegt jedoch in keinem Falle in der mathematischen Anschauung selbst. Er beruht vielmehr entweder darauf, daß man im Vertrauen auf die ungenaue empirische Anschauung diese unbewußt der reinen unterschiebt, oder darauf, daß man sich mit einer unvollständigen Induktion begnügt, die man fälschlich wie eine vollständige ansieht, d.h. also auf einem aus der Anschauung gezogenen Schlusse.“[306]

Von den beiden Gründen sieht er allerdings den zweiten als den Hauptgrund des Missverständnisses, so gelte bei dem diskutierten Beispiel:

> „Die Stetigkeit ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung der Differenzierbarkeit, und erst die strengere Unterscheidung dieser Begriffe, nicht aber eine Korrektur der Anschauung führte zur Richtigstellung des wahren Sachverhalts. – Wenn sich nur die differenzierbaren stetigen Funktionen durch stetig verlaufende Kurven geometrisch darstellen lassen, und wenn sich trotzdem die Existenz nicht differenzierbarer stetiger Funktionen auf analytischem Wege beweisen läßt, so steht doch das Ergebnis dieses Beweises keineswegs mit der Anschauung in Widerspruch.“[307]

Was Nelson für die Entstehung dieses Fehlers verantwortlich macht, ist daher der Prozess, dessen Produkt die Aussage ist, dass jede stetige Funktion differenzierbar ist. Dieser Prozess unterscheidet sich, Nelsons Ansicht nach, von der „Abstraktion“, deren Produkt mathematische Erkenntnisse sind. Er versteht ihn hier in der

304. Nelson 1905, S. 31.
305. Vgl. Spalt 2019, S. 192.
306. Nelson 1905, S. 35.
307. Ebd.

Tat als eine unvollständige „Induktion", d.h. als einen unvollständigen „Schluss". Darauf folgend nennt er den Grund für das Aufkommen dieser nicht gewünschten „Abstraktion" und das ist die mangelnde Ausarbeitung der Definition der stetigen Funktion. In seinem Vortrag in Paris „Des fondaments de la géométrie" äußert er sich zu diesem Thema in etwas anderen Worten:

> „In Wahrheit ergibt sich der scheinbare Widerspruch zwischen der Analysis und der geometrischen Anschauung nur aus einer unzulässigen Abstraktion. Ich habe bereits darauf hingewiesen, daß die analytische Definition der Stetigkeit nicht die Stetigkeit im Sinne der geometrischen Anschauung erschöpft."[308]

Er sagt hier, dass das Problem darin liegt, dass das, was in der Geometrie „Kurve" genannt wird, die Eigenschaft der Differenzierbarkeit in sich birgt:

> „[...] aber es ist nicht minder richtig, daß im geometrischen Sinne jede stetige Kurve eine Ableitung hat. Denn mit welchem Grund könnte man behaupten, daß jede stetige Funktion durch eine Kurve dargestellt werden kann?"[309]

In dem Vortrag führt er ein weiteres Beispiel in diesem Kontext an und sieht den Grund für das Missverständnis dort auch „in der vorschnellen Reflexion".[310]

Die Anschaulichkeit der mathematischen Erkenntnisse hat in NELSONs Mathematikphilosophie eine konstitutive Stellung. Tatsächlich garantiert die Konstruierbarkeit eines mathematischen Begriffes in der Anschauung seine Existenz. Angelehnt an KANTs Mathematikphilosophie sieht er ein reguläres siebzehnflächiges Polyeder als logisch möglich an. Wie ich schon in der Diskussion über die Meinungsunterschiede zwischen HILBERT und NELSON gesagt habe, ist diese logische Möglichkeit jedoch für die Existenz eines einem solchen Begriff entsprechenden Gegenstandes nicht hinreichend. Erst durch seine Konstruierbarkeit in der Anschauung kann man sich laut NELSON über seine Existenz sicher sein. In diesem Zusammenhang führt er in dem Vortrag „Die Sokratische Methode" aus:

> „Ja der Mathematiker ist nicht einmal genötigt, den Rückgang zu diesen Prinzipien erst künstlich zu vollziehen. Er kann von willkürlichen Begriffsbildungen ausgehen, über die Bildung dieser Begriffe hinaus getrost zu Urteilen fortschreiten, kurz, er kann unmittelbar systematisch und in diesem Sinne dogmatisch verfahren. Er kann dies, weil er in der

308. Nelson 1970a, S. 172.
309. Ebd.
310. Vgl. Nelson 1970a, S. 170f.

> Konstruierbarkeit der Begriffe ein Kriterium ihrer Realität besitzt, ein sicheres Kennzeichen dafür, daß sich seine Theorie nicht etwa auf bloße Fiktionen bezieht.“[311]

In anderen Worten verbindet NELSON mit „vorstellen“ zwei verschiedene Bedeutungen. „Vorstellen“ kann einerseits „denken“ bedeuten, sodass die „vorstellbaren“ Begriffe diejenigen sind, die keinen Widerspruch in sich tragen. Andererseits kann der Begriff „vorstellbar“ darüber hinausgehen und „Anschaulichkeit“ fordern. NELSON erklärt dazu:

> „Verstehen wir unter Vorstellen Denken, so werden wir alles das als vorstellbar erachten, was keinen logischen Widerspruch einschließt. Wird aber zur Möglichkeit des Vorstellens Anschaulichkeit verlangt, so werden wir, um ein mathematisches Gebilde als vorstellbar zu bezeichnen, über die innere Widerspruchslosigkeit seines Begriffs hinaus die Ausführbarkeit seiner Konstruktion fordern müssen.“[312]

Der hier herauszustellende Punkt ist nun aber, dass für NELSON allerdings Anschaulichkeit und Konstruierbarkeit keine allgemeinen Voraussetzungen für mathematische Erkenntnisse sind. Dazu äußert sich NELSON in dem Vortrag über die Nicht-Euklidische Geometrie:

> „Denn die geometrische Darstellbarkeit ist kein notwendiges Kriterium der Existenz eines mathematischen Begriffs. Vielmehr genügt in der Mathematik zur Feststellung der Existenz eines Begriffs die Nachweisung seiner Übereinstimmung mit sich selbst und mit den Axiomen. Die Axiome ihrerseits beziehen sich aber nicht nur unmittelbar auf die reine Anschauung, sondern sie können auch zu ihrer Möglichkeit diese unmittelbare Beziehung auf die Anschauung nicht entbehren. Dies gilt von den Axiomen der Analysis ebenso wie von denen der Geometrie.“[313]

Somit können auch diejenigen mathematischen Begriffe, die keinesfalls anschaulich sind, existieren. Der Beweis ihrer Existenz wird mittelbar und mittels derjenigen, die anschaulich sind, durchgeführt:

> „Es kann folglich auch jeder Existenzbeweis für einen geometrisch nicht darstellbaren und überhaupt nicht unmittelbar anschaulichen Begriff nur auf Grund einer mittelbaren Berufung auf die Anschauung geführt werden.“[314]

311. Nelson 2002, S. 278.
312. Nelson 1905, S. 21.
313. Nelson 1905, S. 35f.
314. Nelson 1905, S. 36.

Die mathematischen Begriffe sollen also laut NELSON erstens ohne inneren Widerspruch sein, zweitens sollen entweder sie selbst anschaulich sein oder mittels Logik zurückführbar auf anschauliche – und fundamentalere – Begriffe. Er nennt den „Begriff des Differentialquotienten einer an keiner Stelle stetigen Funktion“ als ein Beispiel für einen widerspruchsvollen mathematischen Begriff.[315] Der Begriff ist widerspruchsvoll, weil die an keiner Stelle stetige Funktion auch p.D. an keiner Stelle differenzierbar ist. „Der Begriff der größten Primzahl“ und „der Begriff eines regulären Siebzehnflächner“ sind logisch mögliche Begriffe, die als bloße Begriffe also keinen Widerspruch enthalten. Sie beinhalten keine Begriffe, die p.D. miteinander in Widerspruch sind. Da sie aber der mathematischen Anschauung widerstreiten, existieren sie als mathematische Begriffe nicht.[316]

Was bisher behandelt worden ist, ist die Einsicht NELSONs, dass die geometrischen Erkenntnisse letztlich aus der reinen Anschauung stammen. Diese Anschauung ist nicht empirisch, sondern rein. Diese Tatsache beschreibt er als ein Resultat von KANTs Mathematikphilosophie:

> „KANTs Philosophie der Mathematik läßt sich in den einen Satz zusammenfassen: Die mathematischen Axiomen sind synthetische Urteile a priori. Darin liegen die beiden Behauptungen: 1) die Axiome sind nicht logische Usprungs, 2) sie gelten unabhängig von aller Erfahrung. Aus der ersten Behauptung folgert KANT ihren Ursprung aus der Anschauung, aus der zweiten schließt er auf den nicht-empirischen Charakter dieser Anschauung.“[317]

Die Quelle der Eigenschaften, die ich bis hierher für die geometrischen Axiome genannt habe, ist laut KANT und NELSON also ihre „Synthetizität a priori“.

Im Folgenden werde ich ausführen, wie NELSON dieses Charakteristikum der geometrischen – und allgemeiner der mathematischen – Axiome von KANT übernimmt und rezipiert. Dazu werde ich zwei Begriffe, die in dieser Thematik eine zentrale Rolle spielen, diskutieren: „unmöglich“ sowie „a priori“. NELSON sieht den Grund für die fehlende Berücksichtigung des synthetischen Charakters der mathematischen Axiome in mangelhaftem Verständnis und in der erfolgten falschen Anwendung dieser Begriffe.[318] Er erläutert das mittels eines Beispiels, nämlich der Euklidischen Geometrie:

315. Vgl. Nelson 1905, S. 42.
316. Vgl. ebd.
317. Nelson 1905, S. 19.
318. Vgl. Nelson 1905, S. 20 sowie S. 42 in der Fußnote.

> „Die Axiome der Euklidischen Geometrie gelten unabhängig von aller Erfahrung. Sie sind also notwendige Wahrheiten. Daraus hat man oft so weiter geschlossen: Notwendige Wahrheiten sind solche, deren Gegenteil unmöglich ist, – also ist eine Nicht-Euklidische Geometrie unmöglich."[319]

Dass die Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie aus der Möglichkeit der Euklidischen Geometrie folgt, war zur Zeit Nelsons wohlbekannt und hatte zur Folge, dass Kants Überzeugung, dass die Axiome der Euklidischen Geometrie „notwendige Wahrheiten" sind, in Frage gestellt worden ist. Die Konsistenz der Nicht-Euklidischen Geometrie führt dazu, dass ihr Gegenteil, d.h. die Euklidischen Axiome, keine „notwendigen Wahrheiten" darstellen können, da per definitionem nur diejenigen Sätze, deren Gegenteil unmöglich ist, „notwendige Wahrheiten" sind. Nelson löst das Problem durch eine Differenzierung, was unter „unmöglich" verstanden werden kann. Er behauptet, dass dieser Begriff zwei Bedeutungen haben kann. Wenn ein Satz „unmöglich" ist, enthält er *entweder* einen Widerspruch. Sein Prädikat steht dann der Definition seines Subjektes entgegen. *Oder* aber der Satz steht im Widerspruch mit einer sonst bestehenden Wahrheit, wie z.B. der Anschauung von einem Gegenstand.[320] Die logische Negation des zuerst genannten widersprüchlichen Satzes ist ein *analytischer* Satz und besitzt logische Notwendigkeit, die Negation des zweiten Satzes jedoch *synthetische* Notwendigkeit. Letztere erfordert keineswegs die logische Unmöglichkeit seiner logischen Negation. Wenn wir also annehmen, dass die Euklidische Geometrie die zweite Art der Notwendigkeit aufweist, d.h., dass sie von synthetischer Natur ist, stellt die logische Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie für ihre Notwendigkeit kein Problem dar. In der Tat sieht Nelson die logische Möglichkeit bei beiden Geometrien geradezu als ein Beleg für die synthetische Natur der geometrischen Aussagen an:

> „Daraus, daß der Euklidische Raum nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bildet, geht nur hervor, daß, wie Riemann es ausdrückt, ‚die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen'. Mit andern Worten: die Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie ist ein unwidersprechlicher Beweis des synthetischen Charakters der geometrischen Wahrheiten."[321]

Er schließt daraus außerdem, dass die Logik nur „negative Bedingungen der mathematischen Wahrheit" festsetzt:

> „Natürlich unterliegt die Mathematik, wie jede Wissenschaft, den Gesetzen der Logik. Aber die Logik vermag nur negative Bedingungen der

319. Nelson 1905, S. 19.
320. Vgl. Nelson 1905, S. 20.
321. Nelson 1905, S. 23.

> mathematischen Wahrheit aufzustellen, insofern sie den Widerspruch ausschließt.“[322]

Anschließend daran erwähnt er die oben genannten Beispiele für logisch mögliche Begriffe, deren keinerlei existierende mathematische Gegenstände entsprechen, nämlich die größte Primzahl und den regulären Siebzehnflächner. Er weist auf ihre innere begriffliche Widerspruchslosigkeit sowie auf ihren Konflikt mit der Anschauung und folgert, dass die Logik „die positiven Kriterien der mathematischen Existenz“ nicht gewähren kann.[323]

In seinen beiden Vorträgen Nelson 1905 und Nelson 1970a hat NELSON seine KANTischen Überzeugungen unter Berücksichtigung der Kritik anderer mathematikphilosophischer Ansichten, insbesondere der empiristischen und logizistischen in Bezug auf die Erkenntnisquelle der Mathematik, ausgeführt. Hier war er einerseits bestrebt zu zeigen, dass über die Gültigkeit oder die Ungültigkeit der Euklidischen Geometrie mittels empirischer Untersuchungen nicht entschieden werden kann. In diesem Zusammenhang weist er auf HELMHOLTZ’ Arbeiten und ihre Konsequenzen hin:

> „Es ist bekannt, welch’ heftiger Streit seit der Veröffentlichung von Helmholtz’ diesbezüglichen Arbeiten über diese Frage entbrannt ist. Dieser Streit betrifft vornehmlich das Verhältnis der neuen mathematischen Untersuchungen zur Kantischen Lehre von den synthetischen Urteilen a priori. Man hat auf der einen Seite gemeint, auf Grund der Nicht-Euklidischen Geometrie KANTs Lehre vom reinanschaulichen Ursprung der Axiome widerlegen zu können, während man auf der anderen Seite geglaubt hat, auf Grund der Kantischen Lehre das ganze Unternehmen der Nicht-Euklidischen Geometrie verwerfen zu müssen.“[324]

Nach Betrachtung einiger Beispiele, mit Hilfe derer NELSON die Zwecklosigkeit der empirischen Untersuchung der Grundlagen der Euklidischen Geometrie zu zeigen versucht, erläutert er, dass die geometrischen Gebilde Gegenstände der reinen Anschauung sind. Letztere sind selber als Formen der Sinnesanschauungen davon zu abstrahieren. Schließlich folgert er:

> „Die Geometrie ist also eine Wissenschaft aus reiner Anschauung.“[325]

Zur Erklärung dieses Satzes fügt er in einer Fußnote folgendes Erwähnenswerte zur Verteidigung der KANTischen philosophischen Einsichten hinzu:

322. Nelson 1905, S. 42.
323. Vgl. ebd.
324. Nelson 1905, S. 19.
325. Nelson 1905, S. 32.

> „Ich hebe das letztere besonders deshalb hervor, weil daraus die Unhaltbarkeit der von Helmholtz vertretenen Ansicht hervorgeht, nach der zwar der Raum selbst eine reine Anschauungsform sein [sic], der Ursprung der Axiome dagegen in der Erfahrung liegen soll. Die Axiome sind in der Tat nichts anderes als die begriffliche Formulierung der einfachsten Grundverhältnisse der Raumanschauung selbst.
>
> Der Einwand, daß aus der Apriorität der Raumanschauung zwar die Apriorität gewisser, aber nicht notwendig aller geometrischer Axiome folgt, würde Kant wenigstens nicht treffen. Denn die Vernunftkritik behauptet nur die Existenz einer Wissenschaft vom Raum aus reiner Anschauung, gleichviel welcher Umfang dieser Wissenschaft zuzuschreiben ist. Angenommen, der Beweis der empirischen Natur des Parallelenaxiom wäre gelungen, (was, wie wir gezeigt haben, nicht der Fall ist,) so würde dieser Beweis die Kantische Behauptung nicht umstoßen, sondern nur dahin ergänzen, daß dieser Satz aus der Geometrie in die Empirie zu verweisen wäre. Die einmal von Gauß geäußerte Vermutung, «daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können» , ist also mit der Kantischen Lehre sehr wohl vereinbar.“[326]

Laut Nelson zielt also Kantische Mathematikphilosophie nicht darauf ab, die Apriorität der Euklidizität oder Nicht-Euklidizität des Raumes zu zeigen. In einer anderen Fußnote in dem selben Beitrag weist Nelson auf einen anderen interessanten Punkt hin, der das eben Erwähnte stützt und expliziert. Das Zitat ist eine Reaktion auf die Beanstandungen Helmholtz’, die weiter oben bereits erwähnt wurden und auf Kants Mathematikphilosophie gerichtet waren:

> „Von historischem Interesse dürfte übrigens die wenig bekannt gewordene Tatsache sein, daß die im 19. Jahrhundert realisierte Idee einer «allgemeinen» Geometrie ihren ersten Ursprung bei Kant hat. «Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumesarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte.» So bemerkt gelegentlich der dreiundzwanzigjährige Kant (Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte. 1747. §10). Schon diese Tatsache für sich könnte genügen, um die Unbesonnenheit derer ins Licht zu setzen, die unter Berufung auf die «Entdeckung» der Möglichkeit verschiedener Geometrien gegen Kants mathematischen Apriorismus zu Felde ziehen.“[327]

326. Nelson 1905, S. 32.
327. Nelson 1905, S. 27.

Über die logischen Einsichten zu den Grundlagen der Mathematik sind die Äußerungen Nelsons auch sehr klar und scharf:

> „Die positiven Kriterien der mathematischen Existenz lassen sich daher aus bloßer Logik nicht ableiten.“[328]

Zur Erklärung dieses Satzes wählt er in der Fußnote dazu einen polemischen Ton:

> „Wer es freilich vorzieht, das was wir, dem Sprachgebrauch gemäß, als logische Möglichkeit bezeichnen, ‚Existenz‘ zu nennen, der mag in der Widerspruchslosigkeit eines Begriffs einen hinreichenden Beweis seiner Existenz erblicken. Es dürfte sich jedoch empfehlen, wesentlich verschiedene Begriffe auch durch verschiedene Worte zu bezeichnen, statt ihre Verschiedenheit durch willkürliche Verletzung des Sprachgebrauchs ohne Not unkenntlich zu machen.“[329]

Neben diesen philosophischen Überzeugungen wurden auch andere von Nelson kritisiert, u.a. die konventionalistische Position Poincarés. Nelson sieht den Fehler bei allen diesen Einsichten in dem Dogma, dessen Ausgangspunkt er Aristoteles zuschreibt. Das Dogma stellt fest, dass „als Kriterien der Wahrheit nur die Logik und die Erfahrung“[330] gelten kann, oder in anderen Worten, dass die einzig möglichen Erkenntnisquellen Erfahrung und Logik sind. Er folgert daraus auch:

> „Nach diesem Dogma sind alle notwendigen Wahrheiten logischen Ursprungs. Es ist eine notwendige Konsequenz dieser Voraussetzung, daß alle Sätze, die sich der Zuständigkeit der Logik entziehen, aus der Erfahrung stammen. – Geht man indessen nicht von vornherein von diesem Dogma aus, so läßt sich aus der Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht mehr und nicht weniger folgern als der nicht-logische Ursprung der Axiome.“[331]

2.3.6 Zahlen, Größen und Arithmetik – die Ausnahmen

Nelsons Überzeugungen sind nicht zu allen mathematischen Gegenständen, Gesetzen und Erkenntnissen in dieser Art und Weise klar und eindeutig. Er hat in keinen seiner Vorträge und veröffentlichten Schriften, in denen er die Grundlagen

328. Nelson 1905, S. 42.
329. Nelson 1905, S. 42.
330. Nelson 1905, S. 23.
331. Nelson 1905, S. 23.

der Geometrie oder, allgemeiner, die Grundlagen der Mathematik erörtert hat, über Zahlen und die Grundlagen der Arithmetik gesprochen. Eines der veröffentlichten Protokolle seiner Lehrveranstaltungen, nämlich „Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften“[332], die im Winter 1910/11 stattgefunden haben, beinhaltet jedoch eine ausführliche Betrachtung dieses Themas. In dieser Veranstaltung führt Nelson aus, dass die Mathematik nicht in Geometrie und Arithmetik eingeteilt werden solle:

> „Die Einteilung der Mathematik in Arithmetik und Geometrie ist nicht die grundlegendste, wesentlicher ist die Unterscheidung der Zweige der Mathematik danach, ob darin der Größenbegriff auftritt oder nicht.“[333]

Diese Ansicht Nelsons ist wahrscheinlich eine Folge seines Verständnisses des Größenbegriffs. Wie oben ausgeführt, ist nach Nelson die Geometrie diejenige Wissenschaft, die sich mit dem Raum befasst. Im Folgenden wird jedoch dargelegt, dass er den Größenbegriff sowohl metaphysisch als auch anschaulich erfasst. Er sieht den anschaulichen Größenbegriff nicht nur in der zeitlichen oder räumlichen Anschauung begründet, sondern allgemeiner gefasst. In der Einführung der Rezeption Nelsons von Kants Naturphilosophie[334] wurde die Notwendigkeit der Zahlen als Formen der Anschauung in den Erläuterungen über die Schemata betrachtet. Hier wird nun gezeigt, dass Nelson den Zahlbegriff auch allgemeiner als das, was sich aus der Anschauung ergibt, sieht. Er zielt darauf ab, angelehnt an Fries' Arbeit, den Maßzahlbegriff als den allgemeinen Zahlbegriff zu untersuchen, wobei er, im Gegensatz zu Fries, berücksichtigt, dass in diesem Begriff der gewöhnliche Zahlbegriff vorausgesetzt wird. Darüber hinaus interpretiert Nelson den Größenbegriff, den Fries aus Raum- und Zeitanschauung abstrahiert, allgemeiner. Er äußert sich über den Zahlbegriff bei Kant und Fries folgendermaßen:

> „Kant setzt Zahl und Größe gleich. Er identifiziert das Zählen mit dem Addieren.
> Fries fasst die Zahl ausschließlich als Maßzahl auf. Jedoch wird bei seiner Erklärung des Vielfachen der gewöhnliche Anzahlbegriff vorausgesetzt, in dem das Moment der Größe und des Maßes nicht enthalten ist.“[335]

Nelson unterscheidet zwischen den Begriffen Größe und Zahl. Er konkretisiert diesen Unterschied anhand des folgenden Beispiels:

332. Nelson 2004c.
333. Nelson 2004c, S. 51.
334. S. 2.1.1.
335. Ebd.

> „[...] so bezeichnet z.B. in dem Begriff des Dreiecks die Zahl drei nicht eine Größe.“[336]

Für den Zahlbegriff gibt es also zwei Bedeutungen: Anzahl und Maßzahl. Ohne eine Definition für die beiden Begriffe zu geben, behauptet er, dass offenbar ein Zusammenhang zwischen beiden Begriffen existiert, sie seien jedoch nicht miteinander identisch.[337] Zur Untersuchung dieses Zusammenhangs setzt er zunächst den Anzahlbegriff[338] als etwas Gegebenes voraus. Er behauptet zudem, dass der Maßzahlbegriff durch die Anwendung des Zahlbegriffs – und nicht des Anzahlbegriffs – auf den Größenbegriff entsteht. Es könnte hier allerdings ein Ausdrucksfehler vorliegen, da der Zahlbegriff den Maßzahlbegriff bereits beinhaltet. Aufgrund der zuvor genannten Ableitung analysiert er in seinen daran anschließenden Untersuchungen den Begriff Größe, um klarzustellen, welche Eigenschaften dieses Begriffs die Anwendung des Anzahlbegriffs möglich macht.

Nelson war mit den Forschungen seiner Zeit über die Grundlagen der Arithmetik vertraut, insbesondere mit denen von Cantor, Frege, Zermelo usw., und hat darauf hingewiesen.[339] Er erklärt beispielsweise, dass unter dem Zahlbegriff drei unterschiedliche Begriffe verstanden werden können: 1.„Der einer Zahl (Vielheit) von Dingen, kurz der Begriff der *Menge*“.[340] 2. Der Begriff der Anzahl (der Elemente einer Menge). 3. Der Begriff der Ordnugszahl, der „sich durch Kombination der beiden Begriffen Anzahl und Reihenfolge“ (oder Ordnung in einer Menge) definieren lässt.[341] In dieser Veranstaltung will Nelson jedoch nicht den systematischen Aufbau eines Zahlensystems untersuchen, sondern vielmehr die erkenntnistheoretische Natur von Zahlen und Zahlenregeln. Zu diesem Zweck betrachtet er die möglichen Kontexte, in denen Zahlen und Zahlenregeln verwendet werden.

Er stellt einen Größenbegriff vor, der allgemeiner ist als das Raumcharakteristikum, das ein Thema der Forschung in der Geometrie sei:

> „Hierbei muss zunächst festgestellt werden, dass nicht alle Größen messbar sind (z.B. die Stärke von Empfindungen, Gefühlen, Antrieben; ferner die von Tönen, Gerüchen usw.). Man bezeichnet die nicht messbaren Größen als *intensiv*. Der Größen Charakter der Intensität, die Eigenschaften, die allen Intensitäten als Größen zukommen, werden nicht

336. Ebd.
337. Vgl. ebd. S. 50f.
338. Damit ist Kardinalzahlbegriff gemeint.
339. Vgl. ebd. S. 55ff.
340. Ebd. S. 55.
341. Vgl. ebd. S. 55f.

> anschaulich erfasst, sie können auch nicht durch bloßes Nachdenken erkannt werden, ihre Erkenntnis ist also metaphysisch.“[342]

Er zählt für den Größenbegriff wesentliche Eigenschaften auf, die „teils im Begriff, teils im Wesen der Größen liegen“.[343] Interessant ist hier, dass er das Wesen der metaphysischen Größen vorausgesetzt hat. Er äußert sich nicht über das „Wesen“ dieser Größen, mit Ausnahme der folgenden Eigenschaften und dass die Existenz dieser Größen nur ihre prinzipielle Möglichkeit bedeutet:

> „1)Die Transitivität der Größenbeziehung (Wenn a größer ist als b und b größer als c, so ist a größer als c.)
>
> 2) Der Unterschied zweier Größen ist wieder eine Größe, und zwar ist er um so größer, je kleiner die kleinere und je größer die größere der beiden Größen ist.
>
> 3) Es gibt eine Größe 0. 0 ist die kleinste aller Größen. Zu jeder von 0 verschiedenen Größe gibt es eine kleinere und eine größere.
>
> 4) Werden alle Größen einer Gesammtheit G von einer Größe g übertroffen, so gibt es eine kleinste Größe, welche von keiner Größe aus der Gesamtheit übertroffen wird.“[344]

Nelson folgert aus den Eigenschaften dieser Größen, dass sie erstens stetig sind[345] und zweitens beliebig klein sein können. Die Existenz beliebig großer Größen kann jedoch laut Nelson nicht aus den Eigenschaften abgeleitet werden. Er argumentiert, da „sich bei diesen die Größenunterschiede nicht mit den Größen selbst vergleichen lassen“, kann man die Frage, ob diese Größen ins Unendliche gehen können, nicht beantworten.

Der anschauliche Größenbegriff ist ein spezieller, der neben dem allgemeinen Größenbegriff besteht. Er gibt für solche Größen die folgenden Eigenschaften an:

> „1) Der Unterschied zweier Größen ist mit den Größen vergleichbar. Insofern heißt eine Größe, die kleiner ist als eine andere, deren Teil.
>
> 2) Zwei Größen lassen sich zu einer Größe gleicher Art zusammensetzen. Hierbei gilt das assoziative und kommutative Gesetz.
>
> (Der Begriff der Reihenfolge, der hier zur Verwendung kommt, soll ebenso wie der Anzahlbegriff vorausgesetzt werden.)

342. Nelson 2004c, S. 52.
343. Ebd.
344. Ebd.
345. Nelson meint wahrscheinlich damit, dass die Menge dieser Größen ein Kontinuum bildet.

> 3) Das archimedische Axiom (Jede Größe kann durch genügend häufiges Hinzufügen einer und derselben Größe zu einer beliebigen Anfangsgröße – etwa 0 – übertroffen werden.)“[346]

Dass diese Eigenschaften nur der Raum- und Zeitanschauung zugewiesen werden, sieht Nelson als einen Fehler und er argumentiert, dass sie allgemeiner verstanden werden sollen. Daraus, dass dieselben Eigenschaften für verschiedene Raumgrößen (Länge, Fläche, Volumen und Winkelgröße) gelten, folgert Nelson, dass sie weder Eigenschaften bestimmter geometrischer Gebilde noch solche, die aus der Natur des Raumes entstehen, beinhalten. Daher können sie auch für zeitliche Größen angewandt werden. Es gibt ebenfalls einen allgemeineren Fall, für den diese Sätze zutreffen:

> „Noch wesentlicher ist der Umstand, dass es eine anschauliche Größe gibt, welche einem nicht anschaulichen Gegenstand zukommt, nämlich die Masse.“[347]

Da einerseits die Masse das ist, was den Raum füllt, behauptet Nelson, dass sie nicht durch eine Kombination räumlicher Größen gebildet werden kann. Andererseits sagt er, dass, um einen Gegenstand der Erfahrung als eine Masse betrachten zu können, müssen wir zuerst seine „Beharrlichkeit“ finden. Deswegen muss die Materie messbar sein, behauptet Nelson und schließt daraus, dass die Masse auch eine anschauliche Größe haben muss. All dies sind Belege für die Existenz anschaulicher Größen neben räumlichen und zeitlichen Größen. Daraus ergibt sich, dass die Gesetze dieser Größen nicht aus der Raum- oder Zeitanschauung entnommen werden.

Als letzten Schritt der Einführung des Maßzahlbegriffs zeigt Nelson, wie der gewöhnliche Zahlbegriff auf die anschaulichen Größen angewendet werden kann:

> „1) Es wird willkürlich eine Größe gleich 1 gesetzt.
>
> 2) Eine Größe, die durch n-malige Aneinanderfügung von 1 entsteht, nennen wir n. Eine Größe, deren n-maliges Aneinandersetzen die Größe 1 ergibt, nennen wir $\frac{1}{n}$ und das m-fache von $\frac{1}{n}$ nennen wir $\frac{m}{n}$.
>
> 3) Die durch Zusammensetzung zweier Größen a und b entstehende Größe bezeichnen wir mit a+b. Ist ferner a größer als b, so bezeichnen wir den Unterschied zwischen a und b mit a-b.“[348]

346. Nelson 2004c, S. 53.
347. Ebd.
348. Nelson 2004c, S. 54.

Wie zu erwarten ist, bezeichnet NELSON die Größen, die die Form $\frac{m}{n}$ haben, als rational, und diejenigen, die nicht diese Form haben, aber als Grenzwerte einer Folge von rationalen darlegbar sind, als irrational. Anhand des archimedischen Axioms argumentiert er, dass somit alle Größen bezeichnet worden sind und folgert daraus:

> „Somit ist also jeder Größe eine Maßzahl und jeder Maßzahl eine Größe zugeordnet. Die dargestellte Auffassungsweise unterscheidet sich dadurch von der FRIESschen, dass der Größenbegriff dabei nicht lediglich als eine Abstraktion aus der Raum- und Zeitanschauung angesehen wird.“[349]

Somit hat NELSON den allgemeinen Zahlbegriff, den er von FRIES' Maßzahlbegriff übernommen hat, dargestellt. Der andere Begriff, den er als einen Teil der Arithmetik untersucht, ist der „Ordnungsbegriff“.[350] Die Vorstellung der Reihenfolge bildet den Grund für die Ordnungen, die in der Arithmetik vorkommen. Diese Vorstellung ist ihrerseits auch vom Zahlbegriff abhängig. Deshalb führt eine erkenntnistheoretische Untersuchung der Grundlagen der Arithmetik zu einer Untersuchung des Zahlbegriffs sowie der Erkenntnis der Zahlgesetze. Über die letztgenannten sagt er:

> „Gegen die Annahme, daß die Erkenntnis der Zahlgesetze aus reiner Anschauung entspringt, sprechen mehrere Umstände. Die Zahlgesetze finden nicht nur Anwendung auf anschauliche oder wirkliche Gegenstände, sondern auf beliebige Gegenstände des Denkens. Ferner spielen die Zahlgesetze bei vielen ganz allgemeinen logischen Betrachtungen eine Rolle. Z.B. ist ein Beweis nur bündig, wenn er aus *endlich vielen* Schlüssen besteht. Eine Definition darf keinen *unendlichen* Regress enthalten.“[351]

Der vollständige Induktionsschluss ist ein anderes Beispiel in der Logik, das NELSON für die Anwendung der Zahlgesetze vorstellt. In der Darlegung der Rezeption NELSONS von KANTS Naturphilosophie wird deutlich, dass die Zahl in der Anschauung fußt und als das „Schema der Quantität“ (s. 2.1.1) gesehen wird. NELSON führt dort außerdem als einen Teil der „Tafel *der metaphysischen Grundsätze*“, die „durch Verknüpfung der Schemata mit den Kategorien“ entsteht, aus:

349. Ebd.
350. Vgl. Nelson 2004c, S. 54.
351. Nelson 2004c, S. 55.

> „1) Da es sich bei den Kategorien der Quantität um zahlenmäßige Vergleichung handelt, haben wir hier den Grund für die mögliche Anwendbarkeit der mathematischen, besser der arithmetischen Axiome in unserer Erfahrung. Diese Mathematische Erkenntnis ist die *Erkenntnis der reinen Anschauung.*“[352]

Er betrachtet hier jedoch einen weiteren Aspekt des Zahlbegriffs:

> „Die eigentümliche Bedeutung der Zahl im Denken kann man sich durch folgende Erwägung klar machen. Man denke sich zwei Dinge, die weder räumlich noch zeitlich sind (etwa zwei intellegible [sic] Substanzen). Beide mögen in ihren Eigenschaften vollkommen übereinstimmen, so sind sie doch noch nicht identisch. Was wir hieraus ersehen, ist, dass die Zahl das allgemeinste principium individuationis ist.“[353]

Diese Aussage von Nelson lässt vermuten, dass er die Existenz intelligibler Substanzen voraussetzt. Er klärt nicht, was solche Substanzen sein können und gibt keine Beispiele dafür. Da die Genese der Vorstellungen von den Substanzen außerhalb von Zeit und Raum nicht möglich ist, muss ihre Existenz begründet oder vorausgesetzt werden. Über die Existenz dieser Substanz erklärt er hier auch nicht. Man kann aber wohl davon ausgehen, dass platonische Vorstellungen als Beispiele für solche Substanzen gezählt werden können. Zusammenfassend lässt sich sagen, wenn man die Existenz von intelligiblen Substanzen voraussetzt, wird die Zahl nach Nelson zum allgemeinsten *Principium Individuationis*. Das Argument geht seinerseits davon aus, dass die Zahl die – erkenntnistheoretische – Natur der diskutierten intelligiblen Substanzen ererbt. Nelsons Annahme ist im Kontext der Logik besonders klar, wenn er argumentiert, dass die Gesetze der reinen Arithmetik analytisch sind:

> „Diese Betrachtungen legen uns nun die Auffassung nahe, dass durch die Zahlgesetze die allgemeine Form, in der uns die Gegenstände des Denkens gegeben werden, zum Ausdruck gebracht wird.“[354]

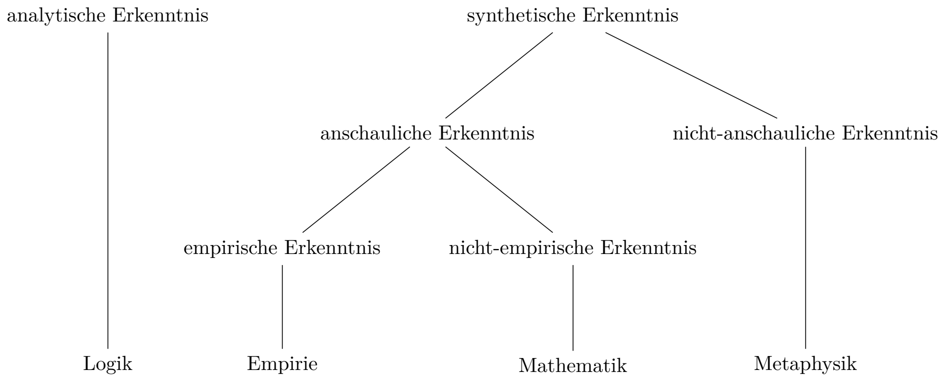
Das oben Gesagte bedeutet seinerseits, dass die Zahlgesetze – im Gegensatz zu den geometrischen Axiomen – nicht nur als Formen der Anschauung verstanden werden dürfen. Dass die Zahlgesetze nicht nur anschaulich sind, sondern die allgemeinen Formen für die Gegenstände des Denkens – abhängig davon, was unter intelligiblen Substanzen verstanden wird, sogar die allgemeinen Formen für die Gegenstände der

352. Nelson 2004c, S. 24.
353. Nelson 2004c, S. 55.
354. Ebd.

Vernunfterkenntnis – liefern, besagt noch nicht, ob sie synthetische oder analytische Sätze sind. Nelson führt aber dazu aus:

> „Was die Frage betrifft, ob die Gesetze der reinen Arithmetik analytisch oder synthetisch sind, so scheint das Erste zuzutreffen. Hieraus folgt aber nicht, dass die Lehre von den Zahlen einen Teil der formalen Logik bildet; denn die Zahlbegriffe kommen als etwas wesentlich Neues zu den Begriffen der reinen Logik hinzu. Zum Mindesten sind sämtliche bisherigen Versuche, den Zahlbegriff als Reflexionsbegriff nachzuweisen misslungen."[355]

Diese Aussage Nelsons ist nicht konsistent mit der Einteilung der Erkenntnisse, die er in dem Kolloquium über die Naturphilosophie präsentiert hat. (s. Diagramm)



In der Einteilung stehen alle analytischen Aussagen nur mit der Logik im Zusammenhang. Aus den letzten Zitaten Nelsons ergibt sich jedoch, dass analytische Aussagen existieren, die nicht unter die Logik subsumiert werden. Da sie nicht synthetisch sind, können sie in dem Diagramm auch nicht mit der Mathematik in Beziehung gesetzt werden. Daher muss anscheinend eine allgemeinere Art der Erkenntnis eingeführt werden. Nelson beschäftigt sich mit dem Thema nicht weiter und betrachtet die Beschaffenheit solcher Erkenntnisse nicht. Es darf auch nicht unberücksichtigt bleiben, dass diese Meinungen Nelsons in keinen seiner Veröffentlichungen und Vorträge besprochen wurden. Daher müssten ihnen vielleicht eine andere Stellung als das, was ich davor über seine Mathematikphilosophie erklärt habe, zugewiesen werden. In dem Vortrag „Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik"[356], den Nelson im Jahr 1927 kurz vor seinem Tod gehalten

355. Nelson 2004c, S. 55.
356. Nelson 1927

hat, betont er jedenfalls nochmals ausdrücklich die *Anschaulichkeit* und *Apriorität* der mathematischen Erkenntnisse:

> „Man wird finden, daß es die der mathematischen Erkenntnis eigentümliche Verbindung von Apriorität mit Anschaulichkeit ist, was ihr diesen Vorzug vor der metaphysischen Erkenntnis verleiht."[357]

Von der Anschaulichkeit der mathematischen Erkenntnis kann man jedoch schließen, dass sie synthetisch ist. Es scheint also, dass Nelson – zumindest in Bezug auf die arithmetischen Gesetze – einen umfassenderen Fall als entweder *synthetisch* oder *analytisch* präsupponiert, der irgendwie mit dem allgemeinsten *Principium Individuationis* zusammenhängt, und so kann er die beiden Qualitäten der *Anschaulichkeit* und *Apriorität* mathematischer Erkenntnisse zusammen nachweisen.

2.3.7 Formale und Transzendentale Apperzeption im Kontext der Mathematik

Allein das folgende Zitat von Nelson weist darauf hin, dass sowohl die formale als auch die transzendentale Apperzeption in der Basis mathematischer Erkenntnisse und damit in der Grundlage der Sokratischen Methode im Kontext der Mathematik liegen:

> „In der Tat gelangen wir auf keinem anderen Wege zu den Grundlagenbegriffen und Grundsätzen der Geometrie als durch Abstraktion von der Erfahrung."[358]

Aus diesem Zitat lässt sich schließen, dass formale und transzendentale Apperzeption die Möglichkeit der Genese geometrischer – und im Allgemeinen mathematischer – Erkenntnisse begründen. Die Geltung der mathematischen Erkenntnisse beruht jedoch nur auf formaler Apperzeption. Ich werde nun erklären, wie diese Schlussfolgerung getroffen werden kann. In 2.1.2 wurde *einerseits* erklärt, dass Nelson die transzendentale Apperzeption als notwendige Bedingung der Einheitsbildung und damit als Grund für die Möglichkeit der Erfahrung vorstellt. Er sieht ebenso die Möglichkeit der Erlangung geometrischer Erkenntnisse nur durch „Abstraktion von der Erfahrung". Für die Genese geometrischer Erkenntnisse ist daher Erfahrung und damit die transzendentale Apperzeption eine notwendige Bedingung. Die formale Apperzeption wurde andererseits in 2.2.2 als eine notwendige Bedingung für die Möglichkeit der Abstraktion eingeführt: Da jede Idealisierung – wie die Abstraktion

357. Nelson 1927, S. 108.
358. Nelson 1905, S. 30.

– ein Ideal als Norm voraussetzt, ist die Existenz unmittelbarer Erkenntnisse, die die Rolle des Ideals bei der Idealisierung einnehmen, eine notwendige Bedingung. Sonst wäre die Abstraktion „willkürlich“. Damit ist die formale Apperzeption auch eine notwendige Bedingung für die Genese der geometrischen Erkenntnisse. Wie in den Abschnitten 2.3.4-2.3.6 gezeigt wurde, gehören laut Nelson *alle* mathematischen Erkenntnisse zur reinen Anschauung und nicht nur die geometrischen. Demnach können sie auch nur durch „Abstraktion von der Erfahrung“ erreicht werden. Das bedeutet jedoch, dass die Möglichkeit der *Genese* aller mathematischen Erkenntnisse auf den beiden oben genannten Prinzipien beruht.

Die oben genannten Ideale bilden ebenso eine Basis für die *Gültigkeit* der mathematischen Erkenntnisse. Im folgenden Zitat beschreibt Nelson das Geltungsverhältnis in einem allgemeineren Fall des wissenschaftlichen Systems:

> „Wir wollen die Axiome, sofern sie die Gründe bilden, auf die sich ein System von Sätzen vermittelst rein logischer Operationen zurückführen läßt, während sie selbst nicht wiederum eine logische Zurückführung auf andere Erkenntnisse gestatten, als die logischen Prinzipien des Systems bezeichnen. Im Unterschied von diesen logischen Prinzipien eines Systems von Sätzen möge die unmittelbare Erkenntnis, die ihrerseits den Grund der Axiome und somit das allgemeine Kriterium der Wahrheit aller Sätze eines wissenschaftlichen Systems bildet, das konstitutive Prinzip dieses Systems heißen.“[359]

Daher bezieht sich die Gültigkeit mathematischer Erkenntnisse *andererseits* auf die der unmittelbaren Erkenntnisse. Dies setzt jedoch die formale Apperzeption voraus. Wenn wir also die Sokratische Methode – d.h. die regressive Methode der Abstraktion und Deduktion – im Kontext der Mathematik anwenden, setzen wir beide Prinzipien voraus.

2.4 Abschließende Reflexion

Die Ausführungen in diesem Kapitel können als eine philosophische Untersuchung der Sokratischen Methode Nelsons im Kontext der Mathematik angesehen werden, die mit der Methode selbst konform ist. Dazu wurden zunächst die grundlegenden epistemologischen Prinzipien der Methode bei Nelson aufgesucht und erörtert (vgl. 2.1). Sie wurden dann im Sinne der Kritischen Philosophie deduziert. D.h. sie wurden erkenntnistheoretisch untersucht und gerechtfertigt. Die vorgestellten

359. Nelson 1905, S. 48.

Rechtfertigungen und Abhandlungen der Prinzipien findet man teils explizit, teils implizit in NELSONs Schriften. Daran anschließend sind die epistemologischen Folgen der grundlegenden Prinzipien in seiner Methodologie (vgl. 2.2) sowie in seiner Philosophie der Mathematik (vgl. 2.3) vorgestellt und reflektiert worden. Das nächste Kapitel stellt weitere Konsequenzen dieser Prinzipien im Kontext der Didaktik der Mathematik vor, wobei einige Aspekte der Didaktik der Mathematik hier bereits diskutiert wurden. Um es explizit zu machen, werde ich ein Beispiel konzipieren; JAMES STIEGLER und JAMES HIEBERT betrachten in ihren gemeinsamen Untersuchungen in der Didaktik der Mathematik den kulturellen Aspekt des Mathematikunterrichts.[360] In Hiebert 1998 beschreiben und begründen sie beispielsweise, wie der Unterricht als eine kulturelle Aktivität angesehen werden kann. Lernende, Lehrende und Mathematik als Lerngegenstand nehmen in diesem Zusammenhang zentrale Rollen ein. Es kann daher argumentiert werden, dass diese Kultur hauptsächlich aus sozialen Interaktionen zwischen den drei oben genannten Elementen eines Mathematikunterrichts besteht. So kann eine Untersuchung der sozialen Beziehungen zwischen den Elementen zu einem besseren Verständnis des Mathematikunterrichts beitragen. Nun betrachten wir hier nur das Autoritätsverhältnis als Beispiel für soziale Beziehungen. Wenn ein Mathematikunterricht von der Perspektive der Autoritätsübernahme analysiert wird, ergeben sich folgende Idealfälle:

1. *Keine Autorität*: Wenn es keine Autoritäten in dem Unterricht gibt, erscheint es zufällig, ob eine mathematische Lehr-Lern-Situation stattfinden kann.

2. *Autorität des Lehrenden*: Hierbei wird eine dogmatische Lehre stattfinden, die unter seltenen Umständen zu einer Lehr-*Lern*-Situation führt.

3. *Autorität des Lernenden*: So ein Unterricht ist zur Verwirrung und Verzweiflung verurteilt.

4. *Autorität der Mathematik*: Hier übernehmen Argumentation und mathematische Reflexion die Autorität. Dieses Verhältnis bietet die optimale Lehr-Lern-Situation für die Lernenden.

Die Punkte 2 und 4 wurden hier philosophisch untersucht und gerechtfertigt. Die hier vorgestellten Überlegungen NELSONs bieten dennoch eher die philosophischen Grundlagen für eine didaktische Methode. Eine ausführlichere didaktische Untersuchung der Perspektive wird im nächsten Kapitel folgen.

Die in diesem Kapitel untersuchten Einsichten NELSONs bereiten eine philosophische Grundlage für eine Methodische Untersuchung in der Didaktik der Mathematik

360. Vgl. Hiebert 1998 oder James W. Stigler 2017.

vor. So findet eine philosophische Lehre, die in einer langen philosophischen Tradition wurzelt, Anwendung in der Mathematikdidaktik. Zudem werden dadurch solche Begriffe wie „kritisches Denken im Mathematikunterricht“ nicht völlig vage oder neu definiert, sondern basierend auf Lehren, die seit einigen Jahrtausenden durchdacht und kritisiert werden. Obwohl die philosophischen Einsichten NELSONs der Philosophie von FRIES sehr nahe stehen, weisen sie einige Merkmale auf, die sie einerseits von der FRIESschen Philosophie unterscheidet und die Signifikanz seiner Arbeit für die Philosophie und Didaktik der Mathematik aufzeigen:

- NELSON hat die Fortschritten seiner Zeit in der Logik und Mathematik benutzt, um die FRIESsche kritische Philosophie erklären und rechtfertigen zu können. Die HILBERTsche *Axiomatik* und die Arbeit in der Grundlagen der Geometrie haben ihm geholfen, einerseits die *regressive Methode der Abstraktion* und *Deduktion* zu begründen. Er hat andererseits dadurch begründet, dass mathematische Erkenntnisse synthetischer Natur sind. Damit hat er viel zur *Deduktion* mathematischer Erkenntnisse beigetragen. Die Frage „ob er die mathematischen Axiome vollständig deduziert hat?“ kann nicht beantwortet werden, da sie eine fehlerhafte Frage ist. Mit dieser Frage wird vorausgesetzt, dass die *Deduktion* – wie ein logischer Beweis – eine deterministisch abschließbare Methode ist. Diese Voraussetzung ist im Widerspruch mit den Eigenschaften der *Deduktion*, die in 2.2 erklärt wurden.

- Er hat die *kritische Methode*, die von KANT und FRIES konzipiert und abgehandelt wurde beim PLATONischen SOKRATES wiedergefunden. NELSON weist selber darauf hin, obwohl FRIES „der eigentliche Vollender der kritischen Philosophie, der Wiederhersteller der sokratisch-platonischen Lehre von der Wiedererinnerung und der Selbstgewißheit des Geistes“ war, hat „er in der Methode des SOKRATES die sokratische Methode nicht“ gefunden.[361]

- NELSON hat die beim PLATONischen SOKRATES wiedergefundene *kritische Methode* in eine didaktische Methode eingebettet und diese kritisch konzipiert. D.h. er hat seine didaktische Methode ebenso anhand der *kritischen Methode der Abstraktion* und *Deduktion* untersucht.

In diesem Kapitel wurde an verschiedenen Stellen auf den Verweis von NELSON auf PLATON eingegangen. Besonders deutlich sind seine Bezüge zur sokratischen (oder kritischen) Methode und zur Anamnesis-Lehre. Man kann sogar argumentieren, dass PLATONs Anamnesis-Lehre, die in Nelsons Begriffen als die formale Apperzeption oder das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft bezeichnet wird, den Kern der Philosophie NELSONs bildet. Er kritisiert dennoch PLATONs Philosophie und meint,

361. Vgl. Nelson 2002, S. 63ff.

dass man sie „von der Umschlingung durch die platonische Mystik“ befreien soll.[362]. Er stellt nicht explizit dar, was er unter „Mystik“ bei Platon versteht. Es ist jedoch davon auszugehen, dass er den Teil der platonischen Metaphysik einbezieht, der sich mit der Ideenlehre befasst. Dazu gehören demnach die Ansichten Platons im Bezug auf dem Begriffspaar Ursache/Wirkung, die im Appendix eingeführt werden. Im Vergleich zur kritischen Philosophie hat das Begriffspaar in der platonischen Philosophie eine erweiterte Bedeutung. Während es in der kritischen Philosophie in Form der Kausalität auftritt, findet es in der Erklärung der platonischen Ontologie, die auf Ideenlehre beruht, eine Anwendung. So fällt diese erweiterte Bedeutung des Begriffspaar unter „Mystik“. Obwohl diese Meinung nicht widerlegbar ist, kann man dennoch auf die folgende Analogie verweisen. Der Australische Mathematiker N. J. Wildberger hat die Nutzbarkeit der *Axiomatik* in Frage gestellt:

> „Mathematics does not require ‚Axioms‘. The job of a pure mathematician is not to build some elaborate castle in the sky, and to proclaim that it stands up on the strength of some arbitrarily chosen assumptions. The job is to investigate the mathematical reality of the world in which we live. For this, no assumptions are necessary. Careful observation is necessary, clear definitions are necessary, and correct use of language and logic are necessary. But at no point does one need to start invoking the existence of objects or procedures that we cannot see, specify, or implement. [...] And where is the infinite set $\mathbb{N}$? The answer is – nowhere. It doesn’t exist. It is a convenient metaphysical fiction that allows mathematicians to be sloppy in formulating various questions and arguments. It allows us to avoid issues of specification and replace concrete understandings with woolly abstractions.“[363]

Einerseits werden die Begriffe „investigate“, „mathematical reality of the world“, „clear definitions“ und „correct use of language and logic“ hier nicht definiert, präzisiert oder beschrieben. Aufgrund der oben erwähnten Einsichten von Nelson kann andererseits gesagt werden, dass der Zweck der *kritischen Mathematik* gerade die Auseinandersetzung mit der Erforschung mathematischer Wahrheiten ist. Sie befasst sich auch mit den verschiedenen Formen mathematischer Aussagen – wie Axiom, Definition usw. –, um eine korrekte Anwendung von Sprache und Logik zu gewährleisten. Die Axiomatik liefert uns nicht nur ein wissenschaftliches Kriterium für die Forschung in Mathematik, sondern zeigt uns auch Eigenschaften von mathematischen Gegenständen und ihre Beziehung zueinander auf. Die Ausklammerung der Axiomatik im Kontext der Mathematik könnte daher nach Nelson zum Verlust

362. Nelson 2002, S. 42.
363. Wildberger 2006, S. 8.

wichtiger Einblicke in die Mathematik führen. Ähnlich kann man über die PLATONische Metaphysik argumentieren. Sie bereitet eine systematische Auffassung in die Ontologie und Epistemologie, die Eigenschaften von manchen physischen und metaphysischen Gegenständen und ihre Beziehung zueinander erklärt. Dazu gehört z.B. die Anamnesis-Lehre, die sich auf die Beziehung zwischen Objekten und menschlichem Erkenntnisvermögen bezieht. Auch die PLATONischen Metaphysik sollte – wie jede andere Lehre – einer präzisen kritischen Prüfung unterzogen werden. Ihre Ausklammerung könnte aber zum Verlust wichtiger Einsichten in die Philosophie führen.

Appendix - Ursache/Wirkung im Kontext der Platonischen Metaphysik

Die Bedeutung der Begriffe *Ursache* und *Wirkung* und das Zusammenspiel zwischen ihnen, die im Kausalitätsprinzip auch artikuliert werden, wurde mindestens seit PLATON betrachtet und untersucht. Bei der Untersuchung der NELSONschen *Sokratischen Methode* wurde im Kapitel 2 an mehreren Stellen das *Kausalitätsprinzip* erwähnt. In 2.1.1 beispielsweise wurde die Begründung der Möglichkeit des *Prinzips* als einer der Zwecke der KANTischen *Kritik der Vernunft* vorgestellt. Darüber hinaus wurde das Prinzip in den epistemologischen Untersuchungen von NELSON und APELT öfters als Beispiel verwendet. Die folgende Einführung der Begriffe Ursache und Wirkung im Kontext der PLATONischen Metaphysik soll dazu beitragen, den Unterschied zwischen der NELSONschen und PLATONischen Methodologie im Bezug auf Metaphysik klarer zu machen.

Der Begriff *Ursache* (αἴτιον) wurde zuerst im antiken Griechenland vor SOKRATES in einer moralisch-juristischen Bedeutung verwendet (vgl. Hübner 2001). Im Zuge seiner Erklärung des Begriffs sagt HÜBNER, dass der Terminus *Ursache* eine Zuweisung von Schuld und Verantwortung darstellte. Die Bedeutungserweiterung des Terminus in seinem allgemeinen Sinn, begann damit, dass Hippokratische Ärzte über Ursachen von Krankheiten diskutierten. Auch PLATON schloss sich den vorsokratischen Philosophen sowie den hippokratischen Ärzte an, was diese Bedeutung betrifft. Das zeigt, dass das Begriffspaar *Ursache/Wirkung* bei PLATON als Erklärung und Begründung einer Sache dienen kann. Dieser Begriff hat jedoch in der PLATONischen Metaphysik noch eine besondere Stellung. Demnach ist der Bereich des *Werdenden* der der *Wirkungen*. Sie alle, nämlich die Werdenden, benötigen eine Ursache. Diese kann allerdings nur aus der Welt der *Seienden* stammen. Deshalb sind es lediglich die Ideen, die die Rolle der wahren Ursachen einnehmen können. So ist die *Idee des Guten* die letzte Ursache des Seins und des Erkennens. Das zeigt auch, dass die PLATONische Ontologie und Epistemologie eng miteinander verbunden sind.

Bei ARISTOTELES hat das Begriffspaar *Ursache/Wirkung* aber nur in Bereich der Epistemologie eine Bedeutung. Er verwendet diesen Begriff lediglich in der Bedeutung διάτί (darum). Zu dem Terminus *Wirkung* bei ARISTOTELES erklärt HÜBNER:

> „Die der Ursache entsprechende Wirkung ist allgemein ein zu erklärender Sachverhalt und wird als αἰτιατόν (Verursachtes) bezeichnet. Oft wird αἰτία angemessener mit ‹Grund› oder ‹Erklärung› wiedergegeben.“[364]

Der Terminus *Ursache* wird bei PLATON und ARISTOTELES nicht eindutig, sondern in verschiedenen Bedeutungen verwendet. Während ARISTOTELES explizit auf diesen Punkt hinweist und für diesen Begriff vier verschiedene Auslegungen anbietet, spricht PLATON nicht direkt über dessen Bedeutung. Es sind die Neuplatonischen Interpretatoren, die in den Erläuterungen von PLATONs Bücher wie *Timaios* sechs Arten von Ursachen expliziert haben (vgl. Proclus 1820), vier davon waren identisch mit denen von ARISTOTELES.

Einer der Interpretatoren des ARISTOTELES, ALEXANDER VON APHRODISIA, hat später dessen vier Ursachen adjektivisch etabliert und dies wurde bis in die Neuzeit beibehalten: 1. Formursache *causa formalis* 2. Zweckursache *causa finalis* 3. Stoffursache *causa materialis* 4. Wirkursache *causa efficiens*. Die beiden Arten von Ursachen, die bei ARISTOTELES nur indirekt und zum Widerlegen vorkommen (vgl. Metaphysik A 990ff), aber von PLATONs Interpretatoren wie PROKLOS als wichtige Elemente der PLATONischen Metaphysik dargestellt wurden, sind *paradigmatische* und *instrumentale* Ursachen. Aufgrund dieses Zusammenhangs, stellt die „Idee des Guten“ in der PLATONischen Ontologie *Ursache* in drei verschiedenen Funktionen dar:

1. die *Zweckursache*: “wir wollen also darstellen, aus welchem Grund der Schöpfer das Werden und dieses All in Gang gesetzt hat. “[365]

2. die *Wirkursache*, da laut PLATON im Buch Politeia die „Idee des Guten“ die Sonne „nach der Ähnlichkeit mit sich *gezeugt* hat“.[366] Außerdem ist das Gute nicht nur für das Erkennbare die Ursache erkannt zu werden, “sondern

364. Hübner 2001.
365. *Timaios*, 29d
366. *Politeia VI*, 508b

auch das Sein und Wesen haben es von ihm“.[367] In *Timaios* wird auch der „δημιοργὸς“ (Meister) mit dem Begriff „ἀγαθός“ (Gut) verknüpft:

> „Wenn der Kosmos schön ist und der Meister gut, dann ist es offenkundig, dass er auf das Ewige geblickt hat;...“[368]

3. *paradigmatische* Ursache, auf die in den letzten bereits Zitaten hingewiesen wurde.

367. *Politeia VI*, 509b
368. *Timaios*, 29a

3 Übertragung der Methode in die Praxis – Beispiel aus dem *Isfahan Haus der Mathematik*

Das Mathematische Haus in Isfahan[1] ist eine außerschulische Bildungseinrichtung, in der Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit eröffnet werden soll, eigenständige Erfahrungen im Umgang mit Mathematik und ihren Anwendungen zu machen. Abseits vom methodisch eher traditionell frontal ausgerichteten Schulunterricht soll dabei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern auch die Chance gegeben werden, mathematische Problemlösestrategien zu entwickeln und über Mathematik sprechen zu lernen. Ein Ansatz, an dem sich die Arbeit daher dort immer wieder orientiert, ist das sogenannte „Sokratische Gespräch", eine nach dem Sokrates in Platons Dialogen benannte und u.a. von Leonard Nelson ausgearbeitete Lehrmethode. Neben der Philosophie wird die Mathematik als besonders geeignetes Anwendungsgebiet dieser Methode immer wieder hervorgehoben und daher auch von Seiten der Mathematikdidaktik aufgegriffen. Die Methode und ihre Anwendung im Mathematischen Haus soll im Folgenden näher dargestellt und didaktisch reflektiert werden. Nach einer Vorstellung des Mathematischen Hauses und seines Kurssystems lege ich zunächst Nelsons Konzept des Mathematikunterrichtes dar. Im Anschluss an einer Diskussion über die „pädagogischen Maßnahmen", die Gustav Heckmann für das sokratische Gespräch festgesetzt hat, werden mit den Ansätzen Martin Wagenscheins und Hartmut Spiegels zwei zeitgenössische mathematikdidaktische Ansätze zur Anwendung des Sokratischen Gesprächs vorgestellt. Vor diesem Hintergrund können dann konkrete Beispiele aus der Arbeit im Mathematischen Haus skizziert und mit Blick auf die Methode analysiert werden. Dabei steht einerseits die Frage im Vordergrund, inwiefern die diskutierten Lehr-Lern-Situationen Beispiele für gelungene sokratische Gespräche darstellen. Darüber hinaus wird außerdem der Frage nachgegangen, inwiefern Mathematik als Gegenstand Sokratischer Gespräche

1. خانه ریاضیات اصفهان, *Isfahan Mathematics House (IMH)*

eine besondere Herausforderung darstellt.

3.1 Das Isfahan Haus der Mathematik

In Vorbereitung auf das Jahr der Mathematik 2000 wurde 1996 die iranische Gesellschaft für Mathematiklehrkräfte (IMEC) gegründet und im Rahmen der Gründungskonferenz die Idee zur Einrichtung eines „Mathematischen Hauses“ ausgearbeitet. 1997 konnte die erste Einrichtung dieser Art in Isfahan eröffnet werden, die bald auch international Beachtung fand. Inzwischen gibt es iranweit in insgesamt 30 verschiedenen Städten ähnliche Institutionen.[2] Die vielfältigen Aufgaben und Ziele dieser außerschlulischen Einrichtung fasst der Gründer Ali Rejali wie folgt zusammen:

> „ The Houses are meant to provide opportunities for students and teachers at all levels to experience team work by beeing involved in a deeper understanding of mathematics through the use of various media. These include information technology and independent studies, feeling the essence of mathematics and learning about the history and applications of mathematical sciences, playing mathmatics games and studying interdisciplinary ideas such as mathematics and art, studying mathematics and genetics, mathematics and social sciences, and medical or engineering mathematics.“ [3]

Im Mathematischen Haus werden dazu vielfältige Aktivitäten für die verschiedensten Zielgruppen – Schüler, Studierende, Lehrer und die interessierte Öffentlichkeit – angeboten. Dazu zählen Vorträge, Ausstellungen, Lehrerfortbildungen, Förderung für Sehbehinderte, Workshops für Studierende und extracurriculare Kurse für Schülerinnen und Schüler verschiedener Schulstufen.[4] Im Folgenden sollen mit den *Hastēhāye Pažūhēši*[5] (sog. Forschungskernen) längerfristige außerschulische Angebote für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe insbesondere mit Blick auf die methodische Gestaltung der Kurse genauer vorgestellt werden.

Im Rahmen von ca. fünf bis sechswöchigen *Vorstellungskursen*[6] können sich die freiwillig teilnehmenden Schülerinnen und Schüler[7] ein Bild von verschiedenen

2. Vgl. Kenderov u. a. 2009, S. 88ff.
3. Rejali 2018.
4. Für eine ausführliche Darstellung siehe Kenderov u. a. 2009, S. 89ff sowie den Internetauftritt des mathematischen Hauses in Isfahan www.mathhouse.org.
5. هسته‌های پژوهشی
6. دوره آشنایی
7. Im Mathematischen Haus werden die Kurse nach Geschlechtern getrennt angeboten. Die Dozentinnen und Dozenten wie auch die Inhalte und die verwendeten Methoden sind dabei für beide Gruppen gleich. Daher wird im Folgenden entweder von Schülerinnen *oder* Schülern

möglichen inhaltlichen Vertiefungsrichtungen machen. In mehreren Sitzungen präsentieren die jeweils zur Verfügung stehenden Dozentinnen und Dozenten zentrale Gegenstände, interessante Forschungsfragen und Arbeitsweisen und stellen so die jeweiligen mathematischen Teildisziplinen ausführlich vor. Auf dieser Grundlage können sich die weiterhin Interessierten für die Teilnahme an einem *Vorbereitungskurs*[8] entscheiden. Dort werden an elementaren Beispielen mathematische Denk- und Arbeitsweisen reflektiert und in Kleingruppen eingeübt (siehe Beispiel unten). Weiterführend finden sich die Teilnehmer in Gruppen von 3-4 Personen zusammen, um im Rahmen der *Hastēhāye Pažūhēši* betreut durch eine Dozentin oder einen Dozenten einer tiefergehenden mathematischen Forschungsfrage nachzugehen. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden im Anschluss auf einem jährlich stattfindenden *Festival* – hausintern oder auch landesweit – präsentiert und ggf. prämiert. Zu den Forschungsfragen der Preisträger zählten z.B. Forschungsarbeiten zu folgenden Themen: fraktalgeometrischen Muster in den Parkettierungen der Mosaike in Isfahan, Spieltheorie, Stochastik. Methodisch spielt insbesondere im Rahmen der Vorstellungs- und Vorbereitungskurse das Sokratische Gespräch eine besondere Rolle, welches im Folgenden zunächst allgemein vorgestellt und exemplarisch analysiert werden soll.

3.2 Die Sokratische Methode als mathematik-didaktische Methode

3.2.1 Nelsons Konzept des Mathematikunterrichts

Die Sokratische Methode als eine pädagogische Methode wurde von NELSON lediglich in seinem Vortrag gleichen Namens erörtert. Der Vortrag ist jedoch eine philosophische Abhandlung und setzt gute Kenntnis von „kritischen Philosophie" voraus. Kapitel 2 stellt die notwendige und vorausgesetzte Kenntnis zur Verfügung. In der folgenden Ausführung wird der Vortrag anhand der Erläuterungen in Kapitel 2 in Bezug auf Mathematik-Didaktik analysiert.

Der Vortrag beinhaltet keine konkreten pädagogischen Anweisungen zur Durchführung der sokratischen Methode, sondern legt eine Sammlung der philosophischen Überzeugungen dar, die systematisch strukturiert sind. NELSONs Vortrag kann in drei Teile untergliedert werden: in einen ersten Teil, in dem nach einer kurzen Einleitung eine knappe erkenntnistheoretische Beschreibung von Philosophie,

gesprochen, wenn es um die Darstellung konkreter Situationen geht.

8. دوره میانی

Mathematik, Naturwissenschaften und Geschichte gegeben wird. Dabei werden primär die Philosophie und ihre Aspekte, wie z.B. ihre *Grundsätze* oder die dazugehörige *Methode* in den Fokus genommen, insbesondere die „Methode“ wird detailliert untersucht.[9] Hier stellt er die Stellungen von philosophischen Arbeiten, wie z.B. von Sokrates, Platon, Kant und Fries, vor und zeigt somit eine Entwicklungslinie einer Konzeption in der Geschichte der Philosophie auf. Auf diese Weise argumentiert er, dass die „großen philosophischen Wahrheiten“ stets als Allgemeingut der Denker zu betrachten sind.[10] Dieser Teil, dessen Themen in den vorangegangenen Abschnitten ausführlich erläutert worden sind, bildet eine Basis für den zweiten Teil seines Vortrages, in dem er die Didaktik berücksichtigt. In dem dritten Teil seines Vortrages argumentiert Nelson, dass die Anwendung der Sokratischen Methode im Kontext der Mathematik sie aus ihrer Notlage in der Philosophie befreien kann.

Als Auftakt des didaktischen Teils stellt er die Frage, warum diese Methode den Namen des Sokrates trägt. Die Vorgehensweise, in der Nelson diese Frage beantwortet, ist mit Berücksichtigung der philosophisch-pädagogischen Methode, die er vorzustellen beabsichtigt, sehr bemerkenswert. Zunächst stellt er die platonischen Schriften als seine Quelle der sokratischen Untersuchungen vor und begründet, warum er sie für diesen Zweck geeignet findet. Seine Argumentation beinhaltet sowohl philosophische als auch pädagogische Aspekte. Daran anschließend unterzieht er Sokrates’ Arbeit einer kritischen Prüfung.[11] Zuerst werden Sokrates’ Schwachpunkte sowohl in der Didaktik als auch in der Philosophie aufgeführt. Nelson erwähnt, dass Platon dies ebenso getan habe und die Mängel seines Lehrers in den Dialogen thematisierte, die er mit seinen Schülern geführt hat. Platon habe dieses vor dem Hintergrund seines großen Vertrauens in den Wert der tiefgehenden philosophischen Einsichten des Sokrates gemacht. Letztere sah Platon laut Nelson als einen Grund für die Bedeutung der sokratischen Lehren trotz ihrer – weitgehend geringfügigen – Mängel.[12]

Sokrates’ pädagogische Arbeiten werden von Nelson hingegen sehr scharf kritisiert, und dazu stellt er eine lange Liste von Fehlern auf. Auch in Sokrates’ philosophischen Untersuchungen sieht er Fehler, die laut Nelson allerdings bei beiden o.g. Philosophen gefunden werden können.[13] Die Einzelheiten dieser Fehler, die mit der Ausführung der *Abstraktion* zusammenhingen, werden von Nelson nicht erwähnt. Im Anschluss daran stellt er statt dessen die seiner Meinung nach

9. Vgl. Nelson 2002, S. 25ff.
10. Vgl. ebd.
11. Vgl. Nelson 2002, S. 26.
12. Vgl. Nelson 2002, S. 35.
13. Vgl. Nelson 2002, S. 26f. und S. 35.

ausgezeichneten, gründlichen philosophisch-pädagogischen Ansichten des SOKRATES vor, die die Grundlage seiner eigenen Methode bilden. Diese Punkte sind diejenigen, die ich in 2.1 und 2.2 ausführlich dargelegt habe, nämlich das *Selbstvertrauen der Vernunft* oder die *Formale Apperzeption*, der *Antidogmatismus* und die *kritische Methode*.

NELSON stellt für diejenigen, die seine pädagogische Methode durchführen möchten, keine expliziten Anweisungen zur Verfügung, sondern führt philosophische und pädagogische Einsichten zusammen und versucht sie zu rechtfertigen. Hier empfiehlt es sich nun, diesen Punkt mit der Tatsache zu vergleichen, dass NELSON diese Methode von SOKRATES – mit gewissen Änderungen oder, wie er selbst sagt, mit Verbesserungen und Präzisierungen – übernimmt. Dem vorausgehend war jedoch die Kritik an SOKRATES' philosophisch-pädagogischen Arbeiten. Das heißt, die philosophischen Einsichten SOKRATES werden reflektiert und diejenigen davon übernommen, die NELSON – seiner Ansicht nach sinnvoll – rechtfertigen kann. Gleiches hat er mit hoher Wahrscheinlichkeit auch von seinen Nachfolgern erwartet. Das ist wohl der Grund, warum solche Aspekte in den Arbeiten HECKMANNS (s. 3.2.2) und seiner Nachfolger (s. 3.2.3), in denen eine Liste von Instruktionen zur Durchführung eines Sokratischen Gesprächs zu finden ist, nicht im Sinne von NELSONs Philosophie und Pädagogik sind. Das kann damit begründet werden, weil so feste Kriterien angegeben werden, die die Grenzen des Sokratischen Gesprächs festlegen. Diese Form der Arbeit, kann die Gefahr erhöhen, dass man in Dogmatismus gerät.

NELSON stellt klar, was seiner Meinung nach das Ziel der Erziehung ist:

> „In der Tat: Ist das Ziel der Erziehung vernünftige Selbstbestimmung, d.h. ein Zustand, in dem der Mensch sich nicht durch äußere Einwirkungen bestimmen läßt, vielmehr aus eigener Einsicht urteilt und handelt".[14]

Nun versuche ich, mit Hilfe anderer Erklärungen, die NELSON in seinem Vortrag präsentiert hat, sowie der Themen, die ich in Kapitel 2 behandelt habe, die Hauptaspekte dieser Aussage, nämlich „vernünftige Selbstbestimmung" oder „Urteilen und Handeln aus eigener Einsicht", zu erläutern. Daher ist die Frage, die hier zu betrachten ist, die, *wovon* Einsicht zu gewinnen ist – d.h. auf der Basis welchen *Gegenstandes* im übertragenen Sinne – und *wie* diese erfolgt. Um die Arbeitsweise in einem Philosophieunterricht zu bestimmen, gibt NELSON folgende Erklärungen, in denen die Antwort auf die obige Frage enthalten ist:

> „Wir haben gefunden, daß die Philosophie der Inbegriff jener allgemeinen Vernunftwahrheiten ist, die nur durch Denken klar werden.

14. Nelson 2002, S. 44.

> Philosophieren ist demnach nichts anderes, als mit Hilfe des Verstandes jene abstrakten Vernunftwahrheiten zu isolieren und in allgemeinen Urteilen auszusprechen.
>
> Was folgt daraus für den philosophischen Unterricht?
>
> Jene allgemeinen Wahrheiten lassen sich, sofern sie in Worten ausgesprochen werden, zu Gehör bringen. Aber sie werden darum keineswegs eingesehen. Einsehen kann sie nur derjenige, der von ihrer Anwendung ausgeht in Urteilen, die er selbst fällt, und der dann, indem er selbst den Rückgang zu den Voraussetzungen dieser Erfahrungsurteile vollzieht, in ihnen seine eigenen Voraussetzungen wiedererkennt."[15]

„Die allgemeinen philosophischen Wahrheiten" sind allerdings laut NELSON nicht die einzigen, die eingesehen werden können. Im Folgenden gibt er andere Beispiele von Einsehbarem und Nicht-Einsehbarem:

> „Man kann daher nicht Philosophie, den Inbegriff dieser philosophischen Prinzipien, unterrichtend vermitteln, wie man etwa geschichtliche Tatsachen vermitteln kann, ja wie sich selbst geometrische Grundsätze vermitteln lassen. Tatsachen der Geschichte können als solche überhaupt nicht eingesehen werden. Sie können nur zur Kenntnis genommen werden.
>
> Und die Grundsätze der *Mathematik* lassen sich freilich einsehen, aber ihre Einsicht bedarf nicht des Umweges über den eigenen erfinderischen Gedankengang. Sie sind unmittelbar klar, sobald nur überhaupt die Aufmerksamkeit auf ihren Inhalt gerichtet wird."[16]

Dazu bezieht er sich auch auf DAVID HILBERT, der gesagt hat, dass „die mathematische Einsicht jedermann aufgezwungen kann."[17]

Eine mathematik-philosophische Betrachtung aus der Didaktik der Mathematik Nelsons

Die Ansicht NELSONS, dass die mathematischen Grundsätze unmittelbar einsehbar sind[18], ist ein Thema, das in dem letzten Abschnitt detailliert behandelt wurde

15. Nelson 2002, S. 33f.
16. Nelson 2002, S. 34.
17. Nelson 2002, S. 29.
18. Hier ist die Anwendung von „Einsehen" für die mathematischen *Grundsätze* in der Terminologie NELSONS unpräzise. Diese Grundsätze sind Urteile. Daher sind sie auf Basis dessen, was in dem Abschnitt über Erkenntnistheorie gesagt wurde, *mittelbare* Erkenntnisse. Es sind die

und am Ende dieses Abschnittes im Zusammenhang mit der Didaktik ausführlicher dargelegt wird.

Es muss nur vorab auf den folgenden Punkt hingewiesen werden: Oben wurde gesagt, dass NELSON die Grundsätze der Mathematik als einsehbar bezeichnet, er insistiert jedoch auf dieser Ansicht nicht durchgehend. In der Beschreibung der Aufgaben der „Kritischen Mathematik“ zählt er zwei Wege zur Begründung der mathematischen Axiome auf:

1) *Demonstrieren*, das besonders für anschauliche Erkenntnisse prädestiniert ist, die direkt in das Bewusstsein gelangen.[19]

2) *Deduktion*, die von NELSON als ein komplizierter Prozess beschrieben wird, in dem die dunklen unmittelbaren Erkenntnisse durch Nachdenken und Reflexion klar werden.[20]

Wenn die mathematischen Erkenntnisse von Vornherein alle vollkommen klar wären, erübrigte sich der zweite Weg. Dieser Punkt lässt die Vermutung aufkommen, dass nicht alle mathematischen Grundsätze seiner Ansicht nach anschaulich sind. Diese Vermutung wird in seinem Vortrag „Die Sokratische Methode“ bestätigt. Dort erwähnt er, dass die Mathematik angeblich einsehbare Grundsätze besitzt, und basierend auf ihnen kann sie mittels logischer Regeln progressiv – anders gesagt, dogmatisch – lückenlos und vollkommen verständlich aufgebaut werden.[21] Anschließend daran nennt er zwei Beispiele, mittels derer er argumentiert, dass die Mathematik, die so präsentiert wird, nicht unbedingt verständlich ist. Das erste Beispiel bezieht sich auf einen dogmatischen Mathematikunterricht:

> „Wir wollen hier nichts beschönigen und niemanden anklagen. Aber da wir Lehrer heute unter uns sind, wollen wir das öffentliche Geheimnis ruhig aussprechen: Der Erfolg ist – im großen betrachtet – ein negativer. Wir wissen alle aus eigener Erfahrung, daß selbst fähige und Anstrengungen nicht scheuende Schüler und Hochschüler, wenn man sie auf Herz und Nieren prüft, schon in den elementaren mathematischen Angelegenheiten unsicher sind und ihr Nicht-Wissen entdecken.“[22]

---

anschaulichen unmittelbaren Erkenntnisse, die sich laut NELSON „freilich“ einsehen lassen (vgl. 2.3.5). Die mathematischen Grundsätze können auf sie, als ihre Gründe, nur aufgewiesen werden. D.h., die Grundsätze sind aufweisbar und nicht einsehbar. Da dieser Vortrag NELSONs für ein allgemeineres Publikum gedacht war, ging er davon aus, dass seine und FRIES’ Terminologie für diese Zuhörer unverständlich sein würde.

19. S. (2.3) für eine ausführlichere Erklärung und Beispiele.
20. S. (2.3).
21. Vgl Nelson 2002, S. 66f.
22. Nelson 2002, S. 67.

Das andere Beispiel ist der Geschichte der Mathematik entnommen und bezieht sich auf die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Er weist auf die diesbezüglichen zentralen Beiträge von Newton, Cauchy und Weierstrass hin und sagt, dass diese Wissenschaft durch sie ebenso klar wurde wie die elementare Geometrie:

> „Wir wissen heute, daß alle diese Rätsel lösbar, ja daß sie – dank den Arbeiten eines Cauchy und Weierstrass – wirklich gelöst sind und daß dieser Zweig der Mathematik derselben restlosen Klarheit und Durchsichtigkeit des Aufbaus fähig ist wie die Elementare Geometrie.“[23]

Nelson hat damit eigentlich auf die subjektive Klarheit der Infinitesimalrechnung verwiesen. Sie bleibt aber trotzdem für viele noch undurchsichtig:

> „Und zwar nicht nur bei Dilettanten, an denen es nie mangeln wird, sondern unter der Führung eines gerade um die Funktionentheorie so verdienten Forschers wie Paul du Bois-Reymond. Seine »Lösung«, so erklärt er selbst, »ist, daß es ein Rätsel bleibt und bleiben wird«.“[24]

Diese Beispiele sind Nelsons Ansicht nach Belege dafür, dass die dogmatische Methode für das Verständnis der Mathematik nicht durchgehend geeignet ist:

> „Und da kommen wir zu dem Schluß, daß, wenn anders es überhaupt eine Gewähr für das Verstehen einer Sache gibt, der sokratische Unterricht solche Gewähr übernimmt. Und damit haben wir mehr gewonnen, als wir suchten. Denn dieser Schluß gilt ja nicht nur für die Philosophie, sondern für jedes Fach, wo überhaupt von Verstehen die Rede sein kann.“[25]

Die fehlende Eignung der dogmatischen Methode für das Lernen und Verstehen einer Wissenschaft – oder wie Nelson sagt, die Gewinnung von Einsicht in diese – bedeutet nichts anderes, als dass auch ihre Grundsätze nicht immer ohne weiteres einsehbar sind. Der Hauptgrund, warum Nelson die Sokratische Methode für das Lernen besonders in der Philosophie empfiehlt, ist, dass die Grundsätze in dieser Wissenschaft dunkel und unklar sind. Dieser Punkt bekräftigt die Vermutung, dass Nelson denkt, dass mindestens einige der mathematischen Grundsätze genauso dunkel und unklar sind. Dieser Aspekt soll in den folgenden Betrachtungen berücksichtigt werden.

23. Nelson 2002, S. 68.
24. Nelson 2002, S. 69.
25. Nelson 2002, S. 67.

Zunächst soll hier auf die drei o.g. Aspekte der *Sokratischen Methode* und wie sie sich in NELSONs Didaktik der Mathematik manifestieren, eingegangen werden. Im Anschluss daran wird der Widerspruch, der in seiner Beschreibung des Erziehungsziels evident wird, näher erläutert.

Der Kern der pädagogischen Lehre: Das Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft

NELSON hat in seinem Vortrag an keiner Stelle die „unmittelbaren Erkenntnisse“[26] explizit erwähnt. Der Grund dafür lag wahrscheinlich darin, dass der Vortrag für eine breitere Zuhörerschaft vorgesehen war und sich daher eine kompliziertere Terminologie als ungeeignet erwies. Die Erklärungen, die er von „Einsehbarem“ dargelegt hat, stimmen aber mit dem, was er die „unmittelbaren Erkenntnisse“ genannt hat, überein. Tatsächlich wird in dem Prozess, den er in dem obigen Zitat für das Erlangen von Einsicht beschrieben hat und der im Prinzip die *kritische Methode* ist, die Existenz unmittelbarer Erkenntnisse vorausgesetzt. Dass die Existenz dieser laut NELSON die Voraussetzung für die *regressive Methode der Abstraktion* ist, wurde in den vorausgehenden Abschnitten gründlich behandelt. Im Folgenden wird ein anderes Zitat aus seinem Vortrag gegeben, in dem, ohne die unmittelbare Erkenntnis ausdrücklich anzusprechen, auf ihre Existenz in den Erfahrungsurteilen hingewiesen wurde:

> „In jedem einzelnen dieser Urteile liegt neben den einzelnen Daten, wie sie Beobachtung liefert, in der Form der Beurteilung selbst eine Erkenntnis verborgen, die nur nicht als solche gesondert aufgefaßt wird und vermögen deren wir eben jenes gesuchte Prinzip in der Tat schon voraussetzten und anwenden.“[27]

NELSON weist meiner Meinung nach am klarsten in dem folgenden Zitat aus seinem Vortrag auf die unmittelbare Erkenntnis hin, in dem er „Deduktion“[28] als die Methode zur Begründung der Prinzipien vorstellt:

> „Freilich mußte die Lehre von der Wiedererinnerung, deren Wahrheit den eigentlichen und tiefsten Grund für die Möglichkeit und Notwendigkeit der sokratischen Methode bildet, erst im Fortgang der philosophischen Erkenntnis von der Umschlingung durch die platonische Mystik befreit werden. Diese Befreiung ist nach zwei Jahrtausenden

26. Vgl. **??**
27. Nelson 2002, S. 32.
28. In dem Sinne, den ich im Abschnitt über die Methode 2.2 erklärt habe.

> gelungen durch die Errungenschaften der kritischen Philosophen Kant und Fries, die der regressiven Methode der Abstraktion die Vollendung gaben, darüber hinaus aber die Ergebnisse der Abstraktion, die zwar als Prinzipien keines Beweises fähig sind, aber doch als Urteile noch begründungsbedürftig bleiben, durch die Methode der sogenannten *Deduktion* sicherstellen.“[29]

Somit hat er auch den Zusammenhang zwischen dem Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft und der Anamnesis-Lehre aufgezeigt, nämlich, dass das Prinzip im Kern mit der Anamnesis-Lehre identisch ist. D.h. die Didaktik, die er von Sokrates übernommen hat, basierte auf einer These, die mit dem o.g. Prinzip übereinstimmte. An einer anderen Stelle seines Vortrags stellt er Sokrates als die erste Person dar, die von dem Prinzip des Selbstvertrauens der Vernunft überzeugt war:

> „Sokrates ist der erste, der, getragen von dem Vertrauen in die Kraft des menschlichen Geistes, die Philosophische Wahrheit zu erkennen, mit diesem Vertrauen die Überzeugung verbindet, daß nicht Einfälle oder äußere Lehre uns diese Wahrheit erschließen, sondern daß nur planmäßiges unablässiges Nachdenken in der gleichen Richtung uns aus dem Dunkel zu ihrem Licht führt.“[30]

Nelson sieht in dem Glauben an dieses Prinzip den Grund dafür, dass Sokrates zulässt, dass seine Schüler in die *Aporie* gehen, um sie dann selbstständig den Weg zur Wahrheit finden zu lassen. Er weist auf diesen Punkt in der Beschreibung der Szene, in der Menon durch Sokrates nachhaltig irritiert wird und so verzweifelt das bekannte Paradoxon ausspricht:

> „Wir wissen alle, daß hier die platonische Ideenlehre anklingt, die der geschichtliche Sokrates selbst nicht gelehrt hat. Und doch ist in diesem Worte sokratischer Geist, der starke Geist des Selbstvertrauens der Vernunft, die Ehrfurcht vor ihrer sich selbst genügenden Kraft. Sie gibt Sokrates die Ruhe, die nach Wahrheit Suchenden in die Irre gehen und straucheln zu lassen. Ja sie gibt ihm den Mut, sie in die Irre zu schicken, um die Überzeugungen zu erproben, um das nur übernommene Wissen von der Wahrheit zu sondern, die nur im eigenen Nachdenken langsam in uns zur Klarheit reift.“[31]

An dieser Stelle soll nochmals darauf verwiesen werden, dass nach Nelsons Ansicht die Mathematik auf unmittelbaren Erkenntnissen fußt, die zumindest im Fall der

29. Nelson 2002, S. 42.
30. Nelson 2002, S. 42.
31. Nelson 2002, S. 51.

Geometrie anschaulich sind. Unter Berücksichtigung der Ausführungen in 2.3 finden wir die Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie durch die *Abstraktion*. Diese jedoch setzt eine Reihe von unmittelbaren Erkenntnissen als *Ideale* voraus, die die Rolle der *Normen* dafür einnehmen. Laut NELSON sind nicht alle Inhalte der Mathematik anschaulich, z.B. weist er hier auf Teile der Analysis hin. Alle mathematischen Sätze können allerdings mittels Logik auf Grundbegriffe und Axiome zurückgeführt werden. Die mathematischen Axiome – auch die nicht anschaulichen – können ihrerseits untersucht und mittels *Deduktion* begründet werden.

Wenn das Ziel also „urteilen und handeln aus eigener Einsicht" ist, könnte man daraus folgern, dass der Idealfall bei einem sokratischen Gespräch über ein mathematisches Thema auftritt, wenn alle Teilnehmer die grundlegende Erkenntnis des Prinzips einsehen und, bewusst darauf rekurrierend, das Gespräch führen. Hier beginnen sie mit einem Erfahrungsurteil oder einem mathematischen Satz und suchen nach in ihm verborgenen Prinzipien. Die gefundenen Prinzipien sollen selbst untersucht und mittels Deduktion begründet werden.[32] So wie NELSON Unterricht allgemein beschreibt, wird abgesehen davon, ob die Lernenden das oben genannte Prinzip kennen oder nicht, vom Lehrenden erwartet, dass er mittels Bewusstseins des Prinzips die Bedingungen vorbereitet, unter denen die Schüler selbst von einem Urteil oder einem mathematischen Satz zu den Axiomen gelangen können. Dass die Schüler selbst den beschriebenen Weg beschreiten, bezeichnet er als den sichersten Weg zur Erlangung der Einsicht.

Erster Schritt zur Praxis: Der Antidogmatismus

Diese Frage, warum der Antidogmatismus für den Mathematikunterricht wichtig ist, kann mit Hilfe dessen, was in 2.1.4 dargelegt wurde, beantwortet werden. Dort wurde erwähnt, dass NELSON dieses Thema von zwei Seiten her berücksichtigt: im Zusammenhang mit den Lernenden sowie dem Lehrenden. Die Dogmen müssen bei den Lernenden ausgeräumt werden, damit die mathematischen Erkenntnisse von ihnen eingesehen werden können, seien es die Erkenntnisse wie die Anschauung, die so unmittelbar zum Bewusstsein kommen, oder die, die eine aufwendige Reflexion erfordern. Dies ist jedoch ein direktes Resultat der Beschreibung, die über den Dogmatismus in 2.1.4 präsentiert wurde, nämlich das Fällen eines Urteils ohne kritische Untersuchung seines Grundes mittels des Verstandesvermögens. Die vier Faktoren, die NELSON für den Antidogmatismus für notwendig erachtet, zeigen den Lernenden s.E. den sichersten Weg zur Eliminierung von Dogmen (vgl. 2.1.4).

32. Für weitere Erklärungen dazu s. 2.3.

Dass der Lernende erstens an einem Gespräch teilnimmt, zweitens seine Meinung zu dem Thema äußert, ermöglicht die Prüfung, ob er von einem Dogma ausgeht oder nicht, d.h., ob er seine Aussage zuvor auf ihre Begründung untersucht hat oder nicht. Um seine Aussage zu durchleuchten, ist es notwendig, dass er drittens jede Querfrage akzeptiert und dass er viertens jede Behauptung rechtfertigt.[33] Somit fällt der Lernende zum Thema der Diskussion ein Urteil, und während der Diskussion sucht und stellt er seine Begründung dar. Dies ist der Weg, der nach NELSON zur Erlangung von Einsicht der Erkenntnis, sowohl philosophisch als auch mathematisch, führt.

Eine der Aufgaben der Lehrperson sieht er in diesem Zusammenhang in der Beseitigung der Hindernisse, auf die die Lernenden auf dem Weg zur Erlangung der Einsicht treffen. Eines dieser Hindernisse kann all das sein, was die Lehrperson zu dem Thema ihrerseits äußert. Wegen der Stellung der Lehrperson im Unterricht ist es sehr wahrscheinlich, dass der Lernende deren Äußerung ohne irgendeine Prüfung fraglos, d.h. als ein Dogma, übernimmt. Das ist der Grund, warum NELSON die Lehrperson auffordert, während des sokratischen Dialogs keinerlei Anweisungen zu dem Thema zu geben, damit der Lernende den Weg, den ich im nächsten Abschnitt beschreibe, selbstständig beschreitet.

Der Kern der Praxis: Die Begründung

Bis zu diesem Punkt wurde an verschiedenen Stellen dieses Kapitels auf den Weg, durch den der Lernende nach NELSON zu Einsicht und Verständnis der mathematischen – und zudem philosophischen – Erkenntnisse gelangt, hingewiesen. Nun werden diese Äußerungen NELSONs, die er in seinem Vortrag ausgeführt hat, akribisch zusammengetragen. Ich verweise ebenfalls auf die Ausführungen in dem Teil über die Mathematik-Philosophie, besonders in 2.3.1, um zeigen zu können, dass der Weg, den NELSON für die Lernenden der Mathematik im Blick hat, die *Kritik der Mathematik* ist. Es wurde bereits gesagt, dass NELSON die Philosophie als den „Inbegriff jener allgemeinen Vernunftwahrheiten [versteht], die nur durch Denken klar werden“.[34] Unter Berücksichtigung der Ausarbeitung in 2.1.3 sind diese Vernunftwahrheiten unmittelbare Erkenntnisse, die in uns liegen. Diese bilden ihrerseits eine Basis auch für die mathematischen Grundsätze (vgl. 2.3.1). Besonders für die Geometrie verweist NELSON auf reine Anschauungen als Grunderkenntnisse

33. Wenn diese Anforderungen mit den Aufgaben der „Kritischen Mathematik“ in 2.3 verglichen werden, kann daraus geschlossen werden, dass die „Kritische Mathematik“ das Resultat der mathematisch-philosophischen Untersuchungen sein wird, die gemäß dieser Anforderungen durchgeführt worden ist.

34. Nelson 2002, S. 33.

dieser Wissenschaft. Obwohl die Arithmetik aufgrund einer Reihe unmittelbarer Erkenntnisse begründet werden kann, zeichnen sich diese nach NELSON jedoch nicht überall durch Anschaulichkeit aus (vgl. 2.3.6). Was die gesamte Mathematik allerdings gemeinsam hat, ist, dass sie auf der Basis von Vernunfterkenntnissen, die dunkel in uns liegen, aufgebaut ist.

Später setzt NELSON in seinem Vortrag die beiden Begrifflichkeiten „klar werden" und „eingesehen werden" gleich und erläutert, wie diese unmittelbaren Erkenntnisse aufgeklärt werden können:

> „Einsehen kann [jene allgemeine Vernunftwahrheiten] nur derjenige, der von ihrer Anwendung ausgeht in Urteilen, die er selbst fällt, und der dann, indem er selbst den Rückgang zu den Voraussetzungen dieser Erfahrungsurteile vollzieht, in ihnen seine eigenen Voraussetzungen wiedererkennt."[35]

Auf diese Weise ist, was der Lernende geleistet hat, in der Tat „mit Hilfe des Verstandes jene abstrakten Vernunftwahrheiten zu isolieren und in allgemeinen Urteilen auszusprechen."[36] Daher kann man in anderen Worten im Zusammenhang mit Philosophie und Mathematik sagen, dass es so „nur Unterricht im Selbstdenken sein [kann], genauer: in der selbstständigen Handhabung der Kunst des Abstrahierens."[37] Diese Art des Denkens fußt jedoch in der antiken Philosophie:

> „SOKRATES ist nicht, wie schon ARISTOTELES ihm nachrühmt, der Erfinder der Induktion. Er verfolgt vielmehr die Bahn der Abstraktion, die das Wissen, das wir schon besitzen, nur durch Denken ins Bewusstsein hebt."[38]

NELSONS Ansicht nach waren allerdings SOKRATES' philosophischen Errungenschaften und seine Lehren nicht fehlerfrei und einige davon auch unvollständig. Insbesondere die Anamnesis-Lehre, die den „tiefsten Grund für die Möglichkeit und Notwendigkeit der sokratischen Methode bildet", muss von der „platonische[n] Mystik befreit werden".[39]

Die oben genannte Methode, die NELSON für den Mathematikunterricht verfolgt, lässt sich in zwei Teile untergliedern:

35. Nelson 2002, S. 33f.
36. Nelson 2002, S. 33f.
37. Nelson 2002, S. 34f.
38. Nelson 2002, S. 40.
39. Nelson 2002, S. 42.

1. *Die regressive Methode der Abstraktion*, mittels derer man zu den Prinzipien, die in dem anfänglichen Urteil oder mathematischen Satz enthalten sind, gelangt.
2. *Die Demonstration bzw. die Deduktion* der mathematischen Prinzipien, um diese abzusichern. Die Demonstration wird dann verwendet, wenn die Prinzipien auf anschaulichen unmittelbaren Erkenntnissen begründbar sind. Die Deduktion dagegen ist dann erforderlich, wenn die mathematischen Prinzipien nicht einsehbar oder anschaulich wären.

Es wurde in 2.3 ausführlich dargestellt, dass die von Fries konzeptualisierte regressive Methode, die in Punkt 1 angesprochen ist, im Kontext der Mathematik das ist, was Hilbert „*Axiomatische Methode*" nennt. Nelson sieht die Ausführung dieser Methode in der Mathematik, wie Hilbert sie für Euklidische Geometrie geleistet hat, als einen Schritt hin zu der *Kritische Mathematik*.[40] Für den zweiten Punkt und für die Beleuchtung seiner Stellung in der Kritik der Mathematik verweise ich nochmals auf ein Zitat, in dem Nelson darlegt, was ich im Detail ausgeführt habe, nämlich,

> „daß, das Gebiet des Deducierbaren in unserer Erkenntnis auch mit der Philosophie nicht abgeschlossen ist. Es muß – außer der die Evidenz schon mit sich führenden und darum dem Interesse des Mathematikers allein genügenden Begründung durch Demonstration – auch eine *kritische Deduktion der Axiome der Mathematik*, ihrem ganzen Umfange nach, möglich sein. Diese Übertragung der Kritik auf Axiomsysteme der Mathematik konstituiert eine eigen wissenschaftliche Disciplin: die Philosophie der Mathematik oder, nach besserer Bezeichnung, die *Kritische Mathematik*."[41]

Zusammenzufassend kann man festhalten, dass das, was Nelson von Mathematiklehrenden erwartet, eine anspruchsvolle wissenschaftliche Arbeit ist: Er fordert in der Tat von ihnen, die Bedingungen zu schaffen, unter denen die Lernenden selbstständig die Kritik der Mathematik als Methode durchführen können, so wie ich es oben kurz und in 2.3 detailliert behandelt habe.

3.2.2 Die pädagogischen Maßnahmen Heckmanns

In 1.3.2 wurde Gustav Heckmann (1898-1996) und seine Rolle in der Konsolidierung und Entwicklung der Tradition Neslons bereits vorgestellt. Obwohl

40. Vgl. 2.3.1.
41. Nelson 1970b, S. 37, wie es in Peckhaus 1990 S. 158 zitiert wurde.

seine Arbeit ausschließlich in der Philosophie und der Didaktik der Philosophie angesiedelt war, betrachte ich hier seinen Beitrag zu der sokratischen Methode, da die Nachfolger der Tradition[42], die in der Didaktik der Mathematik tätig waren, sich auf ihn beziehen. Durch eine Beschreibung seines Verständnisses und seiner Darlegung der Methode können die Stellen, wo er möglicherweise von Nelson abweicht, ebenso erklärt werden. Der zunächst bei Max Born promovierte Physiker hat, nachdem er Nelsons Vortrag „Die Sokratische Methode" gehört hatte, seinen Werdegang geändert und sich auf die Didaktik, insbesondere auf das „sokratische Gespräch" fokussiert.[43] Er hat als Teilnehmer die sokratischen Gespräche, die von Nelson geleitet wurden, erlebt. Er war so beeindruckt von Nelsons Arbeit und insbesondere von seiner Sokratischen Methode, dass er beschloss, im Kreis um Nelson mitzuarbeiten. Heckmann hat selber als Lehrer einige sokratische Gespräche in dem von Nelson gegründeten Landerziehungsheim in der Walkemühle geleitet. Nach seinem Exil in Dänemark und England von 1933 bis 1946 hat er an der Pädagogischen Hochschule Hannover Didaktik der Philosophie gelehrt. Dort hat er regelmäßig Veranstaltungen, in denen er sokratische Gespräche geführt hat, angeboten.[44] Die letzte hat im Sommersemester 1982 stattgefunden. In dieser Zeitperiode konzentrierte er sich eher auf die Praxis als auf die Theorie der sokratischen Methode. Im Vorwort zur Neuauflage des von Heckmann verfassten Buches „*Das sokratische Gespräch – Erfahrungen in philosophischen Hochschulseminaren*" sagt Dieter Krohn, einer seiner Schüler, mit Hinweis auf die vier Merkmale des sokratischen Gesprächs nach Heckmann:

> „Hinter dieser Beschränkung auf diese vier unverzichtbaren Merkmale des Sokratischen Gesprächs in Gustav Heckmanns Verständnis leuchtet weiterhin eine Wahrheitsauffassung auf, die sich von der Nelsons gelöst zu haben scheint, ohne schon explizit als ein eigenständiger Theoriebaustein für eine neue philosophische Grundlegung des Sokratischen Gesprächs formuliert zu sein. Gustav Heckmann verzichtet ausdrücklich auf die Formulierung einer geschlossenen Theorie des sokratischen Gesprächs."[45]

In dem o.g. Buch beginnt er zunächst mit Berichten aus seinen Sokratischen Seminaren, die mit einer Darstellung der „Allgemeinste[n] Definition der sokratischen Methode" seiner Ansicht nach ausgehen. Heckmann legt dar:

> „Sokratische Methode im weitesten Sinne wird praktiziert, wo und

42. Wie z. B. Hartmut Spiegel und Rainer Loska (s. 3.2.3).
43. Vgl. Heckmann 1993, S. 7.
44. Vgl. ebd.
45. Heckmann 1993, S. 9.

> wann immer Menschen durch gemeinsames Erwägen von Gründen der Wahrheit einer Frage näherzukommen versuchen. Dieses Bestreben tritt vielfach hier und da in Gesprächen auf. Sokratisch würde ich ein Gespräch nennen, in dem es nicht nur sporadisch auftritt, sondern durchgängig das Gespräch bestimmt; in dem durchgängig ein gemeinsames Erwägen von Gründen stattfindet.“[46]

Im Anschluss daran sondert er aber die sokratische Methode als Lehrmethode aus:

> „Eine spezielle Form des sokratischen Gesprächs ist das sokratische *Lehr*gespräch. In ihm hilft ein Lehrer, dem die erörterte Sache vertrauter sein muß als den Schülern, diesen, sich durch Erwägen von Gründen selber ein Urteil zu bilden.“[47]

Die Berichte beruhen auf den Protokollen und Reflexionen, die er als Leiter und seine Studenten als Teilnehmer der Seminare geschrieben haben. Danach behandelt er basierend auf diesen Erfahrungen einige Aspekte des sokratischen Gesprächs. In diesen Untersuchungen verwendet er überwiegend die Terminologie Nelsons. Hier zeigt er, angelehnt an das, was er in den Gesprächen erlebt hat, die Seite der Methode, die eher praxisbezogen ist. Dies hat jedoch zur Folge, dass einige Unterschiede zwischen der von Nelson konzipierten Methode und dem, was Heckmann dargelegt hat, auftreten. Im Folgenden betrachte ich das 7. Kapitel des o.g. Buches näher, nämlich „Sechs pädagogische Maßnahmen. Die dem sokratischen Gespräch zugrundeliegende Wahrheitsfassung“. Ich stelle also einerseits die Anweisungen Heckmanns vor, auf die sich die Nachfolger dieser Tradition in der Didaktik der Mathematik beziehen, andererseits wird dadurch ermöglicht, die Abweichung Heckmanns von der Theorie Nelsons zu erörtern.

Um “*die pädagogische Aufgabe*“ eines Gesprächsleiters im „sokratischen Lehrgespräch“ darzustellen, legt Heckmann zunächst eine Charakterisierung dar:

> „Ein Gespräch ist sokratisch, wenn es dem einzelnen Teilnehmer dazu verhilft, den Weg vom konkreten Erfahrenen zur allgemeinen Einsicht selber zu gehen.“[48]

Der Leiter muss also die Bedingungen schaffen, unter denen dies erfolgen kann. Dazu offeriert Heckmann „*pädagogische Maßnahmen*“ für den Gesprächsleiter, die den Erfolg des Gesprächs befördern sollen.[49]:

46. Heckmann 1993, S. 13.
47. Heckmann 1993, ebd.
48. Heckmann 1993, ebd.
49. Heckmann 1993, S. 85

1. *Das „Gebot der Zurückhaltung"*: Damit wird auf den Aspekt der sokratischen Methode verwiesen, den Raupach-Strey als *Antidogmatimus* bezeichnet und den ich in den vorausgehenden Abschnitten behandelt habe. Der Leiter weigert sich, seine Meinung zu dem Thema des Gesprächs mitzuteilen. Somit verweist er die Teilnehmer des Gesprächs auf ihr eigenes Urteilsvermögen.

2. *Die „Forderung im Konkreten Fuß zu fassen"*: Heckmann sieht eine Aufgabe des Leiters darin, dass er die Teilnehmer dazu auffordert, sich auf ein konkretes Beispiel, das mit dem Thema zusammenhängt, zu beziehen, und während des Gesprächs den Zusammenhang mit dem Beispiel im Blick zu behalten. Am besten wäre es, wenn das Thema mittels eines „von einem Teilnehmer wirklich Erlebten"[50] behandelt wird. Diese Anweisung bezieht sich auf eine Eigenschaft der *regressiven Methode der Abstraktion*, nämlich, dass sie ein Erfahrungsurteil als Ausgangspunkt hat.[51]

3. *Das „Gespräch als Hilfsmittel des Denkens voll ausschöpfen"*: Der Gesprächsleiter muss dazu beitragen, dass das Gespräch für alle verständlich bleibt. Mit solchen Fragen wie „Kannst du bitte deine Meinung erklären?", „Wer hat das verstanden?" oder „Wer kann das zusammenfassen" werden die Teilnehmer dazu aufgefordert, ihre Gedanken klar und deutlich auszudrücken und gleichzeitig die Äußerungen anderer Teilnehmer aufzunehmen.

4. *„Festhalten der gerade erörterten Fragen"*: Jede erörterte Frage muss gründlich behandelt oder mit einer Begründung abgeschlossen werden. Der Leiter muss sicherstellen, dass dies bei dem Gespräch stattfindet.

5. *„Hinstreben auf Konsensus"*: In der Erklärung dieser Maßnahme, die nicht bei Nelson – auch nicht implizit – auftritt, setzt Heckamnn das Ziel des sokratischen Gesprächs als „über bloß subjektives Meinen hinauszukommen" fest:

   > „Das Hinausstreben über bloß subjektives Meinen, das Streben nach intersubjektiv Gültigem, nach Wahrheit, wie wir früher unbefangen sagten, ist Motiv des sokratischen Gesprächs."[52]

6. *„Das Gespräch lenken"*: Der Gesprächsleiter muss, ohne sich zu dem Thema zu äußern, das Gespräch so lenken, dass der Gedankengang möglichst immer klar bleibt. Er ist dafür zuständig zu verhindern, dass die Teilnehmer in Dunkelheit geraten und sich bei der Diskussion verwirrt und hilflos fühlen.[53]

50. Heckmann 1993, ebd.
51. Vgl. 2.2.
52. Heckmann 1993, S. 86f.
53. Heckmann 1993, S. 88.

Der Unterschied zwischen HECKMANNs und NELSONs Konzipierung der Sokratischen Methode ist in der fünften Maßnahme, nämlich „Hinstreben auf Konsus“, besonders klar zu finden. Um das Ziel des sokratischen Gesprächs zu erreichen, müssen demnach die Teilnehmer des Gesprächs zu einem Konsensus gelangen können. Dieser gilt dann jedoch nur vorläufig als eine zweifellose Aussage:

> „Wenn wir im sokratischen Gespräch Konsensus über eine Aussage erreicht haben, dann hat dieser den Charakter des Vorläufigen: Bis auf weiteres bestehen keine Zweifel mehr an der erarbeiteten Aussage. Jedoch kann uns ein bisher nicht erwogener Gesichtspunkt in den Blick kommen, der neue Zweifel hervorruft. Dann muß die bisher nicht mehr angezweifelte Aussage von neuem geprüft werden.“[54]

Diese Aufforderung basiert er darauf, dass er einerseits „die Idee der Wahrheit“ als die Hauptmotivation des sokratischen Gesprächs darstellt:

> „[...] eben diese Idee veranlaßt die von ihr Motivierten zu kritischem Selbstverständnis. Im sokratischen Gespräch sind wir von ihr motiviert.“[55]

Andererseits bestreitet er jedoch die Voraussetzung eines irrtumsfreien Urteils für das sokratische Gespräch:

> „Das sokratische Gespräch setzt in der Tat den Begriff »irrtumsfreie Wahrheit« nicht voraus. Es setzt voraus, daß wir eine Aussage als falsch oder als nicht hinreichend begründet erkennen können.“[56]

Die Anwendung des Begriffs „Wahrheit“ in der Form, die in der Erläuterung HECKMANNs im Punkt 5 auftritt, ist ein Beispiel für die Abweichungen HECKMANNs von der Terminologie NELSONs. Wie auch KROHN, verwendet HECKMANN diesen Begriff, z.B. in »irrtumfreie Wahrheit«, mit einer anderen Bedeutung als der, die bei NELSON zu finden ist. NELSON verwendet einerseits den Terminus „Wahrheit“ meistens mit dem Begriff „Vernunft“, und damit verweist er auf die „unmittelbaren Erkenntnisse“, die durch die Vernunft erlangt werden. Bei solchen Erkenntnissen ist „Irrtum“ von vornherein ausgeschlossen, da dieser Begriff erst nach der Reflexion durch Anwendung des Verstandes auftaucht.[57] Andererseits sind beispielsweise mathematische Aussagen laut NELSON als Urteile dem Irrtum ausgesetzt.[58] Eine

54. Heckmann 1993, S. 87.
55. Heckmann 1993, S. 87.
56. Heckmann 1993, S. 87.
57. Vgl. 2.1.3.
58. Vgl. Herrmann 2004.

Aussage (oder ein Urteil) ist eine mittelbare Erkenntnis, die höchstens auf eine „Wahrheit“ begründet werden kann.[59]

3.2.3 Die Nachfolger der Tradition Nelsons in der Didaktik der Mathematik

Im Bereich der Didaktik der Mathematik gibt es verschiedene Autoren, die in der Tradition Leonard Nelsons das Sokratische Gespräch als bevorzugte Lehrmethode beschreiben und in der Anwendung darstellen. Dazu gehören Hartmut Spiegel[60], Rainer Loska[61] und Martin Wagenschein [62], wobei sich die beiden erstgenannten auf den Nelsonschüler Gustav Heckmann beziehen, während Wagenschein direkt die Ideen Nelsons aufgriff. Im Folgenden soll mit Spiegel und Wagenschein jeweils eine Position aus beiden Traditionen kurz skizziert werden, um dann Gemeinsamkeiten und Unterschiede vor dem Hintergrund der Philosophie Nelsons herauszustellen.

Spiegel orientiert sich in seiner Verwendung von Sokratischen Gesprächen beim Mathematiklernen explizit an den von Heckmann aufgestellten Regeln. Diese betreffen einerseits das Verhalten der Teilnehmer im Dialog, und andererseits beschreiben Sie die Rolle des Gesprächsleiters. Für die Teilnehmer bedeutet sokratisches Gespräch in diesem Sinne, dass sie neben einer für alle verständlichen, klaren und kurzen Sprache das im Moment besprochene Thema beibehalten sollen. Wichtig ist außerdem, dass die Beiträge der anderen Teilnehmer gleichberechtigt zur Geltung kommen und in die Diskussion eingebunden werden sollen. Dabei werden Verständnisfragen aufgegriffen und Zweifel ausgesprochen mit dem Ziel zu einem Konsens zu gelangen.[63]

Für den Gesprächsleiter gelten die bereits dargestellten „sechs pädagogischen Maßnahmen“ nach Heckmann[64] Den Wert für das Lehren und Lernen von Mathematik verdeutlicht Spiegel einerseits mit Hilfe eines Beispiels aus der Erwachsenenbildung.[65] An anderer Stelle[66] gibt er die Reaktionen von Studierenden, mit denen nach den oben beschriebenen Regeln gearbeitet wurde, wieder und kommentiert diese. Dabei stellt er zum einen fest, dass sich die Mathematik in besonderer Weise

59. Vgl. 2.1.3.
60. Spiegel 1991.
61. Loska 1995.
62. Wagenschein 1999.
63. Vgl. Spiegel 1989b, S. 54.
64. Vgl. 3.2.2
65. In mehreren Sitzungen wird der Frage nachgegangen, warum eine bestimmte Multiplikationstechnik allgemeingültig ist (vgl. Spiegel 1989b, S. 57ff).
66. Spiegel 1989a.

als Gegenstand sokratischer Gespräche eigne, da hier das „Selbstvertrauen in die Kraft des eigenen Denkens“ besonders deutlich werden könne.[67]

Darüber hinaus stellt er fest, dass die im sokratischen Gespräch gemachten Erfahrungen die Auffassungen der Studierenden von Mathematik erweitern können, da so insbesondere deren Prozesshaftigkeit erlebbar wird. Auch stellt er fest, dass Uneindeutigkeiten im Verständnis und in der Verwendung der Begriffe explizit werden und damit ausgeräumt werden können. Dies geschehe im Gegensatz zu anderen Unterrichtsgesprächen nicht zufällig, sondern sei in den oben dargestellten Regeln des sokratischen Vorgehens angelegt. Dies gelte auch für die Erfahrung, dass im Verständigungsprozess das eigene Verstehen geschärft werden kann und der Wert von explizit gemachtem Unverständnis für den Verstehensprozess einer Gruppe erlebbar wird. Spiegel äußert weiter die Vermutung, dass die Erfahrungen von Studierenden mit sokratischen Gesprächen im Rahmen der Lehrbildung auch zum Überdenken der später angewendeten Methoden und Lehrerrollen führen könnten.[68]

Von Spiegels Ausgestaltung Sokratischer Gespräche im Mathematikunterricht in gewissem Sinne abzugrenzen ist der Ansatz von Martin Wagenschein.[69] Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist es, Schülerinnen und Schüler ausgehend von initialen Problemen der Erfahrungswelt zu einer „Wiederentdeckung“ mathematischer Grundannahmen anzuregen. Die initialen Probleme könnten dabei z.B. der Physik oder auch der mathematischen Anschauung entnommen sein, sollten aber von den Lernenden zumindest potentiell erlebbar sein. Wagenschein selbst beschreibt das Ziel dieses Vorgehens mit dem Schlagwort „aus dem Seltsamen das Selbstverständliche zu machen“ (S. 135) und stützt sich dabei auf das „Genetische Prinzip“ nach Freudenthal und Wittenberg. Dieses Vorgehen ist motiviert durch die Grundannahme, dass es im Mathematikunterricht nicht darum gehen sollte, den deduktiven Aufbau der Mathematik nachzuvollziehen, sondern diesen exemplarisch zu rekonstruieren. Dies entspricht in seinen Grundzügen und auf elementarem Niveau dem, was Hilbert[70] als Paradigma des „Axiomatischen Denkens“ im Bereich der Wissenschaft Mathematik bezeichnet. Außerdem fällt dieses Vorgehen unter den Begriff der „regressiven Methode“ und damit unter ein das Sokratische Gespräch nach Nelson auszeichnendes Prinzip.[71]

Eine zentrale Stellung nimmt auch in Wagenscheins Methode die Rolle des Lehrenden bzw. des Gesprächsleiters ein, die er mit der Metapher des Flussufers

67. Spiegel 1989a, S. 169.
68. Vgl. Spiegel 1989a, S. 170f.
69. Wagenschein 1999.
70. Hilbert 1918.
71. Vgl. 2.2.

beschreibt:

> „Dabei braucht nicht der Lehrer der Antreiber zu sein, der den Fluss des Verstehens-Prozesses in Gang hält. Er kann sich den Ufern vergleichen, zwischen denen jener Fluss seinen Weg sucht, bewegt allein vom Problem.“[72]

Wagenschein gibt im Gegensatz zu Spiegel keine expliziten Verhaltensregeln für den Gesprächsleiter vor, sondern orientiert sich an Fragen, wie Sie Nelson für ein Sokratisches Gespräch vorschlägt: z.B. „Wer hat verstanden, was eben gesagt worden ist?“ oder „Von welchen Fragen sprechen wir eigentlich?“. Da diese aber vom Paradigma eines strengen „Antidogmatismus“ [73] getragen lediglich darauf gerichtet sind, das Gespräch der Teilnehmer immer wieder anzuregen, schlägt Wagenschein für die Anwendung im Mathematikunterricht in gewissem Sinne inhaltsspezifischere Fragen vor. Dabei denkt er an Fragen, deren Beantwortung auf dem Lösungsweg mathematischer Fragen hilfreich sein können, wie sie George Polya auflistet: „Was ist unbekannt? Was ist gegeben?“, „Kennst Du eine verwandte Aufgabe?“ usw. (Polya 1949, Umschlagseiten) Das heißt, der Gesprächsleiter soll zwar nicht direkt auf das konkrete Problem eingehen, schlägt jedoch durch solche Fragen erprobte mathematische Lösungsstrategien vor.

An diesen beiden Ansätzen zur Verwendung des Sokratischen Gesprächs im Mathematikunterricht werden exemplarisch die Unterschiede zwischen Nelsons Ansatz und dem seines Schülers Heckmann deutlich: Während Spiegel in Anlehnung an Heckmann explizite Gesprächsregeln für Teilnehmer und Leiter des Gesprächs vorgibt, beschreibt Wagenschein Nelson enger folgend lediglich eine dem Gespräch dienliche Haltung des Gesprächsleiters und verdeutlicht diese an exemplarischen Fragen oder Regieanweisungen.

Darüber hinaus nehmen Beispiele in beiden Ansätzen verschiedene Rollen ein. Wagenschein und Nelson dienen Beispiele als „initiale Probleme“, von denen die sogenannte „regressive Methode der Abstraktion“[74] ausgeht. Bei Spiegel dagegen beginnt ganz in der heckmannschen Tradition das Gespräch mit einer bestimmten Thematik für die zunächst verschiedene Beispiele gesucht werden. Aus diesen wird dann im Gespräch von den Teilnehmern eines ausgewählt, von dem aus dann wiederum auf eine allgemeine Regel und grundlegende Prinzipien geschlossen werden soll.[75]

72. Wagenschein 1999, S. 125.
73. Vgl. 2.1.4.
74. Vgl. 2.2
75. Vgl. das sogenannte „Sanduhr-Modell“ nach Kessels 1997.

Einen zentralen Unterschied zwischen Heckmanns und Nelsons Auffassung von sokratischen Gesprächen besteht im Ziel des Gesprächs. So soll Heckmann folgend ein Konsens der Gesprächsteilnehmer erreicht werden (vgl. auch die 5. Regel nach Spiegel, s.o.), wobei es sich dabei um eine Art gesellschaftlicher Einigung der Gesprächsteilnehmer handelt, bei der es nicht zuerst auf die inhaltliche Korrektheit ankommt.[76] Für Nelson dagegen steht nicht der Konsens im Sinne einer Problemlösung im Vordergrund, sondern einerseits die Erkenntnis der zu Grunde liegenden Prinzipien und andererseits die Hinführung der Teilnehmer zu selbstständiger Implementierung der „*Methode* der Lösung".[77] Wagenschein, dessen Blick ausschließlich auf das Mathematiklernen gerichtet ist, nimmt hier eine Zwischenstellung ein. Auf der einen Seite lässt er den Gesprächsleiter mittels der Polyaschen Fragetechnik sehr lösungs- und damit implizit auch konsensorientiert agieren, wobei es selbstverständlich auf eine mathematisch korrekte Problemlösung abzielen soll. Auf der anderen Seite ist im Sinne des genetischen oder axiomatischen Vorgehens ebenfalls die Erkenntnis der zu Grunde liegenden Sätze und Prinzipien das Ziel des Gesprächs.

Hier zeigt sich eine Besonderheit der Anwendung der Sokratischen Methode im Bereich der Mathematik: Bezogen auf ein konkretes Problem ist dem Gesprächsleiter in der Regel eine mathematisch korrekte Lösung bekannt und damit der angestrebte inhaltliche „Konsens" ebenfalls. Eine Lösung könnte somit auch „dogmatisch" präsentiert werden. Jedoch stellt bereits Nelson selbst fest, dass „der beste mathematische Unterricht, wenn er nach dogmatischer Methode erfolgt, trotz aller seiner Klarheit gründliches Verständnis nicht erzwingen kann" (Nelson 2002, S. 67.), was er nicht zuletzt mit dem Hinweis auf berühmte mathematisch durchaus als begabt zu bezeichnende Schüler (etwa Du Bois-Reymond in der Nachfolge von Weierstrass) zu belegen versucht. Das eigentliche Ziel der Methode muss somit eher darin bestehen, den Lernenden eine Erfahrung des Prozesses der mathematischen Problemlösung und damit ein tieferes Verstehen zu ermöglichen.

Die Orientierung auf einen Konsens hin liegt bei mathematischen Problemen darüber hinaus im Gegenstand selbst, d.h. in der Aufforderung zu einer mathematisch korrekten Problemlösung, wobei „mathematisch korrekt" bedeutet, dass ein Lösungsvorschlag mit mathematischen Mitteln begründbar bzw. beweisbar ist (und nicht etwa demokratisch abgestimmt oder sozial ausgehandelt wird). Der Gesprächsleiter muss also nicht im Sinne von Spiegels fünfter Gesprächsregel dafür sorgen,

76. Dies ist mit Blick auf die Anwendung der Sokratischen Methode auf philosophische Fragestellungen auch nicht verwunderlich. Mit Blick auf den Mathematikunterricht kann dieser liberale Konsensbegriff allerdings zu schwer auflösbaren Schwierigkeiten führen (vgl. z.B. die von Anna Sfard beschriebenen Beispiele in Sfard 2002).

77. Vgl. Nelson 2002, S. 46f.

dass es zu einem Konsens kommt, sondern höchstens im Blick behalten, dass es sich um einen *Konsens im mathematischen Sinne* handelt (also z.B. zur Begründung auffordern oder gegebene Begründungen hinterfragen oder zur Präzisierung der Begriffe auffordern).

3.3 Die Sokratische Methode im Isfahan Haus der Mathematik

3.3.1 Exemplarische Erfahrungen

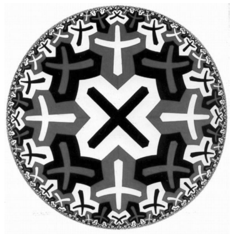
Die Arbeit im Mathematischen Haus orientiert sich einerseits an den methodischen Regeln für sokratische Gespräche nach Spiegel (s.o.). Andererseits verwenden die Dozierenden Gesprächsanregungen, die sich, wie oben in Wagenscheins Herangehensweise beschrieben, auch an den Polyaschen Fragen orientieren, und das Gespräch beginnt im Sinne Wagenscheins mit Hilfe eines „initialen Problems". Im Folgenden soll dies an drei Beispielen aus den Bereichen Vorstellungskurs Geometrie und der Vorbereitung auf die eigenen Forschungsprojekte exemplarisch dargestellt werden.

Neben einem Rückblick auf das aus der Schule bereits bekannte Wissen um Grundbegriffe der Geometrie ist es ein Anliegen des Vorstellungskurses, Anwendungen von Geometrie u.a. im Alltagsleben kennen zu lernen. Methodisch sollen die Teilnehmer von Beginn an die Erfahrung machen, sich aktiv auch in der Großgruppe am Lernprozess zu beteiligen. Dies ist für viele Teilnehmer eine neue Erfahrung, da die Unterrichtskultur im Fach Mathematik an iranischen Schulen häufig eher frontal geprägt ist.

Die (Wieder-)Entdeckung und Beschreibung geometrischer Grundkonzepte war das Hauptanliegen der ersten Sitzung. Dazu wurden zum Auftakt zwei Werke des Künstlers M. C. Escher („Circle Limit I" und „Circle Limit II") präsentiert, die die Teilnehmer möglichst mit Hilfe mathematischer Begriffe beschreiben sollten.

Um dazu erste Ideen zu sammeln, wurde die Gruppe zunächst in kleinere Gruppen unterteilt, die jeweils von einer Dozentin oder einem Dozenten betreut wurde, deren Aufgabe darin bestand, die Ideen der Teilnehmer zu sammeln, zu genauen Beschreibungen und Begründungen herauszufordern, aber nicht zu bewerten. Im Anschluss wurden die Ergebnisse durch die Schülerinnen und Schüler selbst im Plenum vorgestellt und auf Rückfragen der anderen Gruppen eingegangen.

(a) Circle Limit I



(b) Circle Limit II

Abbildung 3.1

Zur Gesprächsleitung haben sich die Dozierenden in den Kleingruppen an den Regeln Spiegels für die Gesprächsführung orientiert. Es gab mit den Eschergrafiken einen „initialen Gegenstand“ im wagenscheinschen Sinne, wobei dieser nicht direkt auf eine mathematische Problemstellung führt, sondern der Auftrag im Auffinden bekannter mathematischer Begriffe bestand. Das Ziel der Beschreibung der den Grafiken zu Grunde liegenden mathematischen Ideen konnte somit auch zu einem in gewissem Sinne konsensoffenen Dialog führen: Die Schülerinnen müssen sich zwar darauf einigen, ob die Anwendung eines bestimmten Begriffs angemessen zur Beschreibung eines bestimmten Phänomens in der gegebenen Graphik ist (z.B. Symmetrie). Dabei gibt es jedoch nicht die eine vollständige oder eindeutige Lösung des Auftrags. In der Gruppe muss also ein Konsens gefunden werden, welcher aber nicht durch das mathematische Problem und seine Lösung vorgegeben ist. Der Dozent unterstützt diese Art der Konsensorientierung wie oben diskutiert, indem er zur Präzisierung des Beschriebenen auffordert.

Nach der Erinnerung an einige Grundbegriffe der Schulgeometrie widmet sich die zweite Sitzung des Vorstellungskurses exemplarisch einem Parkettierungsproblem initiiert durch die Frage, warum Bienenwaben immer aus regelmäßigen Sechsecken bestehen. Das Ziel der Sitzung war es einerseits einen Einblick in elementargeometrische Modellierungsprobleme zu bekommen und darüber hinaus an einem anschaulichen Beispiel sowohl (prä-)formale als auch experimentelle innermathematische Begründungsmuster zu erleben. Dabei handelt es sich bei dem gestellten Einstiegsproblem zunächst um ein klassisches initiales Problem im Sinne Nelsons, da es um die Erklärung eines Naturphänomens geht. Allerdings wurde mit Blick auf die zur Verfügung stehende Zeit der Mathematisierungsschritt zunächst durch die Dozierenden vorgegeben. Die eigentliche Arbeit in Sokratischer Weise beginnt somit erst mit der innermathematischen Frage danach, mit welchen regelmäßigen Polygonen eine Ebene parkettiert werden kann (vgl. Abb. 3.2).

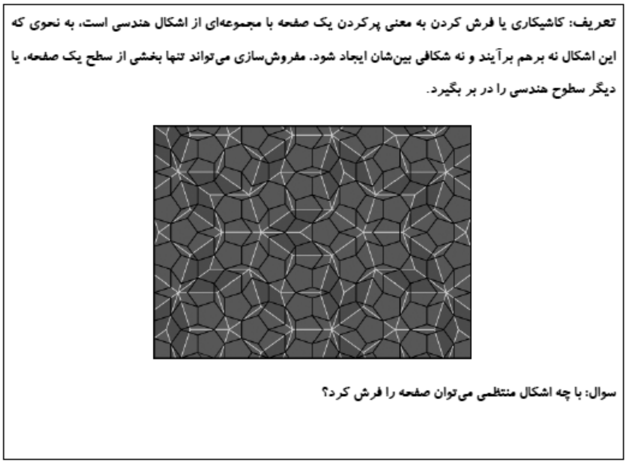


Abbildung 3.2: Arbeitsauftrag

Diesem Problem wird in Gruppen von drei bis vier Teilnehmern begleitet durch eine Dozentin oder einen Dozenten nachgegangen, wobei die Rolle des Dozenten insbesondere darin besteht, zusammenzufassen und zu mathematischen Begründungen aufzufordern, wie der folgende Auszug aus einem Gruppengespräch zeigt. Dem Auszug voraus geht die Überlegung der Gruppe, dass eine Parkettierung mit gleichseitigen Dreiecken und Quadraten möglich ist.

> Schüler 1 zeichnet einige zusammengebundene Dreiecke (vgl. Abb. 3.3).
>
> **Schüler 1:** Er ist da! ...
>
> **Schüler2:** Diese müssen gleichseitige Dreiecke sein. Sie sind regelmäßig [er weist auf die Zeichnung]. Wenn wir auf diese Weise weitermachen, können wir die Ebene parkettieren.
>
> **Dozent:** Mit welchen anderen [regelmäßigen] Polygonen kann man das machen?
>
> **Schüler2:** So Herr, wenn es mit diesen möglich ist [zeigt auf regelmäßige Dreiecke], ist es mit Sechsecken auch möglich. Weil diese selbst die Sechsecke bilden.
>
> **Dozentin:** Gut, diese zwei akzeptieren wir. Welche noch?
>
> **Schüler1:** Herr, Dreieck, Quadrat, Sechseck.
>
> **Ein Schüler von einer Nebengruppe:** Ihr müsst das beweisen!

Schüler1: Das haben wir schon.

Nun steht die Frage im Raum, ob das Pentagon dies auch leistet:

Dozentin: So dann... eine Anzahl von diesem Winkel muß 360° werden. Wie viele [regelmäßige] Fünfecke kann man hier zusammenbinden?

Schüler1: Gut... wir müssen zuerst sehen wie groß jeder Winkel ist. [Zu seinen Gruppenkameraden] Wie war die Formel?... $\frac{n-2}{n} \times 180°$?...120°?

Dozentin: Schreib es auf!

Schüler2: Es wird $\frac{5-2}{5} \times 180° = \dfrac{3}{5} \times 180° = 108°$.

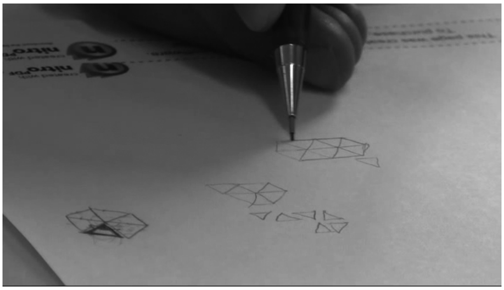


Abbildung 3.3: Annäherung mit Hilfe einer Skizze.

Nachdem die Gruppen herausgefunden haben, dass eine lückenlose Parkettierung nur mit regelmäßigen Drei-, Vier- und Sechsecken möglich ist, war noch die Frage zu beantworten, warum die Bienen nun die Sechseckform wählen. Dazu wurde wiederum von den jeweiligen Dozenten ein Gespräch über die physikalischen Eigenschaften der verschiedenen Prismen sowie das Isoperimetrische Problem angeregt. Dies geschah durch ein neues aber einfacheres initiales Problem: Warum haben Rohre für Wasser-, Öl- und Gastransport einen kreisförmigen Querschnitt?

Außerdem regten die Dozierenden jeweils dazu an, dabei speziell den Fragen nach Materialverbrauch und Stabilität nachzugehen. Um sich der Frage nach dem optimalen Querschnitt experimentell zu nähern, bekommen die Gruppen eine 36cm lange Schnur, ein Lineal und ein kariertes Blatt (zur näherungsweisen Bestimmung der Fläche).
Im auf die Gruppenarbeit folgenden Klassengespräch wurden die Lösungen der verschiedenen Problemstellungen wiederum im sokratischen Gespräch mit Blick auf das Ausgangsproblem der Bienenwabe zusammengebracht. Die Aufgabe des Gesprächsleiters bestand darin mit Fragen zunächst die Antworten auf das Parkettierungsproblem und die physikalischen Fragen zusammenzutragen und auszuschärfen

Abbildung 3.4

und im Anschluss die Übertragung auf das Bienenwabenproblem anzuregen. Dabei kam es zur Begründung des Übergangs vom Kreis als optimalem Querschnitt zum Sechseck zu Argumentationen, die im nelsonschen Sinne als „Aufweisung auf die unmittelbare Erkenntnis“ (vgl. 2.2) beschrieben werden können.

Abbildung 3.5

Dozentin: Dieses Mal ist der Sprecher jeder Gruppe derjenige, der rechts von vorigem Gruppensprecher sitzt. Gut, die Antwort zu der Frage: „Warum ist das Sechseck eine geeignete Gestalt für eine Bienenwabe?“.

Sprecher von Gruppe 1: Die Imker haben eine Ebene, die von Bienen benutzt wird. Um diese Ebene maximal benutzt wird, verwenden wir Sechsecke. Somit werden wir auf der Ebene, die von Bienen benutzt wird, die maximale Anwendung.

Dozentin: Gut. Kann die nächste Gruppe die Erklärung von der letzten Gruppe vervollständigen?

Sprecher von Gruppe 2: Erstens hat es mehr Stabilität. Es selber ... deckt mehr Raum. Noch eine Sache, ... weniger Material wird verwendet.

Dozentin: Warum wird weniger Material verbraucht?

Sprecher von Gruppe 2: Weil wenn es z. B. Quadrate wären ...

Dozentin: Ja ...

Sprecher von Gruppe 2: In einem Quadrat wird mehr Material verbraucht als in einer Gestalt wie dem Sechseck.

Dozentin: Warum? Ist es nicht besser wenn sie Quadrate verwenden?

Sprecher von Gruppe 2: So wird aber mehr Material verbraucht.

Dozentin: Gut! Lasst uns hören was die nächste Gruppe sagt.

Sprecher von Gruppe 3: Wir wollen zwei Gründe nennen. In dem Innenraum kann mehr Honig gespeichert werden im Vergleich mit einem Quadrat oder einem Dreieck. Dies auch ... je mehr die Anzahl der Seiten, desto mehr gilt diese Eigenschaft. Das auch, dass sie gesagt haben, dass weniger Material gebraucht wird. Je mehr Seiten, desto weniger Material wird gebraucht.

Dozentin: Warum kann die Anzahl der Seiten nicht mehr als 6 sein?

Sprecher von Gruppe 3: Weil die Binnenwabe-Ebene damit nicht lückenlos gedeckt werden kann.

Dozentin: Ihre Gruppe!

Sprecher von Gruppe 4: Die Frage war warum wurden hier Sechsecken verwendet.

Dozentin: Richtig.

Sprecher von Gruppe 4: Weil es mehr Stabilität hat,... und das auch, dass in wenigen Raum man mehr davon haben kann, deswegen wird weniger Material gebraucht ... und in der Einheit der Volumen, mehr Honig reinpasst.

Dozentin: Ihre Gruppe!

Sprecher von Gruppe 5: Wie sehen die Gestalten in einer Binnenwabe aus? Sechseckig. Warum sechseckig? Wegen der Parkettierung. Sie können mehr Druck aushalten. Es hat so mehr Volumen.

Dozentin: Sie!

Sprecher von Gruppe 6: Sechseckig, weil man damit Parkettieren kann und den Rest haben die anderen gesagt.

Dozentin: Es war sehr gut Kinder! Lasst uns eine Zusammenfassung von dem was Sie gesagt haben machen.

Ein weiteres Beispiel, an dem die Wirkung Sokratischer Gespräche deutlich werden kann, stammt aus einem Vorbereitungskurs auf die spätere Arbeit in den *Hastēhāye Pajūhēši*. Nach einer eher angeleiteten Sitzung, in der es zunächst darum ging, überhaupt Fragen zu mathematischen Begriffen zu stellen und begründet zu beantworten, wurde in der Folgesitzung die Diskussion zunächst auch mit der Aufforderung zur Formulierung mathematikhaltiger Fragen zu einer vorgegebenen Zeichnung eingeleitet:

„Formuliert ein Problem zu folgender Zeichnung (Abb. 3.6, das relevant für das Alltagsleben in Eurer Umgebung ist bzw. stellt Fragen zu Anwendungen außerhalb der Mathematik.“

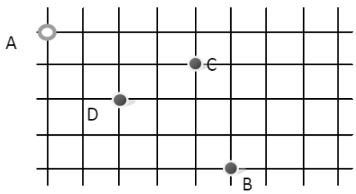


Abbildung 3.6

Nach einer ca. 15minütigen Diskussion in Kleingruppen wurden die dabei entstandenen Fragen an der Tafel gesammelt, um dann im Plenum weiter über die Art der Fragen nachzudenken.

Fragen aus der Schülerinnengruppe:

- Sind die Punkte in Bezug auf deren Stellung voneinander abhängig?
- Was ist der kürzeste Weg, der durch sie geht?
- Ist das ein Diagramm von einer Funktion?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Punkte und den Zellen?
- Kann man die nächste Konstellation der Punkte mit Hilfe einer Formel finden?
- Wie viele Wege von A gibt es, die durch C und D gehen und bei B enden?
- Was ist die Steigung von AD?
- Was kann man über Ähnlichkeit der Dreiecken ACB und ADB, ihre Kongruenz und ihre jeweiligen Winkeln sagen?
- Ist der Graph, der durch Verbinden der Knoten hergestellt wird, lösbar?
- Nach welcher Regel sind die Punkte positioniert?

Fragen aus der Gruppe der Schüler:

- Wie groß ist die Fläche vom größten Parallelogramm, das man mit den vier Punkten zeichnen kann und mit wie vielen Bewegungen kann man diese Gestalt zeichnen?
- Wenn jeder der vollen Punkten alle diese Pfade durchgehen soll um bei dem leeren Punkt anzukommen, welche von denen wird früher ankommen?
- Wie lang ist die Strecke zwischen dem Punkt A und dem Schwerpunkt von dem Dreieck BCD?
- Wenn A und B ein Intervall bilden, sind die Punkte C und D in diesem Intervall?
- Wenn dieser Graph ein Kartesisches Koordinatensystem wäre, wo liegt der Punkt, der von den gezeigten Punkten gleich weit entfernt ist?
- Wenn A der Anfang und B, C und D die Ziele sind, wie viele kürzeste Wege von A nach B, C und D existieren?
- Ein Flugzeug will von A nach B fliegen und unterwegs in C und D tanken. Was ist der kürzeste weg wenn es von A nach B und durch C und D fliegt?

Damit wird die entstandene Fragensammlung (Beispiele siehe Kasten) zum initialen Problem bzw. zum Ausgangspunkt für das folgende initiale Problem *Was ist eine gute mathematische Frage?* im anschließenden sokratischen Gespräch. Dieses wurde dabei durch den Gesprächsleiter durch Hinweise auf in gewissem Sinne problematische, also etwa unklare oder uneindeutige oder nicht lösbare, Beispielfragen angeregt. Dies führte über die Analyse der jeweiligen Schwierigkeiten im gemeinsamen Gespräch zu folgenden von den Teilnehmern formulierten Kriterien guter mathematischer Fragen:

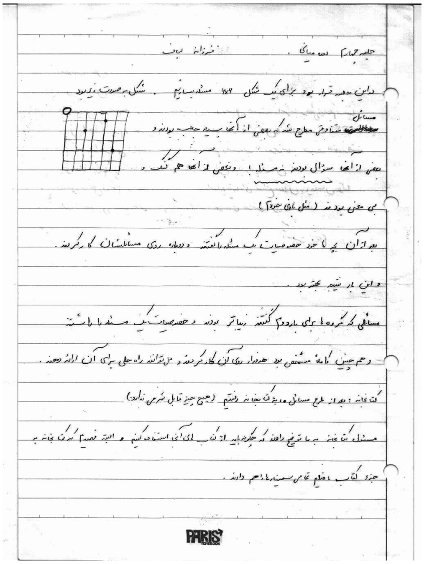
> „Es muss klar sein, was gegeben ist. Es muss klar sein, was gesucht ist. Die Frage darf nicht mehrdeutig sein. Die Frage soll eine nützliche Lösung haben. Die Aussage muss verständlich ausgedrückt sein. Die Frage soll herausfordernd sein. Die Frage soll lösbar sein. Die Frage soll kurz und bündig formuliert sein. Die Frage soll aus der Anwendung stammen. usw.“

Diese Kriterienliste kann also als der im Gespräch angestrebten Konsens angesehen werden. Anders als bei Gesprächen über innermathematische Initialprobleme ist der Konsens jedoch weder vorher dem Gesprächsleiter bekannt noch kann er mittels mathematischer Beweisführung als wahr oder falsch evaluiert werden. Das Beispiel zeigt also, dass auch im Rahmen der Mathematik konsensoffene sokratische Gespräche denkbar sind. Dabei kommt es darauf an, ob es sich um ein innermathematisches oder ein eher metamathematisches Initialproblem handelt.
Auf der Grundlage der im Gespräch erstellten Kriterien wird die Einstiegsaufgabe erneut gestellt.

- Angenommen Punkt A sei eine Wohnung, Punkt B eine Schule, Punkt C eine Bank und Punkt D ein Bürgeramt. Was ist der kürzeste Weg von der Wohnung zur Schule, wenn wir unterwegs zur Bank und zum Bürgeramt gehen wollen? Sollen wir zuerst zur Bank gehen oder zum Bürgeramt?
- Angenommen A ist eine Wasserquelle, C und D Wasserraffinerien und B ein Wasserverteilungszentrum. In wie viele Wegen kann man Auf dem Gitter Rohre verlegen?
- Wenn wir von Punkt C zu anderen Punkten Stromkabel verlegen wollen und einige Wege gesperrt sind und das ganze Kabel 150 m lang und jede Seite 10 m lang ist, ist eine parallele Kabelverlegung besser oder eine serielle? Auf welchen Pfaden soll sie verlaufen?

- Wie kann ein Tourist die Stadt besichtigen, so dass er nur einmal durch die vier Punkte geht?
- Ein Känguru steht auf Punkt B, seine Nahrung liegt auf Punkt A, seine Kinder sind auf Punkt C und sein Nest ist auf Punkt D. Wenn es mit jedem Sprung ein Seitenlang vorgeht und mit keiner Priorität seine Kinder und sein Essen unterwegs abholt und zum Nest geht, was ist der kürzeste Weg, den es nehmen kann? Wenn seine Sprünge einmal eine-Seite-lang und einmal zwei-Seiten-lang ist, was ist der kürzeste Weg? Wenn es alleine mit jedem Sprung drei Schritte vorgehen kann und mit seinem Essen zwei Schritte und mit Kinder ein Schritt, was ist der kürzeste Weg für es?
- Wenn A unsere Wohnung, B Schule, C Bushaltestelle und D Taxihaltestelle ist und Taxi 3/2 mal schneller als Bus und Bus 2 mal schneller als Fußgänger fahren kann, welcher Weg dauert am kürzesten?
- A, B, C und D sind Gouverneur, Bürger, Stellvertreter von Gouverneur bzw. Bürgermeister. Stellvertreter von Gouverneur und Bürgermeister erhalten Weisungen von Gouverneur. Aber die Bürger können nicht direkt von ihm Weisungen erhalten. In welcher Weise können Weisungen im kürzesten Weg von Gouverneur bei Bürger ankommen?
- Wenn ein Ameise um 9 Uhr von A nach B geht und jede Einheit eine Stunde dauert und an jeder Kreuzung sie abbiegen müsste und zwischen 2 und 6 Uhr durch das Rechteck zwischen C und D gehen darf, wann kann sie am frühestens ankommen?
- Angenommen A ist ein Junge, der heiraten will, und B, C und D drei mögliche Kandidatinnen und die Lage ist in Kuwait [Metapher für Wohlstand, Freiheit oder Utopia in Farsi]. In einer Zeiteinheit kann der Junge zwei Längeneinheit und die Mädchen können eine Längeneinheit gehen. Wenn B die Bewegungen von A nachmacht, C um B auf Umfang eines Quadrats mit Seitenlänge von zwei Einheiten im Uhrzeigersinn rotiert und D um C rotiert, nach wie viele Bewegungen das Erwünschte wird erzielt?
- Ein Bus will einige Soldaten von dem Quartier A zum Quartier B bringen. Unterwegs muss der Bus in den Quartieren C und D einige andere Soldaten einsammeln. Wenn der Feind durch Verminung der Straßen den Weg für den Bus länger machen wollte, was ist die Mindestzahl der Minen?
- Wie lang ist die kürzeste Schleife von A zu sich selbst, wenn: a) sie durch B geht? b) sie durch C und D geht? c) sie durch C, D und B geht? d) sie durch C, B und nicht durch D geht?

Die so entstandenen Fragen zur Zeichnung unterscheiden sich deutlich vom ersten Versuch, was auch von den Teilnehmern selbst reflektiert und in Protokollen festgehalten wurde (vgl. Beispiel einer Gruppe von Teilnehmerinnen siehe Abb. 3.7).



In dieser Sitzung wollten wir für eine 6×6 Figur [mathematische] Probleme bilden. Verschiedene Probleme wurden erwähnt und einige davon waren sehr interessant und einige davon waren Fragen und keine Probleme! Und einige davon waren unklar und sinnlos (wie z.B. mein Spiel).
Danach haben die Kinder selber die Eigenschaften eines [mathematischen] Problems gesagt und wieder an ihren Probleme gearbeitet.
Und diesmal war das Resultat besser.
Die Probleme, die die Gruppen beim zweiten Versuch vorstellten, waren schöner und hatten die Eigenschaften eines Problems. Es war auch klar, dass sie zielgerichtet darauf gearbeitet haben und dass sie dafür eine Lösung anbieten können.
Bibliothek: Nachdem Problembilden sind wir zur Bibliothek gegangen (es gibt keinen Grund zu schämen.)
Die Bibliothekarin hat uns erklärt, wie wir die dortigen Bücher benutzen können und ich habe erfahren, dass sie außer Bücher auch über Filme von Vorträgen verfügen.

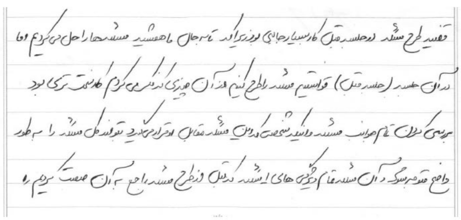
Abbildung 3.7

Auf dieser Grundlage konnten dann in der Folgesitzung die Fragestellungen von den Teilnehmern weiter ausgearbeitet werden. Eine dieser Fragen wurde ausgewählt und im Anschluss an eine Präsentation zum wissenschaftlichen Arbeiten in der Mathematik geleitet durch die polyasche Heuristik gemeinsam beantwortet. Der folgende Auszug aus dem Protokoll einer Teilnehmerin, zeigt die positive Resonanz auf den Umstand, dass so eine von den Teilnehmern selbst gestellte Frage zur Aufgabe im Kurs wurde.

Die im Rahmen dieser Einheit gemachten Erfahrungen waren nicht zuletzt eine gute Vorbereitung auf die eigenständige Arbeit im Rahmen der *Hastēhāye Pajūhēšī.*

3.3.2 Einige Beobachtungen aus Dozenten-Sicht

Die folgenden Beobachtungen resultieren aus den Veranstaltungen, die ich mit meinen Mitlehrenden im Haus der Mathematik in Isfahan durchgeführt habe, und den Erfahrungen, die ich dort durch Interaktionen mit den Lernenden gemacht



Die Problemstellung in der letzten Sitzung war eine sehr interessante Arbeit. Weil wir bisher immer Probleme gelöst haben aber in der Sitzung (letzte Sitzung) konnten wir ein Problem entwerfen. Das war schwieriger, als ich mir es vorgestellt habe. Betrachtung aller Aspekte des Problems und das, dass die Person, die dieses Problem vor sich hat, das ganze Problem klar verstehen kann und das Problem alle Eigenschaften besitzt, die wir vor der Problemstellung besprochen haben,...

Abbildung 3.8

habe. Das Auffälligste war die Reaktion der Lernenden auf das von uns angebotene Programm, das sie in den ersten Sitzungen als ‚Kulturschock' zu erleben schienen. Dieser hat einerseits unsere gemeinsame Arbeit im Hinblick auf unserer Zielsetzung mit den Lernenden erschwert. Andererseits war dies für uns jedoch verständlich, da die herrschende Kultur im schulischen Mathematikunterricht in Isfahan, so wie wir ihn auch erlebt hatten, auf lehrergesteuerter und dogmatischer Vermittlung basiert. In dieser Kultur wird von Lernenden verlangt, dass sie nur als Zuhörer präsent sind und nur dann sprechen, wenn sie dazu aufgefordert werden. Die Gültigkeit und Korrektheit des dargebotenen Lernstoffes ist – für die Lernenden – meistens stark von der einzelnen Lehrperson abhängig, da sie die höchste Autorität ist und meist auch über den Lehrbüchern steht.

Im Haus der Mathematik war dagegen das gesetzte Ziel, für die Lernenden mit dem o.g. Hintergrund einen Raum zu schaffen, in dem sie selbstständig ein mathematisches Thema erarbeiten und erforschen können. In den ersten Jahren nach der Gründung gab es dort lediglich zwei bis dreiwöchige Vorstellungskurse, die die Lernenden für eine eigenständige Untersuchung über bestimmten Themen im Haus vorbereiten sollten, eine Bibliothek, Gruppenarbeitsräume und Lehrkräfte, die nicht im üblichen Sinne lehrten, sondern nur unterstützend Hinweise gegeben und Fragen beantwortet haben. Ich war auch als eine solche Lehrkraft dort für einige Jahre beschäftigt. Beachtenswert war, dass alle Beteiligten viel Zeit und Energie aufwenden mussten, um mit dieser neuen Arbeits- und Forschungskultur vertraut zu werden. Daher wurde im Haus entschieden, eine Veranstaltung anzubieten, in der die Lernenden diese Kultur erleben und üben konnten. Dafür haben die Dozenten selber in diesen Vorbereitungskursen gemeinsam mit den Lernenden eine Forschungsarbeit durchgeführt. Diese Arbeit wurde mit grundlegenden und einfachen Fragestellungen begonnen (z.B. aus welchen Arbeitsschritten besteht eine Forschung? Welche Materialien kann man verwenden? etc.) und danach wurde gemeinsam ein mögliches Thema für die gemeinsame Forschung ausgewählt.

Da das Ziel des Hauses war, den Schülerinnen und Schülern zu helfen, eine eigenständige Forschung durchzuführen, könnte man sagen, dass stets ein verborgenes Prinzip verfolgt wurde: Dass die Lernenden auf dem Weg der Forschung sich möglichst durchgängig auf ihre eigenen Erkenntnisvermögen verlassen. Die Lehrkräfte sollten also nicht nur bei der Beseitigung der Hindernisse, die sich den Lernenden auf diesem Weg entgegenstellten, behilflich sein, sondern sie auch dazu motivieren und auffordern, diesen Weg selber zu beschreiten. Diese Bedingungen und die Tatsache, dass uns PLATONs Werke bekannt waren, hat uns folgerichtig zur Anwendung der sokratischen Methode geführt.

Diese Methode war für uns damals nicht als eine bereits konzipierte Methode mit bestimmten Anweisungen verfügbar, sondern war eher ein Leitmotiv, das unsere pädagogische Arbeit steuerte. Die Artikel SPIEGELS[78], auf die wir später stießen, beinhalten eine bestimmte Idee der sokratischen Methode und lieferten dazu auch Anleitungen, die von HECKMANN übernommen waren.[79] Die meisten dieser Anleitungen stimmten unserer Ansicht nach mit dem, was wir unter der sokratischen Methode verstanden, überein und wir versuchten sie daraufhin anzuwenden. Während der siebenjährigen Durchführung der Veranstaltungen in Form des Sokratischen Gesprächs zeigte sich die Notwendigkeit weiterer Maßnahmen, die unsere Zielerreichung beschleunigten. Darunter war z.B. die Forderung an die Lernenden, Protokolle von jeder Sitzung anzufertigen. Diese sollten den Verlauf der Sitzung inklusive ihrer Fragen und Meinungen wiedergeben. Obwohl Heckmann dies nicht als einen Teil des Sokratischen Gesprächs dargestellt hat, hat er dennoch in seinen sokratischen Seminaren auf diese Maßnahme zurückgegriffen, wie in seinem Buch dokumentiert ist.

Wie schon erwähnt, erlebten die Lernenden in den ersten Sitzungen einen Kulturschock. Dazu gehörte auch das Schreiben solcher Protokolle einschließlich ihrer Meinungen. Um hier zu unterstützen, wurde viel Zeit in den ersten Sitzungen der Vorbereitungskurse damit verbracht, die Arbeitsweise in den Kursen zu erklären und zu üben. All dies wurde möglichst durchgehend argumentativ gerechtfertigt, da einerseits so die Arbeitsweise für die Lernenden nachvollziehbarer wurde, andererseits die Autorität, die aus Sicht der Lernenden die Dozenten innehatten, implizit auf die Argumentation übertragen wurde. Dies führte dazu, dass die Lernenden die Hindernisse, auf die sie im Verlauf ihrer Arbeit stießen, leichter überwinden konnten, wenn sie z.B. ins Gespräch kommen oder ihre Meinung und Kritik zu der Veranstaltung, entweder schriftlich oder mündlich, äußern wollten. Der andere Faktor, der die Akklimatisierung der Lernenden an die neue Kultur beschleunigte, war, dass alle Dozenten als eine Gruppe fungierten. Basierend auf verschiedenen

78. Spiegel 1991, Spiegel 1989b u. Spiegel 1989a
79. S. 3.2.3.

Erfahrungen, die wir im mathematischen Haus und in einigen Schulen machten, stellten wir fest, dass dieses von uns durchgeführte Team-Teaching großen Einfluss auf den Erfolg der Kurse hatte. In einigen Fällen, in denen nur ein Dozent im Kurs tätig war, besonders in den Schulen, konnte der Dozent die Lernenden nicht „mitnehmen", und nach ein paar Sitzungen musste er zur klassischen Unterrichtsmethode zurückkehren. Die Interaktion zwischen den Dozenten im Unterricht, z.B. wie sie miteinander sprechen und argumentieren, wie sie die jeweiligen Äußerungen verfolgen, zusammenfassen und weiterführen, wie sie einander kritisieren und sich dann rechtfertigen bzw. ihre Fehler akzeptieren, all dies fungierte als ein Vorbild für die Lernenden und ermöglichte es ihnen, diese neue Kultur praktisch zu erleben. Dafür war es notwendig, dass die Dozenten jeweils zwischen zwei Sitzungen eine Rückschau auf die vergangene Sitzung sowie die Planung der folgenden vornahmen. Dort wurden die Rückmeldungen, die teils aus den Protokollen, teils aus dem Unterricht stammten, diskutiert, um die Meinung und das Verständnis der Lernenden, die angebotenen Lerninhalte betreffend, zu analysieren und dies in das Programm der folgenden Veranstaltung einzubeziehen. Diese Art gemeinschaftlicher Vorbereitung fanden wir für die Durchführung der Kurse in der o.g. Form notwendig und sie bildete in der Tat die Grundlage dafür, dass die Dozenten ihre Autorität auf die Argumentation übertragen konnten.

Somit versuchten die Dozenten eine der mathematische Forschungspraxis ähnliche Kultur einzuführen. Hierzu gehört das, was in dem Artikel „*Zwingende Beweise – Zur subversiven Despotie der Mathematik*"[80] beschrieben wurde. Hier wird beschrieben, wie die mathematische Begründung – oder Beweis – als ein grundlegender Bestandteil der Mathematik zur Entstehung gegensätzlicher sozialer Aspekte des mathematischen Diskurses führt. Der mathematische Beweis verursacht einerseits, dass das bewiesene Urteil sich gegen jedes andere Urteil durchsetzt und somit einen „undemokratischen" Aspekt aufweist[81],

> „[a]uf der anderen Seite jedoch ist bei einem Beweis-Dialog die *soziale Stellung* der 'Kontrahenten' völlig unerheblich; auch Dionys, den Tyrannen von Syrakus, hätte man 'zwingen' können, den entsprechenden Sachverhalt einzusehen, sofern er sich nur auf einen Dialog einläßt. Insofern kommt im mathematischen Beweis auch eine **subversive** Komponente zum Ausdruck."[82]

Dieser der Mathematik innewohnende Gegensatz erschwert jedoch die Einführung der erwähnten Kultur. Denn für denjenigen, der „den entsprechenden Sachverhalt

80. Nickel 2006
81. Vgl. Nickel 2006, S. 270f.
82. Nickel 2006, S. 271.

einsieht“, ist es sehr natürlich, sogar verführerisch, das, was er einsieht, dogmatisch zu vermitteln. In diesem Fall ist so eine Person keine „Suchende“ mehr, die die Lernenden bei Suche begleitet, sondern eine solche, die ihre Entdeckung großzügig zur Verfügung stellt. Somit präsentiert sie sich ungewollt den Lernenden als die Autorität. Dieses Problem war unsere größte Herausforderung in den Besprechungen und Kursen. Es zeigt sich besonders im Umgang mit ungeduldigen Lernenden, die auf die Antwort einer mathematischen Frage warten. Inwiefern man sich verpflichten soll, den Anti-Dogmatismus durchzusetzen, ohne dass die Lernenden entmutigt werden, war ein durchgängiges Thema bei unserer Arbeit. Hier kann man allerdings mittels der vorausgehenden Darlegungen diese Frage anders formulieren.[83] Können die Lernenden das besprochene Thema einsehen, wenn wir ihnen die Antwort auf die Frage mit einer begleitenden Begründung geben, oder sollen wir die Suche zusammen fortführen?

Ich kenne keinen Kurs von meiner Zeit im mathematischen Haus, in dem alle Schülerinnen oder Schüler in der Lage waren, selbständig eine kleine vollständige Forschung durchführen zu können. Die besten Resultate haben wir immer dann gehabt, wenn alle Kleingruppen am Ende eines Vorbereitungskurses ihre Untersuchungen über für sie erforschbare mathematische Themen präsentiert haben. Die Gruppenglieder waren jedoch in Bezug auf ihre Leistungen inhomogen und haben ganz unterschiedlichen Anteil an der Arbeit gehabt. Das Erkennbare bei fast allen Kursen war aber die Veränderungen in ihren Interaktionen miteinander und mit uns. Sie konnten sich über ein Thema genauer und klarer äußern und leichter ins Gespräch miteinander und mit uns kommen. Das war insbesondere in der letzten Sitzung jedes Kurses, in der der Kurs und die Arbeitsweise in ihm besprochen, reflektiert und kritisiert wurde, klar zu sehen. Dort haben normalerweise die Lernenden das Gespräch selbst fortgeführt.

Diese Veränderungen, die sowohl für uns als auch für die Lernenden einsehbar waren und eine Basis für eine weitere Arbeit in der Mathematik bilden sollten, zeigten sich allerdings in manchen Fällen auch als kontraproduktiv und gefährlich. Ihr ursprünglicher Zweck war dem „Suchenden“ bei seinen Untersuchen behilflich zu sein. Sie haben aber bei manchen dazu geführt, sich nicht mehr als „Suchende“ zu betrachten.

83. Vgl. 3.2.1.

3.4 Abschließende Reflexion

Die oben diskutierten Beispielsituationen aus der Arbeit im Mathematischen Haus zeigen die Umsetzung der Idee des Sokratischen Gesprächs in unterschiedlichen Lehr-Lern-Situationen mit verschiedenen Zielsetzungen: das Einüben mathematischer Problemlösefähigkeiten, die Entwicklung korrekter mathematischer Begründungen sowie die Entwicklung und Einschätzung eigener Fragestellungen. Gemeinsam haben diese inhaltlich zunächst verschiedenen Aspekte, dass sie in Nelsons Sinne das „Selbstvertrauen der Vernunft" voraussetzen *und* bezwecken und demnach das Sokratische Gespräch als Methode allerst sinnvoll erscheinen lassen. Indem sich die Dozierenden vor diesem Hintergrund an den beschriebenen Gesprächsregeln und der offenen Frageform nach Spiegel bzw. Wagenschein orientieren, ermöglichen sie den Schülerinnen oder Schülern sich aktiv am Arbeitsprozess zu beteiligen und, wie die Beispiele oben auch zeigen, rückblickend zu reflektieren.

Die vorgestellten Beispiele zeigen außerdem eine große Vielfalt möglicher initialer Probleme und ihrer Anwendung. Zum einen können mathematikhaltige Objekte aus nichtmathematischen Kontexten, wie z.B. die Escher-Kunstwerke, dazu genutzt werden, innermathematische Begriffe zu thematisieren. Außerdem können auch Umweltphänomene (Sechseckform der Bienenwaben) als Ausgangsproblem dienen, das wiederum auf physikalische Fragestellungen ebenso verweist, wie auf innermathematische Problemstellungen, wie etwa das isoperimetrische Problem oder die Möglichkeit der Parkettierung mit regelmäßigen Vielecken. Darüber hinaus können initiale Probleme aber auch metamathematische Aspekte thematisieren (Formulieren einer eigenen Problemstellung) und so zum Sprechen über bestimmte Aspekte des Mathematiktreibens ebenso anregen wie zu neuen Aufgaben führen.
Die Wahl des jeweiligen initialen Problems hat dabei großen Einfluss darauf, inwiefern das anschließende Sokratische Gespräch konsensoffen geführt werden kann. Liegt der Fokus auf einer korrekten mathematischen Lösung, so ist der angestrebte inhaltliche Konsens dem Gesprächsleiter im Vorhinein bekannt. In diesem Fall steht der eigentlich dogmatische Aufbau der Mathematik einer Sokratischen Diskussion der Teilnehmer zunächst im Weg und es besteht immer die Gefahr, dass aus dem offen angelegten Problem ein Gespräch nach dem „Trichtermuster" wird. Dem Einwand, in einem solchen Fall lieber die Mathematik auch dogmatisch zu unterrichten, kann aber neben den schon von Nelson genannten lernpsychologischen Überlegungen auch entgegengehalten werden, dass eine Fokusverschiebung in Richtung Problemlösestrategien oder gelungenen Begründungen durchaus auch hier zu konsensoffenen Dialogen führen kann. Konsensoffene Gespräche, deren Ziel auch dem Gesprächsleiter nicht bekannt ist und bei denen die Antwort nicht mit mathematischen Mitteln mit wahr oder falsch evaluiert werden kann, sind darüber

hinaus auch immer dann möglich, wenn der Fokus auf metamathematischen Fragestellungen liegt, wenn es sich also im weitesten Sinne um mathematikphilosophische Diskurse handelt.

Es kommt also auf die Art der Problemstellung wie auch auf die Haltung des Gesprächsleiters an, ob die Besonderheiten der Mathematik der erfolgreichen Anwendung Sokratischer Gespräche im Mathematikunterricht im Wege stehen oder nicht. Der Abgleich mit den oben dargestellten mathematikdidaktischen Überlegungen zeigt, dass die vorgestellten Beispielen aus der Arbeit im mathematischen Haus durchaus als Beispiele gelungener Sokratischer Gespräche angesehen werden können, die dies beherzigen und in besonderer Weise helfen die Ziele der außerschulischen Mathematikbildung in dieser Einrichtung zu erreichen.

Literaturverzeichnis

Apelt, E. F. 1854. *Die Theorie der Induction.* Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann.

Berger, Armin, Gisela Raupach-Strey und Jörg Schroth. 2011. *Leonard Nelson - ein früher Denker der Analytischen Philosophie? Ein Symposium zum 80. Todestag des Göttinger Philosophen.* Berlin.

Birnbacher, Dieter, und Dieter Krohn. 2002. *Das sokratische Gespräch.* Stuttgart: Reclam.

Bois-Reymond, Paul du. 1882. *Die allgemeine Funktionentheorie, erster Teil.* Tübingen.

Brandt, Andreas. 2002. *Ethischer Kritizismus. Untersuchungen zu Leonard Nelsons »Kritik der praktischen Vernunft« und ihren philosophischen Kontexten.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Brüschweiler, Andreas. 2013. *Sorates über Wissen und Erkenntnis.* Würzburg.

Buldt, Bernd. 2001. Vollständigkeit/Unvollständigkeit. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 11, Sp. 1136–. Basel: Schwabe Verlag.

Cantor, Moritz. 1885. In *Allgemeine Deutsche Biographie.* http://www.deutsche-biographie.de/pnd117571016.html.

Dohrn, Daniel. 2015. Erörterung. In *Kant-Lexikon,* herausgegeben von Marcus Willaschek, 1:563–565. Berlin, Boston: De Gruyter.

Elsenhans, Theodor. 1906. *Fries und Kant. Ein Beitrag zur Geschichte und zur systematischen Grundlegung der Erkenntnistheorie.* Giessen: Severus Verlag.

Ferreirós, José. 2009. Hilbert, logicism, and mathematical existence. *Synthese* 170, Nr. 1 (September): 33–70. ISSN: 1573-0964. https://doi.org/10.1007/s11229-008-9347-1. https://doi.org/10.1007/s11229-008-9347-1.

Flashar, Helmut. 1998. *Die Philosophie der Antike.* Basel.

Fowler, David. 1999. *The Mathematics of Plato's Academy - A New Construction.* 2. Aufl. New York: Oxford University Press Inc.

Frege, Gottlob. 1976. *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Herausgegeben von Hans Hermes. Hamburg: Felix Meiner Verlag GmbH.

Freudenthal, Hans. 1963. Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht* 9 (4): 44–45.

Fries, Jakob Friedrich. 1828. *Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft.* Bd. 1. Heidelberg: Christian Friedrich Winter.

———. 1837. *System der Logik: ein Handbuch für Lehrer und zum Selbstgebrauch.* Heidelberg: F. Meiner.

Habermas, Jürgen. 1971. Vorbereitende Bemerkungen zu einer Theorie der kommunikativen Kompetenz. In *Therie der Gesellschaft oder Sozialtechnologie - Was leistet die Systemforschung?,* herausgegeben von Jürgen Habermas, 101–141. Frankfurt a. M.

Hager, Fritz-Peter. 1980. Methode. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 5, Sp. 1305–1307. Basel: Schwabe Verlag.

Heckmann, Gustav. 1993. *Das sokratische Gespräch. Erfahrungen in philosophischen Hochschulseminaren.* Frankfurt ma Main.

Heckmann, Gustav, und Dieter Krohn. 1988. Über Sokratisches Gespräch und Sokratische Arbeitswochen. *Zeitschrift für Didaktik der Philosophie* 10:38–43.

Herrmann, Kay. 2004. Nachbetrachtungen zu Nelsons Naturphilosophie. In *Leonard Nelson Kritische Naturphilosophie, Mitschriften aus dem Nachlass,* herausgegeben von Jörg Schroth, 179–210. Heidelberg: Winter.

Hessenberg, Gerhard. 1904. Über die kritische Mathematik. *Sitzungsber. Berliner Math. Ges. 3, 20. Sitzung v. 25. November 1903,* 21–28.

Hestermeyer, Wilhelm. 1969. *Paedagogia Mathematica. Idee einer universellen Mathematik als grundlage der Menschenbildung in der Didaktik Erhard Weigels, zugleich ein Beitragzur Geschichte des pädagogischen Realismus im 17. Jahrhundert.* Paderborn.

Hiebert, J. 1998. Teaching is a cultural activity. *American Educator* 22 (4):4–11.

Hilbert, David. 1903. *Grundlagen der Geometrie.* 2. Aufl. Durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Aufl. Leipzig.

———. 1918. Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen* 78 (1): 405–415.

Hübner, Johannes. 2001. Ursache/Wirkung. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 11, Sp. 377–410. Basel: Schwabe Verlag.

James W. Stigler, James Hiebert. 2017. The Culture of Teaching. Kap. chapter 3 in *International Handbook of Teacher Quality and Policy.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315710068.ch3. https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781315710068.ch3.

Janke, Wolfgang. 1971. Apperzeption, transzendentale. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 1, Sp. 451–455. Basel: Schwabe Verlag.

Kant, Immanuel. 1989. *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* Herausgegeben von 1989. Stuttgart: Reclam.

———. 1998. *Kritik der reinen Vernunft.* Herausgegeben von Jens Timmermann. Hamburg: Felix Meiner.

Kenderov, Petar, Ali Rejali, Maria G Bartolini Bussi, Valeria Pandelieva, Karin Richter, Michela Maschietto, Djordje Kadijevich und Peter Taylor. 2009. Challenges beyond the classroom—Sources and organizational issues. In *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom,* 53–96. Springer.

Kessels, Jos. 1997. Das Sanduhr-Modell–Methodik des Dialogs–. *Dieter Krohn, Barbara Neißer, Nora Walter (Hg.): Neuere Aspekte des Sokratischen Gesprächs. Bd. IV der Schriftenreihe ?Sokratisches Philosophieren ?der Philosophisch-Politischen Akademie. Frankfurt a. M.: dipa,* 71–80.

Kleinknecht, Reinhard. 2011. Zur Begründungskonzeption Leonard Nelsons. In *Leonard Nelson - ein früher Denker der Analytischen Philosophie? Ein Symposium zum 80. Todestag des Göttinger Philosophen,* herausgegeben von Jörg Schroth, 71–98. Münster: LIT Verlag.

König, Edmund. 1894. Über die letzten Fragen der Erkenntnistheorie und den Gegensatz des transcendentalen Idealismus und Realismus. *Z. Philos.* 103.

———. 1899. Die Unterscheidung von reiner und angewandter Mathematik bei Kant. *Kant-Studien* 1–3:373–402.

König, Edmund. 1907. *Kant und die Naturwissenschaft. In der Reihe: Die Wissenschaft – Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien.* Bd. 22. Braunschweig: Verlagsbuchhandlung Friedrich Vieweg und Sohn.

———. 1929. *Ist Kant durch Einstein widerlegt? Ein Beitrag zur Prinzipienlehre der Naturwissenschaft.* Sondershausen: Eupel-Verlag.

König, Gert. 1998. Transzendental; das Transzendentale; Transzendentalien; Transzendentalphilosophie. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 10, Sp. 1358–1433. Basel: Schwabe Verlag.

Krohn, Dieter. 1989. *Das sokratische Gespräch. Ein Symposion.* Hamburg.

———, Hrsg. 1994–2002. *»Sokratisches Philosophieren« Schriften der Philosophisch-Politischen Akademie.* Bd. I-VII. Frankfurt am Main: dipa-Verlag.

Kuhlmann, Wolfgang. 1987. Tod des Subjekts? In *Tod des Subjekts?,* herausgegeben von Herta Nagel-Docekal, 120–163. Wien/München.

Lampert, Timm. 2017. Wittgenstein and Gödel: An Attempt to Make 'Wittgenstein's Objection' Reasonable. *Philosophia Mathematica* 26, Nr. 3 (August): 324–345. ISSN: 0031-8019. https://doi.org/10.1093/philmat/nkx017. eprint: http://oup.prod.sis.lan/philmat/article-pdf/26/3/324/26097091/nkx017.pdf. https://dx.doi.org/10.1093/philmat/nkx017.

———. 2018. The New Logic Project. Besucht am 9. Februar 2018. http://www2.cms.hu-berlin.de/newlogic/webMathematica/Logic/home.jsp.

Loska, Rainer. 1995. *Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Gesprächsführung.* Bad Heilbrunn.

Michelsen, Johann Andreas Christian. 1781. *Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie.* Berlin: Siegmund Friedrich Hesse.

———. 1782. *Fortsetzung des Versuchs in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie.* Berlin: Siegmund Friedrich Hesse.

———. 1783. *Vollständigere Fortsetzung des Versuchs in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie.* Bd. 1. Berlin: Siegmund Friedrich Hesse.

———. 1784a. *Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik.* Bd. 1. Berlin: Siegmund Friedrich Hesse.

———. 1784b. *Vollständigere Fortsetzung des Versuchs in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie.* Bd. 2. Berlin: Siegmund Friedrich Hesse.

———. 1785. *Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik.* Bd. 2. Berlin: Siegmund Friedrich Hesse.

———. 1786. *Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik.* Bd. 3. Berlin: Siegmund Friedrich Hesse.

———. 1790. *Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik insbesondere für Schullehrer und Praktiker.* Bd. 1,2,3,4. Berlin: Siegmund Friedrich Hesse.

Müller, Armin. 1972. Dialektik. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 2, Sp. 167–175. Basel: Schwabe Verlag.

Müller, Karsten. 2018. Grundlegung einer Algorithmischen Mathematik. Eine Diskussionsgrundlage. *Vortragsmanuskript.*

Neißer, Barbara. 1994. Leonard Nelsons Theorie der Vernunft und Kritik der Vernunft. In *Leonard Nelson in der Diskussion,* herausgegeben von Reinhard Kleinknecht, 38–54.

Nelson, Leonard. 1904. Vorwort der alten Folge zugleich als Vorwort der neuen Folge. In *Abhandlungen der Fries'schen Schule,* 1:V–XII.

———. 1905. Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit (1905/06). In *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik,* 7–56. Mannheim: Felix Meiner Verlag.

———. 1906. Kant und die Nicht-Euklididsche Geometrie. In *Das Weltall,* 6. Aufl., 147–155, 174–182, 186–193.

———. 1908. Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti (1908). In *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik,* 57–90. Mannheim: Felix Meiner Verlag.

———. 1916. Brief an David Hilbert. *dat. Westend, Berlin, 29. 12. 1916, Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Cod. Ms. D. Hilbert 482, 20a.*

———. 1917. *Kritik der praktischen Vernunft.* Bd. 4. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Nelson, Leonard. 1927. Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik (1927). In *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik,* 91–125. Mannheim: Felix Meiner Verlag.

———. 1959. *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik.* Frankfurt a.M.

———. 1970a. Des fondements de la géométrie - Übersetzung des Vortrages (1914). In *Die Kritische Methode,* 3:157–186. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

———. 1970b. Die kritische Methode und das Verhältnis der Psychologie zur Philosophie. Ein Kapitel aus der Methodenlehre (1904). In *Die Schule der Kritischen Philosophie und ihre Methode,* 1:9–78. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

———. 1970c. Jakob Friedrich Fries und seine jüngsten Kritiker (1905). In *Die Schule der Kritischen Philosophie und ihre Methode,* 1:79–150. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

———. 1973. *Geschichte und Kritik der Erkenntnistheorie.* Bd. 2. Gesammelte Schriften. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

———. 1975. Vom Beruf der Philosophie für die Erneuerung des öffentlichen Lebens. In *Vom Selbstvertrauen der Vernunft,* herausgegeben von Grtete Henry-Hermann. Hamburg.

———. 2002. Die Sokratische Methode (Vortrag 1922). In *Das sokratische Gespräch,* herausgegeben von Dieter Krohn Dieter Birnbacher, 21–72. Stuttgart: Philipp Reclam jun.

———. 2004a. Kolloquium über Naturphilosophie (1923). In *Leonard Nelson Kritische Naturphilosophie, Mitschriften aus dem Nachlass,* herausgegeben von Jörg Schroth, 153–178. Heidelberg: Winter.

———. 2004b. Kolloquium über Naturphilosophie, ausgearbeitet von Hamburger, Winter 1908/09. In *Leonard Nelson Kritische Naturphilosophie, Mitschriften aus dem Nachlass,* herausgegeben von Jörg Schroth, 15–34. Heidelberg: Winter.

———. 2004c. Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, ausgearbeitet von Paul Bernays Wintersemester 1910/11. In *Leonard Nelson Kritische Naturphilosophie, Mitschriften aus dem Nachlass,* herausgegeben von Jörg Schroth, 35–82. Heidelberg: Winter.

———. 2004d. Vorlesungen über moderne Naturphilosophie, ausgearbeitet von Rademacher, Winter 1912/13. In *Leonard Nelson Kritische Naturphilosophie, Mitschriften aus dem Nachlass,* herausgegeben von Jörg Schroth, 83–152. Heidelberg: Winter.

———. 1970-1973. *Gesammelte Schriften in Neun Bänden. Hrsg. Von Paul Bernays [UA].* Herausgegeben von Gerhard Weißer. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Nickel, Gregor. 2006. Zwingende Beweise – Zur subversiven Despotie der Mathematik. In *Ethik und Ästhetik der Gewalt,* herausgegeben von U. Müller-Koch J. Dietrich, 261–282. Paderborn: Mentis Verlag.

Nieke, Wolfgang. 1972. Dogmatismus. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 2, Sp. 277–279. Basel: Schwabe Verlag.

Peckhaus, Volker. 1990. *Hilbertprogramm und kritische Philosophie: das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

———. 2002. Regressive Analys. In *Philosophiegeschichte und logische Analyse. Logical Analysis and His-tory of Philosophy,* herausgegeben von Albert Neven Uwe Meixner, 5:97–110. Paderborn: Mentis.

———. 2011. Logik und Mathematik in der Philosophie Leonard Nelsons. In *Leonard Nelson-ein früher Denker der analytischen Philosophie?: ein Symposion zum 80. Todestag des Göttinger Philosophen,* herausgegeben von Jörg Schroth, 2:193–212. LIT Verlag Münster.

Platon. 2011a. Menon. In *Werke : in acht Bänden ; Griechisch und Deutsch,* herausgegeben von Gunther Eigler, übersetzt von Friedrich Schleiermacher, Bd. 2. Darmstadt.

———. 2011b. Politeia VI. In *Werke : in acht Bänden ; Griechisch und Deutsch,* herausgegeben von Gunther Eigler, übersetzt von Friedrich Schleiermacher, Bd. 4. Darmstadt.

———. 2011c. Politeia VII. In *Werke : in acht Bänden ; Griechisch und Deutsch,* herausgegeben von Gunther Eigler, übersetzt von Friedrich Schleiermacher, Bd. 4. Darmstadt.

———. 2011d. Theaitetos. In *Werke : in acht Bänden ; Griechisch und Deutsch,* herausgegeben von Gunther Eigler, übersetzt von Friedrich Schleiermacher, Bd. 6. Darmstadt.

Platon. 2011e. Timaios. In *Werke : in acht Bänden ; Griechisch und Deutsch,* herausgegeben von Gunther Eigler, übersetzt von Friedrich Schleiermacher, Bd. 7. Darmstadt.

———. 2011f. *Werke : in acht Bänden ; Griechisch und Deutsch.* Herausgegeben von Gunther Eigler. Übersetzt von Friedrich Schleiermacher. Darmstadt.

Polya, George. 1949. *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematiscer Probleme.* Übersetzt von Elisabeth Behnke. Bern: Francke Verlag.

Proclus. 1820. *The Commentariesof Proclus on the Timaeus of Plato, in five books; Containing a Treasury of Pythagoric and Platonic Physiology.* Übersetzt von Thomas Taylor. Bd. 1. London.

Raupach-Strey, Gisela. 2002. Das Sokratische Paradigma und seine Bezüge zur Diskurstheorie. In *Das sokratische Gespräch.* Herausgegeben von Dieter Krohn, 106–139. Stuttgart: Reclam.

———. 2012. *Sokratische Didaktik: Die didaktische Bedeutung der Sokratischen Methode in der Tradition von Leonard Nelson und Gustav Heckmann.* Bd. 10. Berlin: LIT Verlag Münster.

Reddy, M. J. 1979. The conduit metaphor: A case of frame conflict in our language about language. In *Metaphor and thought,* herausgegeben von A. Ortony. Cambridge: CambridgeUniversity Press.

Rejali, Ali. 2018. Teaching Mathematics through Non Formal Education Methods – Experiences of Isfahan Mathematics House. The International Forum on Science Education, Islamabad. http://www.mathhouse.org/VisitorPages/show.aspx?IsDetailList=true&ItemID=6855,1&Page=2.

Risse, Wilhelm. 1972. Dialektik. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 2, Sp. 164–167. Basel: Schwabe Verlag.

Ritter, Joachim. 1980. Methode. In *Historisches Wörterbuch der Philosophie,* herausgegeben von Joachim Ritter, Bd. 5, Sp. 1304–1305. Basel: Schwabe Verlag.

Rodych, Victor. 1999. Wittgenstein's Inversion of Gödel's Theorem. *Erkenntnis (1975-)* 51 (2/3): 173–206.

Schroth, Jörg, Hrsg. 2004. *Leonard Nelson Kritische Naturphilosophie, Mitschriften aus dem Nachlass.* Heidelberg: Winter.

Schwitzer, Boris. 2016. Leonard Nelson und Platon – alter Wein in neuen Schläuchen? *Vortrag gehalten am 6.2. 2016 vor Mitgliedern der „Gesellschaft für Sokratisches Philosophieren (GSP)“ und Teilnehmerinnen und Teilnehmern der GSP-Tagung.*

Sfard, Anna. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics* 22, Nr. 1 (Februar): 1–36.

———. 1998. On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational researcher* 27 (2): 4–13.

———. 2002. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics* (Netherlands) 46 (1-3): 13–57.

———. 2008. Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizinng. (NewYork).

Spalt, Detlef D. 2019. *Eine Kurze Geschichte der Analysis: Für Mathematiker Und Philosophen.* Heidelberg: Springer.

Spiegel, Hartmut. 1989a. Sokratische Gespräche in der Mathematiklehrerausbildung. Herausgegeben von Dieter Birnbacher. (Hamburg), 167–171.

———. 1989b. Sokratische Gespräche über mathematische Themen mit Erwachsenen: Absichten und Erfahrungen. *mathematik lehren Heft 33* (März): 54–59.

———. 1991. Die sokratische Methode beim Mathematiklernen (Vortragsmanuskript für einen Vortrag in Karlsruhe am 5.6. 1991) (Juni).

Struve, Rolf, und Jörg Voigt. 1988. Die Unterrichtsszene im Menon-Dialog. *für Mathematik-Didaktik* (4): 259–285.

Wagenschein, Martin. 1974. Entdeckung der Axiomatik. *Der Mathematikunterricht* 1:52–70.

———. 1999. *Verstehen Lehren. Mit einer Einführung von Hartmut von Hentig.* Weinheim und Basel.

Weierstrass, Karl. 2013. Über die sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte. In *Mathematische Werke: Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission,* herausgegeben von Johannes Knoblauch, 3:315–329. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139567886.

Wildberger, Norman. 2006. Set theory: Should you believe. *URL: http://web. maths. unsw. edu. au/norman/views2. htm.*

Willaschek, Marcus, Hrsg. 2015. *Kant-Lexikon.* Bd. 1-3. Berlin, Boston: De Gruyter.

Wittgenstein, Ludwig. 1984. *Werkausgabe, Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Herausgegeben von G. E. M. Anscombe. Bd. 6. Suhrkamp.