Einige Bemerkungen über ein Zwei-Sektoren-Wachstumsmodell mit fixen Produktionskoeffizienten*)

Von Volker Böhm, Berlin

Gegenstand dieser Arbeit ist es, einige wesentliche Eigenschaften eines Zwei-Sektoren-Modells aufzuzeigen, das durch konstante Faktorkoeffizienten im Produktionsbereich gekennzeichnet ist. Aus der linearen Struktur des Modells ergeben sich wesentliche Beschränkungen für die im System auftretenden Variablen, wenn zu jeder Zeit ein Gleichgewicht gewährleistet sein soll. Auf die explizite Beschreibung der Eigenschaften der Gleichgewichtslösungen derartiger Wachstumsmodelle soll in dieser Darstellung weitgehend verzichtet werden. Der Autor hat es sich vielmehr zur Aufgabe gemacht, die Bereiche abzugrenzen, in denen Gleichgewichte überhaupt möglich sind und wie sich diese Bereiche bei Variation einiger Parameter verändern. Gesucht sind also die Bedingungen, unter denen kurz- und langfristiges Gleichgewicht existieren kann; der gleichgewichtige Wachstumspfad wird weder beschrieben noch wird geprüft, ob und wie er aus Ungleichgewichtssituationen heraus, die in diesem Modell durchaus darstellbar sind, erreicht wird.

Im ersten Teil werden die Bedingungen ermittelt, unter denen zu jedem möglichen Zeitpunkt ein statisches Gleichgewicht bei Vollbeschäftigung existiert. Insbesondere wird zu zeigen sein, daß ein Gleichgewicht bei Vollbeschäftigung in einem derartigen System allein durch die technische Struktur bestimmt ist. Im zweiten Teil werden die Bedingungen für die Stabilität des Systems und für die Existenz einer langfristig gleichgewichtigen Kapitalintensität abgeleitet. Es läßt sich dabei zeigen, daß die Stabilität allein die Existenz einer langfristig konstanten gesamtwirtschaftlichen Kapitalintensität bei Vollbeschäftigung nicht sichert.

Im dritten und vierten Teil wird dem Produktionsteil eine Nachfrageseite angefügt, und es werden die zusätzlichen Bedingungen aufgezeigt, die erfüllt sein müssen, um ein Gleichgewicht auf der Nachfrageseite zu sichern.

I. In der betrachteten Wirtschaft werden ein Kapitalgut X_1 und ein Konsumgut X_2 mit Hilfe der beiden Faktoren Kapital S_1 und Arbeit S_2 getrennt in zwei Sektoren hergestellt. Die Produktion weist in beiden Sektoren konstante Input-Koeffizienten auf. Die beiden Produktionsfunktionen lauten

---

*) Zu der vorliegenden Arbeit wurde der Verfasser durch einen Vortrag von Herrn Professor H.-J. Vosgerau, Tübingen, anläßlich eines wachstumstheoretischen Seminars von Herrn Prof. Föhl, Berlin, im Sommer 1967 angeregt.

$$(1.1) \qquad X_1 = \text{Min} \begin{cases} \frac{1}{a_{11}} S_{11} \\ \frac{1}{a_{21}} S_{21} \end{cases}$$

$$(1.2) \qquad X_2 = \text{Min} \begin{cases} \frac{1}{a_{12}} S_{12} \\ \frac{1}{a_{22}} S_{22} \end{cases}$$

mit $a_{ij} > 0$ und konstant $(i, j = 1, 2)$.

Bei Vollbeschäftigung beider Faktoren gilt

$$(1.3) \qquad S_{11} + S_{12} = S_1$$

$$(1.4) \qquad S_{21} + S_{22} = S_2$$

Nimmt man für einen beliebigen Zeitpunkt t die beiden Faktormengen $S_1(t)$ und $S_2(t)$ als gegeben an, so erhält man als Lösung für die beiden Gütermengen $X_1(t)$ und $X_2(t)$ aus (1.1)—(1.4)

$$(1.5) \qquad X_1(t) = \frac{a_{22}S_1(t) - a_{12}S_2(t)}{|A|}$$

$$(1.6) \qquad X_{2(t)} = \frac{a_{11}S_{2(t)} - a_{21}S_{1(t)}}{|A|}$$

mit

$$(1.7) \qquad |A| = \text{Det}\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Sämtliche Variablen des Systems werden als nichtnegativ vorausgesetzt. Die beiden Faktormengen S_1 und S_2 müssen sogar positiv sein, um nicht die triviale Lösung $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ zu erhalten. Aus (1.5) und (1.6) lassen sich damit folgende Beschränkungen für positive Gütermengen einführen:

Definiert man als gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität

$$(1.8) \qquad k = \frac{S_1}{S_2},$$

so erhält man als Grenzen für die im Produktionsprozeß eingesetzte Kapitalintensität

$$(1.9) \qquad \frac{a_{11}}{a_{21}} \leq k \leq \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad \text{falls } |A| < 0$$

bzw.

$$(1.10) \qquad \frac{a_{12}}{a_{22}} \leq k \leq \frac{a_{11}}{a_{21}} \quad \text{falls } |A| > 0$$

Da a_{12}/a_{22} und a_{11}/a_{21} die sektoralen Faktorintensitäten darstellen, wird ersichtlich, daß die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität bei Vollbeschäftigung nur zwischen den sektoralen liegen kann. Ist die Ausstattung der Wirtschaft derart, daß die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität mit einer der sektoralen Kapitalintensitäten übereinstimmt, so wird lediglich das Gut des entsprechenden Sektors produziert. Die Produktion des anderen Gutes ist Null. Über- oder unterschreitet die gesamtwirtschaftliche Faktorausstattung die durch (1.9) oder (1.10) gegebenen Grenzen, so ist eine Beschäftigung der Faktoren nur an den sektoralen Grenzen möglich. Der jeweilige Überschußfaktor bleibt ungenutzt[1]). Bezeichnet man die sektoralen Kapitalintensitäten mit

(1.11) $$k_j = \frac{a_{1j}}{a_{2j}} \quad (j = 1, 2),$$

so existiert genau eine Gleichgewichtslösung des Systems bei Vollbeschäftigung, wenn, wie aus (1.7) leicht ersichtlich wird, $k_1 \neq k_2$ ist und wenn die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität zwischen den sektoralen Kapitalintensitäten liegt oder einer gleich ist.

Sei

(1.12) $$X = \frac{X_1}{X_2}$$

dann folgt aus (1.5)—(1.7)

(1.13) $$X = \frac{a_{22}k - a_{12}}{a_{11} - a_{21}k}$$

Weiter ergibt sich

(1.14) $$\frac{dX}{dk} \gtrless 0 \qquad \text{für } |A| \gtrless 0$$

und

(1.15) $$\frac{d^2X}{dk^2} \gtrless 0 \qquad \text{für } |A| \lessgtr 0$$

für alle k aus dem offenen Intervall $I_1 =]k_1, k_2[$ oder $I_2 =]k_2, k_1[$. Mithin existiert zu jeder gesamtwirtschaftlichen Kapitalintensität des Vollbeschäftigungsbereiches eine Güterintensität X. Die Produktion ist für jede bei Vollbeschäftigung zulässige Kapitalintensität eindeutig bestimmt.

II. Das Wachstum der Produktion wird durch Investition des produzierten Kapitalgutes und durch ein exogen vorgegebenes Wachstum des Faktors Arbeit ermöglicht.

Es gilt

(2.1) $$\frac{dS_1}{dt} = \dot{S}_1 = X_1$$

(2.2) $$\frac{dS_2}{dt}\frac{1}{S_2} = n = \text{const.}$$

Damit läßt sich die Wachstumsrate der gesamtwirtschaftlichen Kapitalintensität darstellen als

(2.3) $$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{a_{22}}{|A|} - n - \frac{a_{12}}{|A|}\frac{1}{k}$$

---

[1]) Diese Fälle werden im weiteren Verlauf nicht betrachtet. Sie sind durch die Annahme positiver Lösungen für beide Gütermengen bei Vollbeschäftigung ausgeschlossen.

Schreibt man

(2.4) $$\varphi(k) = \frac{a_{22}}{|A|} - n - \frac{a_{12}}{|A|} \cdot \frac{1}{k},$$

so kann gezeigt werden, daß

(2.5) $$\varphi'(k) \gtreqless 0 \quad \text{für } |A| \gtreqless 0$$

Da $|A| =$ const., ist $\varphi(k)$ monoton. Aus (2.3) ergibt sich damit die Existenz einer gleichgewichtigen Kapitalintensität k^*

(2.6) $$k^* = \frac{a_{12}}{a_{22} - n\,|A|},$$

vorausgesetzt, daß

(2.7) $$k^* \varepsilon]k_1, k_2[$$

Aus (2.5) folgt weiter, daß diese gleichgewichtige Kapitalintensität k^* global und in jedem Punkt des Intervalls stabil ist für

(2.8) $$|A| < 0,$$

d. h. wenn $k_2 > k_1$ ist. Dies ist die bekannte Intensitätsbedingung, die für die Stabilität des Systems erforderlich ist. Es läßt sich zeigen, daß im Falle der Stabilität eine gleichgewichtige Kapitalintensität k^* dann existiert, d. h. (2.7) erfüllt ist, wenn

(2.9) $$n < \frac{1}{a_{11}}$$

Damit ist das folgende Stabilitätstheorem bewiesen: Unter der Annahme der Intensitätsbedingung strebt entlang jedes beliebigen Zeitpfades intertemporärer Gleichgewichte, d. h. für alle $k\ \varepsilon I_1$, die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität k asymptotisch gegen die gleichgewichtige Kapitalintensität k^*, solange die Wachstumsrate der Arbeit kleiner ist als die Kapitalproduktivität des Kapitalgutsektors.

III. Im folgenden und im IV. Abschnitt sollen die zusätzlichen Bedingungen ermittelt werden, die bei Einführung einer gesamtwirtschaftlichen Sparfunktion und bei Berücksichtigung zweier unterschiedlicher Sparfunktionen für ein Gleichgewicht auf dem Gütermarkt erfüllt sein müssen. Diese Bedingungen beeinflussen die Stabilität des Systems in keiner Weise. Es handelt sich vielmehr um die Frage, ob es für alle $k\ \varepsilon I_1$ jeweils ein zulässiges Güterpreisverhältnis gibt, das Gleichheit von Angebot und Nachfrage ermöglicht.

Die Bewertung der Güter mit deren Preisen p_1 und p_2 erfolgt zu Durchschnittskosten. Im Gleichgewicht erhält man dann für den Lohnsatz w und den Zinssatz r

(3.1) $$w = \frac{a_{11}p_2 - a_{12}p_1}{|A|}$$

(3.2) $$r = \frac{a_{22}p_1 - a_{21}p_2}{|A|}$$

Da $r \geqq 0$ und $w \geqq 0$ sein müssen, ergeben sich auf Grund der Technologie als Ober- und Untergrenze für das Güterpreisverhältnis $p = p_2/p_1$ bei $|A| < 0$

$$\underline{p} = \frac{a_{22}}{a_{21}} \leqq p \leqq \frac{a_{12}}{a_{11}} = \bar{p} \tag{3.3}$$

Das monetäre Volkseinkommen Y ist gegeben durch

$$Y = X_1 p_1 + X_2 p_2 \tag{3.4}$$

Die Nachfrageseite ist durch eine gesamtwirtschaftliche, proportionale Sparfunktion gekennzeichnet:

$$p_1 X_1 = sY \tag{3.5}$$

Die Güterintensität der Nachfrage ergibt sich dann aus (3.4) und (3.5) zu

$$X = \frac{s}{1-s} p \tag{3.6}$$

Gleichgewicht herrscht, wenn auf allen Märkten Angebot und Nachfrage einander gleich sind; das bedeutet hier, daß nicht nur der Konsummarkt geräumt wird, sondern auch die Gesamtersparnis gleich dem Wert der Investitionsgüterproduktion ist:

$$\frac{s}{1-s} p = \frac{a_{22}k - a_{12}}{a_{11} - a_{21}k} \tag{3.7}$$

Da p selbst in den Grenzen von (3.3) liegen muß, wird durch (3.7) ein neues Intervall $I_s = [\underline{k}, \bar{k}]$ für die Kapitalintensität festgelegt. Bei Variation der Sparquote verändern sich die Ober- und Untergrenze der zulässigen Kapitalintensität gleichsinnig. Es gilt jedoch stets

$$\begin{aligned} \underline{k} &> k_1 \\ \bar{k} &< k_2 \end{aligned} \qquad \text{für } 0 < s < 1 \tag{3.8}$$

In den beiden möglichen Extremfällen für s reduziert sich das Intervall I_s auf einen Punkt:

$$\begin{aligned} \underline{k} = \bar{k} &= k_1 \qquad \text{für } s = 1 \\ \underline{k} = \bar{k} &= k_2 \qquad \text{für } s = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Damit läßt sich das Stabilitätstheorem neu formulieren: Ist die Intensitätsbedingung erfüllt, so strebt entlang jedes beliebigen Zeitpfades intertemporärer Gleichgewichte auf dem Güter- und auf dem Faktormarkt, d. h. für alle $k \, \varepsilon I_s$, die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität k asymptotisch gegen die gleichgewichtige Kapitalintensität k^*, solange $k^* \, \varepsilon I_s$ gilt. Eine grafische Darstellung des Problems ist in Figur 1 gegeben.

IV. Im Gegensatz zum vorangegangenen Abschnitt wird jetzt angenommen, daß die Sparquote der Arbeiter s_w eine andere ist als die der Kapitalisten s_r. Dabei gilt

$$\begin{aligned} 0 \leqq s_w &\leqq 1 \\ 0 \leqq s_r &\leqq 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Nachfrage beträgt bei der Berücksichtigung unterschiedlicher Sparfunktionen beider Klassen:

$$p_1X_1 = s_r r S_1 + s_w w S_2 \tag{4.2}$$

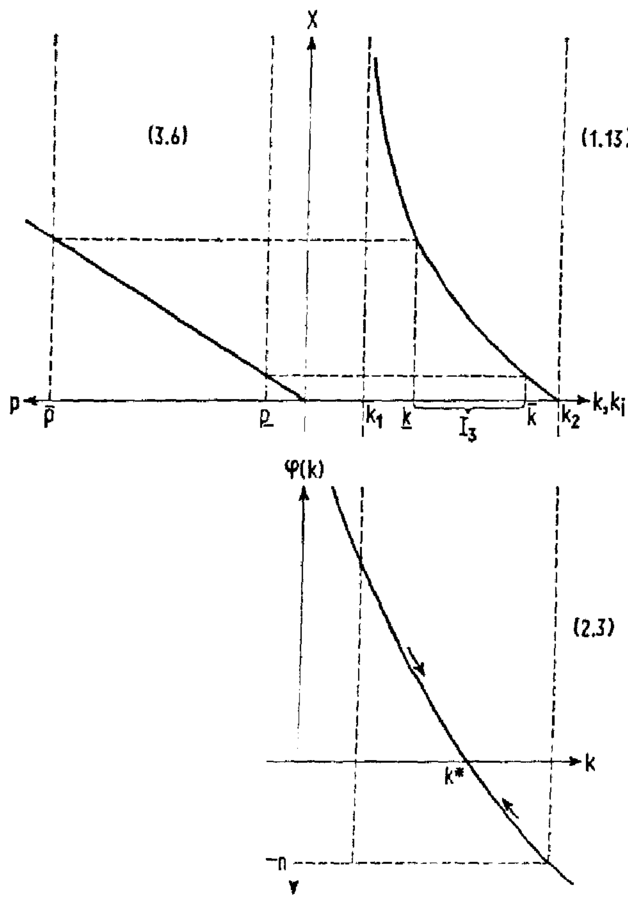

Fig. 1

Unter Verwendung von (3.1) und (3.2) erhält man für die Güterintensität der Nachfrage

$$X = p\,\frac{s_r(a_{22} - a_{21}p)k + s_w(a_{11}p - a_{12})}{(1 - s_r)(a_{22} - a_{21}p)k + (1 - s_w)(a_{11}p - a_{12})} \tag{4.3}$$

Es kann gezeigt werden, daß für (4.3) folgende Beziehungen gelten:

$$\left(\frac{dX}{dk}\right)_{p\,=\,\text{const.}} \gtrless 0 \quad \text{für} \begin{cases} s_r \gtrless s_w \\ \underline{p} < p < \bar{p} \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{dX}{dp}\right)_{k\,=\,\text{const.}} > 0 \quad \text{für} \begin{cases} s_r > s_w \\ \underline{p} < p < \bar{p} \end{cases} \tag{4.5}$$

Totale Differentiation von (4.3) und (1.13) und Lösung für dp/dk ergibt unter Verwendung von (4.4) und (4.5) die Abhängigkeit des Güterpreisverhältnisses p von der gesamtwirtschaftlichen Kapitalintensität k für den Fall des Gesamtgleichgewichts.

$$\frac{dp}{dk} < 0 \quad \text{für} \begin{cases} k_1 < k_2 \\ s_r > s_w \\ \underline{p} < p < \bar{p} \end{cases} \tag{4.6}$$

Der gesamtwirtschaftliche p-k-locus ist monoton fallend, wenn die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, und es lassen sich daraus die Ober- und die Untergrenze für die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität bestimmen, die einen Ausgleich auf dem Gütermarkt ermöglicht. Es läßt sich zeigen, daß

$$\left.\begin{aligned} \bar{k}_{\underline{p}} &< k_2 \\ \underline{k}_{\bar{p}} &> k_1 \end{aligned}\right\} \text{ für } \left\{\begin{aligned} k_1 &< k_2 \\ s_r &> s_w \end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

Damit wird wieder ein Intervall $I_4 = [\underline{k}_{\bar{p}}, \bar{k}_{\underline{p}}]$ für die Kapitalintensität festgelegt, das echt in I_1 enthalten ist. Bezeichnend ist, daß die Grenzen von I_4 jeweils nur von einer Sparquote abhängen. D. h. $\underline{k}_{\bar{p}}$ ist unabhängig von s_w und es gilt

$$\begin{aligned} \underline{k}_{\bar{p}} &= k_1 \quad \text{für } s_r = 1 \\ \underline{k}_{\bar{p}} &= k_2 \quad \text{für } s_r = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Entsprechend

$$\begin{aligned} \bar{k}_{\underline{p}} &= k_1 \quad \text{für } s_w = 1 \\ \bar{k}_{\underline{p}} &= k_2 \quad \text{für } s_w = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Das Stabilitätstheorem gilt nun entsprechend für alle $k \varepsilon I_4$ und solange $k^* \varepsilon I_4$ ist. Figur 2 gibt eine grafische Darstellung des Problems.

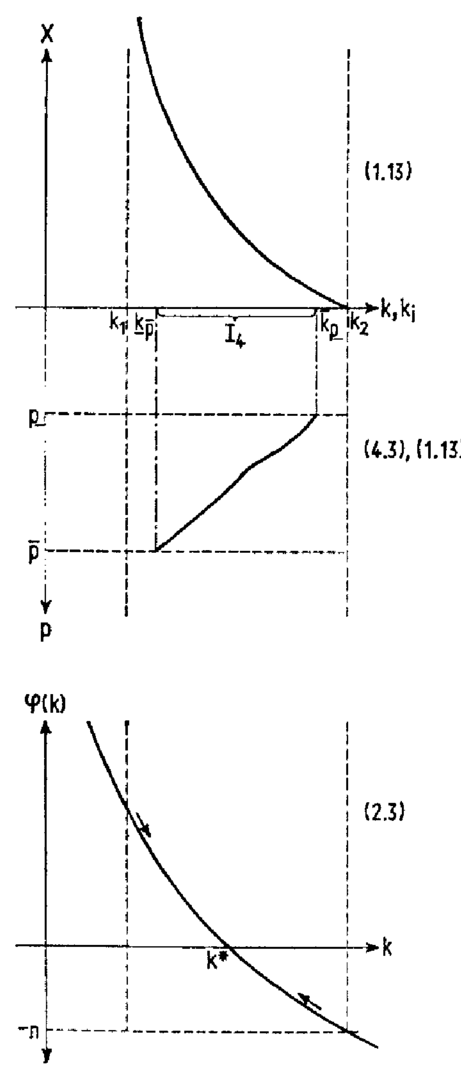

Fig. 2

Ein Vergleich der beiden Intervalle I_3 und I_4 ergibt die folgenden Ergebnisse: Im Stabilitätsfall, d. h. für $k_2 > k_1$, gilt

(4.10) $$\underline{k} \gtrless \underline{k}_p \qquad \text{für} \begin{cases} s_r \gtrless s \\ s_r > s_w \end{cases}$$

(4.11) $$\bar{k} \gtrless \bar{k}_p \qquad \text{für} \begin{cases} s_w \gtrless s \\ s_r > s_w \end{cases}$$

Daraus folgt

(4.12) $$I_3 < I_4 \qquad \text{für } s_w < s < s_r$$

Das für die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität zulässige Intervall bei Vollbeschäftigung und Gleichgewicht auf dem Gütermarkt im Falle zweier getrennter Sparquoten überdeckt dann das zulässige Intervall im Fall der gesamtwirtschaftlichen Sparfunktion, wenn $s_w < s < s_r$ ist.

Der Spielraum für ein Gesamtgleichgewicht ist somit vergrößert. Aus (4.10) und (4.11) lassen sich nun die möglichen Fälle der Überdeckungen der Intervalle I_3 und I_4 ablesen. Interessant erscheint noch der Spezialfall der extrem klassischen Sparannahme, d. h. $s_r = 1$ und $s_w = 0$. (4.8) und (4.9) zeigen, daß dann

(4.13) $$I_4 = I_1$$

gilt. Das heißt aber, daß zu jedem Gleichgewicht bei Vollbeschäftigung auch ein Gleichgewicht auf dem Gütermarkt existiert und beides gleichzeitig realisiert wird.

Zusammenfassung

In einem Zwei-Sektoren-Wachstumsmodell mit linearer Technologie werden die Bedingungen untersucht, bei denen ein Wachstum bei ständigem Gleichgewicht auf dem Güter- und Faktormarkt möglich ist. Das für momentanes Gleichgewicht bei Vollbeschäftigung zulässige Gesamtverhältnis der Faktoren Arbeit und Kapital wird durch die fixen sektoralen Faktorintensitäten nach oben und nach unten beschränkt. Hinzufügen einer gesamtwirtschaftlichen Sparfunktion $S = sY$ und Forderung nach Gleichgewicht auf dem Gütermarkt ergibt für $0 < s < 1$ eine Verkleinerung des für Vollbeschäftigung zulässigen Intervalls der gesamtwirtschaftlichen Kapitalintensität. Im Fall einer disaggregierten Sparfunktion vom Kaldor-Typ erfolgt ebenfalls eine Einschränkung des zulässigen Intervalls. Nur im Fall der extrem klassischen Sparannahme, d. h. wenn die Sparneigung der Lohnbezieher Null und die der Kapitaleinkommensbezieher Eins ist, ist Gleichgewicht auf Güter- und Faktormarkt für dasselbe Intervall der gesamtwirtschaftlichen Kapitalintensität möglich. — Die Stabilität des Systems ist allein durch die Technologie bestimmt und wird durch die Intensitätsannahme gewährleistet.

Summary

The purpose of this paper is to examine some of the properties of a two-sector model with fixed production coefficients in both sectors. Emphasis is put on elaborating the rectrictions which have to be imposed on the overall capital labor ratio to secure equilibrium at any point of time along the growth path. For momentary full employment equilibrium the overall capital labor ratio is restricted

to the interval set by the two sectoral capital labor ratios. Introducing a general savings function $S = sY$ $(0 < s < 1)$ the interval for the overall capital intensity has to be smaller for solutions at full employment and equilibrium on the commodity market. In the case of a disaggregated Kaldor type savings function the interval for the overall capital labor ratio to secure a general equilibrium is reduced also. Only if the extreme classical savings assumption prevails, i. e. if all wages are consumed and if all profits are invested, the entire interval which secures full employment secures equilibrium on the commodity market also. — Necessary and sufficient conditions are derived for the existence and the asymptotic stability of the balanced capital labor ratio, and it is shown that the stability depends on the technical structure alone.

Literatur

Drandakis, E. M., Factor Substitution in the Two-Sector Growth Model. Review of Economic Studies, Vol. 30, 1963.

Hicks, J. R., Capital and Growth. Oxford 1965.

Inada, K.-I., On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalisation. Review of Economic Studies, Vol. 30, 1963.

Shinkai, Y., On Equilibrium Growth of Capital and Labor. International Economic Review, Vol. 1, 1960.

Uzawa, H., On a Two-Sector Model of Economic Growth II. Review of Economic Studies, Vol. 30, 1963.

Corden, W. M., The Two Sector Growth Model with Fixed Coefficients. Review of Economic Studies, Vol. 33, 1966.