Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Planimetrische Veranschaulichung des Satzes. Stereometrische Erläuterung. Einfache Beispiele dazu. Jnhaltsformel für Pyramiden und Kegel. Jnhalt und Oberfläche der Kugel. Mantelfläche des senkrechten ...

III. Der Satz des Cavalieri und seine wichtigsten Anwendungen.

25) Der Inhalt des Satzes werde zunächst planimetrisch erläutert: Zwischen zwei Parallelen AB und DC mögen sich endliche Rechteckstreifen von Millimeterhöhe befinden, die zwei Figuren a und b geben. Die in gleicher Höhe befindlichen Streifen sollen gleiche Breite haben. Dann sind beide Figuren inhaltsgleich. Die eine ist durch bloße Verschiebung der Streifen aus der anderen entstanden. Dasselbe gilt, wenn die Streifen nicht Millimeterhöhe, sondern nur den 1000sten, 1000000sten usw. Teil dieser Höhe haben. **Die Figuren haben gleichen Inhalt, sobald sie in gleichen Höhen gleiche Querschnittslinien haben.**

Fig. 183.

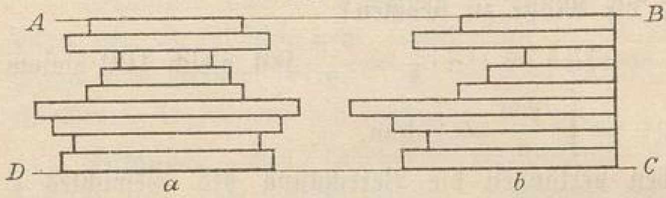
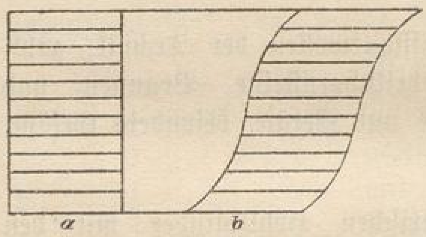


Fig. 184.

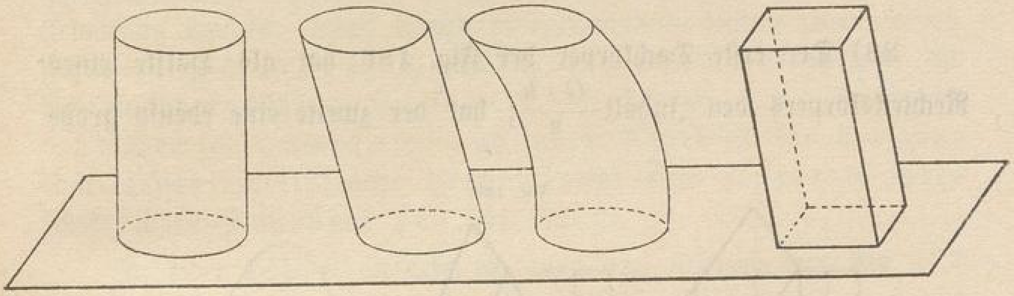


Dies ist z. B. auch in Fig. 184 der Fall, wo die einzelnen Streifen von so verschwindend kleiner Höhe zu denken sind, daß man in Fig. b nicht einmal die „Treppenstufen" der vorigen Figur wahrnimmt, sondern krumme Linien als seitliche Begrenzung sieht.

26) Denkt man sich nun an Stelle der Streifen dünne horizontale, seitlich senkrecht begrenzte Platten, die zwischen parallelen Ebenen aufeinander geschichtet sind, so hat man Entsprechendes. Sind die in gleicher Höhe liegenden Platten von gleicher Grundfläche, so sind sie, wenn gleiche Dicke angenommen wird, inhaltsgleich, mag auch die Gestalt der verglichenen Platten noch so verschieden sein. Sind die Platten von verschwindend kleiner Dicke, so nimmt man seitlich keine Treppenstufen wahr, so daß die Konturen als krummlinig, die Seitenflächen als krumme Flächen gelten können. Die Inhaltsgleichheit aber bleibt bestehen. So gilt **unter der Voraussetzung endlicher Querschnitte** der Satz:

Haben zwei Körper in gleichen Höhen flächengleiche Querschnitte, so sind sie inhaltsgleich.*)

Fig. 185.



27) Die in Fig. 185**) dargestellten Körper sollen von oben bis unten denselben Querschnitt G haben und in der Höhe übereinstimmen. Da nun der erste der Körper den Inhalt $G \cdot h$ hat, so sind sie sämtlich vom Inhalte Gh. Die Formel $I = Gh$ gilt also für senk-

---

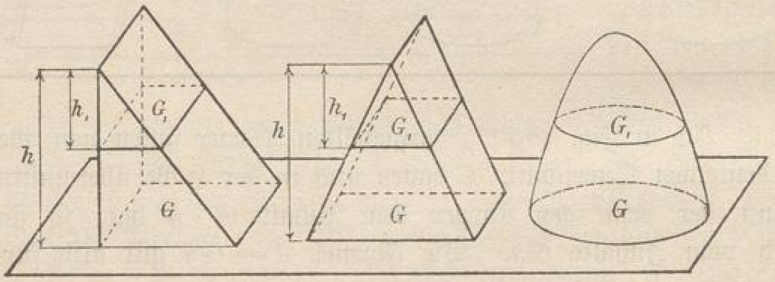
*) Bei der planimetrischen Veranschaulichung des Satzes kann man einen strengeren Beweis geben, indem man zeigt, daß die „Treppenräume" der Gestalt unendlich kleiner Dreiecke zustreben. Hat ein solches die Grundlinie $\frac{b}{m}$ und die Höhe $\frac{h}{n}$, wobei m und n unendlich große Zahlen sind, so ist seine Fläche gleich $\frac{bh}{2mn}$, sodaß im Nenner unendlich großes „zweiter Ordnung" steht, was man durch das Symbol ∞^2 darstellen kann. Die Anzahl der Dreiecke ist aber nur unendlich groß erster Ordnung. Ist das berechnete das größte von allen, so ist die Summe aller kleiner als $\frac{bh}{2} \frac{\infty^1}{\infty^2}$. Dieser Ausdruck kann als $\frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{\infty}$ aufgefaßt werden, d. h. er strebt der Größe Null zu. Ähnlich ist es bei den körperlichen Betrachtungen. Die Anzahl der Treppenräume ist unendlich groß erster Ordnung, der Inhalt des größten aber unendlich klein zweiter Ordnung, z. B. $\frac{k}{\infty^2}$, also handelt es sich bei der Summe aller wieder um einen Ausdruck, der kleiner als $\infty \cdot \frac{k}{\infty^2}$ oder $\frac{k}{\infty}$ ist, was aber der Null zustrebt. Also auch hier darf man den Inhalt der Treppenräume schließlich vernachlässigen. Ein näheres Eingehen auf solche Infinitesimalbetrachtungen ist erst auf einem höheren Standpunkte möglich. Der von Cavalieri ausgesprochene aber im Hinblick auf gewisse Ausnahmen nicht streng genug bewiesene Satz wird nach ihm benannt.

**) Diese Figur ist nur schematisch aufzufassen. Bei genauer Konstruktion würden die großen Ellipsenachsen etwas geneigt gegen die Horizontale liegen. Die genaue Konstruktion geht über den Standpunkt der Klasse hinaus. Dasselbe gilt von Fig. 186 und 187.

rechte und schräge Prismen, für senkrechte und schräge Zylinder und von Körpern beliebigen Profils, die von oben bis unten flächengleiche Querschnitte haben. Die Gestalt dieser Querschnitte darf sich dabei von unten nach oben ändern.

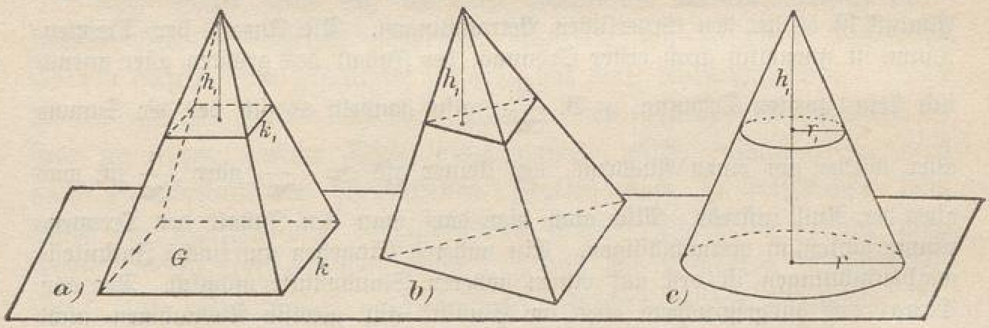
28) Der erste Dachkörper der Fig. 186 hat als Hälfte eines Rechteckskörpers den Inhalt $\frac{G \cdot h}{2}$; hat der zweite eine ebenso große

Fig. 186.



Grundfläche und dieselbe Höhe, so hat er denselben Inhalt. Im ersten nämlich ist für die Querschnittsflächen $G_1 : G = h_1 : h$ (warum?), also $G_1 = G\frac{h_1}{h}$. Im zweiten ist ebenfalls $G_1 = G\frac{h_1}{h}$, also sind die Querschnitte beider Körper in gleichen Höhen flächengleich. Angenommen, das Profil des dritten Körpers sei so gewählt, daß auch bei ihm für jedes h_1 der Querschnitt $G_1 = G\frac{h_1}{h}$ ist, so ist auch für ihn die Inhaltsformel $I = \frac{G \cdot h}{2}$.

Fig. 187.

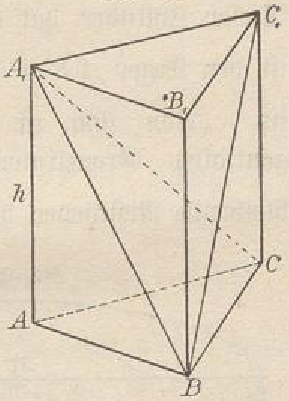


29) In Fig. 187 sind Pyramiden und ein Kegel dargestellt. Alle sollen Grundflächen von derselben Größe G haben und auch in der Höhe h übereinstimmen. Will man beweisen, daß für alle dieselbe

Inhaltsformel gilt, so muß gezeigt werden, daß sie in gleichen Höhen gleiche Querschnitte haben. Zunächst ist bei jedem dieser Körper der Parallelschnitt ähnlich der Grundfläche, denn die Spitze ist als Ähnlichkeitspunkt zu betrachten, sodaß es sich um eine gesetzmäßige Verkleinerung handelt. Sind k und k_1 entsprechende Linien in der ersten Figur, so ist $k_1 : k = h_1 : h$, also $k_1^2 : k^2 = h_1^2 : h^2$; es ist aber für die ähnlichen Flächen $G_1 : G = k_1^2 : k^2$, folglich $G_1 : G = h_1^2 : h^2$, d. h.: **Bei jeder Pyramide und jedem Kegel ist die horizontale Querschnittsfläche proportional dem Quadrate ihres senkrechten Abstandes von der Spitze.**

In jeder Höhe h_1 ist also bei allen drei Körpern der Fig. 187 $G_1 = G \frac{h_1^2}{h^2}$, alle haben in gleichen Höhen flächengleiche Querschnitte. Folglich: **Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.**

Fig. 188.



An dem dreiseitigen Prisma in Fig. 188 läßt sich nun folgendes zeigen: Zieht man in den Seitenflächen Diagonalen in einem Zuge (ohne abzusetzen), so ist durch die entsprechenden Flächenschnitte das Prisma in drei Pyramiden zerlegt:

I. $(ABC)\,A_1$*),

II. $(A_1 B_1 C_1)\,B$ oder $(B C_1 B_1)\,A_1$,

III. $(B C C_1)\,A_1$.

Die beiden ersten Pyramiden haben gleiche Grundflächen $ABC = A_1 B_1 C_1$ und gleiche Höhen (Abstand der oberen von der unteren Fläche), sie sind also inhaltsgleich. Die zweite Pyramide in der anderen Schreibweise und die dritte haben gleiche Grundflächen BC_1B_1 und BCC_1 in derselben Ebene, und da sie dieselbe Spitze A_1 haben, stimmen auch die Höhen überein, folglich auch die Inhalte. Da somit alle drei Pyramiden inhaltsgleich sind, so ist jede der dritte Teil des Prismas. Für dieses war aber $I = Gh$, folglich ist für die Pyramide $(ABC)\,A_1$ die Inhaltsformel $I = \frac{Gh}{3}$. Alle Pyramiden und Kegel von derselben Grundfläche und derselben Höhe h sind aber inhaltsgleich, folglich:

Für jede Pyramide und jeden Kegel ist $I = \frac{G \cdot h}{3}$.

Für den Kegel ist $G = r^2\pi$, **also** $I = \frac{r^2 \pi h}{3}$.

---

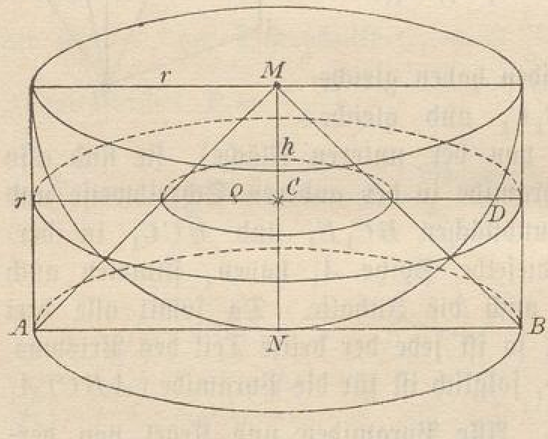
*) Die Spitze ist jedesmal außerhalb der Klammer geschrieben.

Bemerkung. Das Resultat für die Pyramide stimmt mit dem auf Seite 278 angegebenen überein.

[**Aufgaben.** Berechne den Inhalt des regelmäßigen Tetraeders aus der Kante k, den des regelmäßigen Oktaeders aus der Halbachse a, den des Pyramidenwürfels aus der Würfelkante k und der Pyramidenhöhe h, ebenso den des Rhombendodekaeders. — Versuche*) die Kanten, die Winkel, die Flächen und den Inhalt des Pentagondodekaeders aus der Halbachse a des zugehörigen Würfels, oder aus der Würfelkante b, oder aus der Dodekaederkante k zu berechnen. Ein Teil der Rechnungen ist oben vorbereitet. Der Inhalt wird $J = \frac{O\varrho}{3}$. Dieselbe Aufgabe soll für das Ikosaeder gelöst werden, wobei das Oktaeder an Stelle des Würfels tritt.*)

30) Fig. 189 stellt einen Zylinder dar, der durch Drehung eines Quadrates von der Seite r um die Linie MN entstanden ist. Dieser Zylinder hat den Inhalt $(r^2\pi) r = r^3\pi$. Aus dem Zylinder ist der Kegel ABM ausgeschnitten, dessen Inhalt $= r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{r^3\pi}{3}$ ist. (Von ihm ist nur der Hauptschnitt gezeichnet. Die tangentialen Grenzlinien sind absichtlich weggelassen.) Der übrig bleibende Restkörper hat den Inhalt $r^3\pi - \frac{r^3\pi}{3}$ oder $\frac{2}{3} r^3\pi$. In den Zylinder ist außerdem eine Halbkugel einbeschrieben, von der sich zeigen läßt, daß sie in gleichen Höhen mit dem Restkörper flächengleichen Querschnitt hat. (Von ihr ist ebenfalls nicht der richtige Umriß, sondern nur der Hauptschnitt gezeichnet.) Im Abstande $MC = h$ ist nämlich für den Kegelquerschnitt $\varrho = h$, also hat dort der Restkörper die Schnittfläche $r^2\pi - \varrho^2\pi = \pi(r^2 - \varrho^2) = \pi(r^2 - h^2)$; die Halbkugel hat in derselben Höhe den nicht gezeichneten Querschnitt $CD^2\pi = \pi(MD^2 - MC^2) = \pi(r^2 - h^2)$.

Fig. 189.

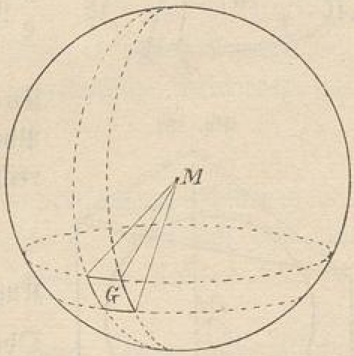


*) Diese beiden Aufgaben waren gewissermaßen das Endziel der Geometrie und Stereometrie des **Euklid**.

Beide Schnitte stimmen also im Flächeninhalte überein, und weil dies für jede Höhe gilt, so hat die Halbkugel mit dem Restkörper gleichen Inhalt. Für die Halbkugel ist also $I = \frac{2}{3} r^3 \pi$, folglich für die ganze Kugel $I = \frac{4}{3} r^3 \pi$.

31) Denkt man sich die Oberfläche der Kugel in sehr kleine z. B. rechteckige Stücke zerlegt, die man bei ihrer Kleinheit als Ebenen betrachten darf (z. B. durch benachbarte Meridiane und Parallelkreise), und verbindet man die Ecken mit dem Kugelzentrum M, so entstehen zahlreiche kleine Pyramiden. Sind ihre Grundflächen $G_1, G_2, G_3, \ldots$, so sind, weil r die Höhe ist, die Inhalte zusammengenommen

Fig. 190.



$$\frac{G_1 r}{3} + \frac{G_2 r}{3} + \frac{G_3 r}{3} + \cdots$$
$$= \frac{r}{3}(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots).$$

Die Pyramiden geben zusammen den Kugelinhalt $I = \frac{4}{3} r^3 \pi$, die Grundflächen zusammen die Kugeloberfläche O. Daher ist nach obiger Gleichung

$$I = \frac{r}{3} O \quad \text{oder} \quad O = \frac{3}{r} I = \frac{3}{r} \frac{4}{3} r^3 \pi = 4 r^2 \pi.$$

Also: Die Kugeloberfläche ist gleich $4 r^2 \pi$ oder gleich dem Vierfachen von der Fläche des größten Kreises. Die Halbkugelwölbung hat also die doppelte Fläche, wie ihre Basis.

32) **Bemerkungen.** In Fig. 189 sind die Inhalte des Kegels, der Halbkugel und des Zylinders der Reihe nach $\frac{r^3 \pi}{3}$, $\frac{2 r^3 \pi}{3}$, $r^3 \pi = \frac{3 r^3 \pi}{3}$, sie verhalten sich also wie 1 : 2 : 3. Dieser Satz wird dem Archimedes zugeschrieben.

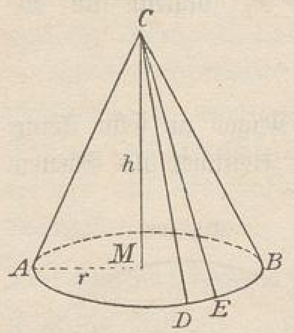
Der Inhalt einer Hohlkugel mit den Radien r und r_1 ist

$$I = \frac{4}{3} r^3 \pi - \frac{4}{3} r_1^3 \pi = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3).$$

33) Die Linie AC am senkrechten Kreiskegel (Fig. 191) bezeichnet man als seine Seite. Diese berechnet sich als $s = \sqrt{r^2 + h^2}$. Die Mantelfläche des Kegels läßt sich durch aufeinanderfolgende Gerade in sehr schmale Dreiecke wie DEC zerlegen, die man als eben betrachten

darf. Sind $g_1, g_2, g_3, \ldots$ die aufeinanderfolgenden Grundlinien der Dreiecke, ſo iſt die Summe ihrer Flächen

Fig. 191.

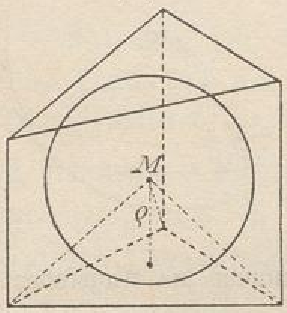


$$\frac{g_1 s}{2} + \frac{g_2 s}{2} + \frac{g_3 s}{2} + \cdots$$
$$= \frac{s}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + \cdots).$$

Die Summe der g iſt aber der Kreisumfang $2r\pi$, alſo hat der *Kegelmantel* die Fläche $\frac{s}{2} 2r\pi = \boldsymbol{r\pi s}$.

Jeder Kegelſtumpf oder *Pyramidenſtumpf* iſt die Differenz zweier Kegel bezw. Pyramiden. Später werden beſondere Berechnungsmethoden gelehrt.

Fig. 192.



34) Iſt ein ebenflächiger Körper einer Kugel mit Radius ϱ umbeſchrieben, und iſt ſeine Oberfläche O, ſo iſt ſein Inhalt $I = O \cdot \frac{\varrho}{3}$.

Beweis. Verbindet man das Kugelzentrum mit den Ecken jeder Fläche, ſo erhält man Pyramiden von der Höhe ϱ, deren Grundflächen $G_1, G_2, G_3, \ldots$ ſein mögen. Die Summe der Inhalte iſt

$$G_1 \frac{\varrho}{3} + G_2 \frac{\varrho}{3} + G_3 \frac{\varrho}{3} + \cdots = \frac{\varrho}{3}(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots) = \frac{\varrho}{3} \cdot O.$$

Dieſe Formel findet z. B. Anwendung bei der Berechnung des Inhalts regelmäßiger Polyeder.

IV. Vermiſchte Übungsaufgaben.

35) a) Die Erdkugel habe einen Radius 860 Meilen (860×7420 m) Länge. Wie viele Quadratmeilen hat ihre Oberfläche? Wie viele Kubikmeilen beträgt der Inhalt? Gieb das Reſultat auch in Quadrat- bezw. Kubikkilometern an.

b) Angenommen der Erdradius habe 860 Meilen, der Sonnenradius 100 000 Meilen Länge. Wieviel mal ſo groß iſt der Sonneninhalt im Verhältnis zum Erdinhalt?

Auflöſung. $\frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{4}{3} r_1^3 \pi = r^3 : r_1^3$ u. ſ. w.