Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Zeichnen des Würfels in verschiedenen Projektionen. Berechnungen am Würfel. Sein Flächennetz. Das regelmäßige Achtflach, seine Elemente und sein Flächennetz. Das regelmäßige Vierflach. Seine Elemente ...

Die rechtwinklige Ecke. Der Würfel mit seinen Kanten, Flächen, Diagonalen, Diagonalebenen. Sein Rauminhalt, seine Oberfläche, seine Kantensumme. Seine einbeschriebene Kugel. Die Kubikzahlen und die Raummaße. Der Rechteckskörper, seine Kanten, Flächen, Diagonalen und Diagonalebenen. Sein Inhalt, seine Oberfläche, seine Kantensumme. Dreikantige Säulen, die mit dem Würfel und dem Rechteckskörper zusammenhängen. Ihre Inhaltsformel. Pyramiden, die mit dem Würfel und dem Rechteckskörper zusammenhängen. Das dem Würfel einbeschriebene regelmäßige Achtflach. Die beiden dem Würfel einbeschriebenen regelmäßigen Vierflache. — Die Symmetrie im Raume. — Die Kugelfläche als Ort konstanten Abstandes von einem Punkte. Halbmesser, Sehne, Durchmesser, Gegenpunkte der Kugelfläche. Die Kugel als regelmäßiger Körper. Schnitt einer Ebene mit der Kugel. Haupt- oder größte Kreise, kleinere Kreise der Kugel. Meridiane und Parallelkreise. Kugelabschnitt (Segment). Halbkugelkörper. Kugelhaube (Kalotte). Halbkugelfläche. Kugelausschnitt (Sektor). Meridiankeil und Meridianeck. Kreisbüschel auf der Kugelfläche. Krümmung. Länge, Breite und Gradeinteilung am Globus. Senkrechter Kreiszylinder (Walze). Sein Inhalt, seine Mantelfläche und Oberfläche. Der konzentrische Hohlzylinder. Der senkrechte Kreiskegel, seine Mantelfläche und Oberfläche. Netze einiger Körper. Körpermodelle verschiedener Art.

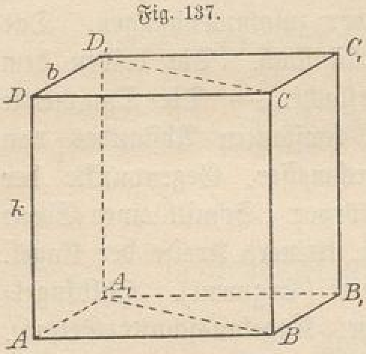
I. Übungen am Würfel und an den aus ihm abgeleiteten Körpern.

2) Das Zeichnen des Würfels. Die Kunst, dreidimensionale Körper und sonstige Raumgebilde in der nur zweidimensionalen Ebene durch eine korrekte Zeichnung wiederzugeben, heißt die darstellende Geometrie. Jede besondere Art der Darstellung eines Körpers in der Ebene bezeichnet man als eine Projektion des Körpers. Die Berechtigung dieses Namens wird sich aus den folgenden Erläuterungen über die Darstellung des Würfels durch entsprechende Zeichnungen ergeben.

a) Man denke sich das Drahtmodell des Würfels auf einem horizontalen Reißbrett stehend und die Sonne so darauf scheinend, daß der Schatten des Modells auf das Reißbrett geworfen (projiziert) wird. Bei schrägem Einfall der Sonnenstrahlen, die man wegen der sehr großen Entfernung der Sonne als parallel betrachten darf, nennt man das entstehende Schattengebilde eine schräge Parallelprojektion des Würfels. (Vergl. Fig. 137.)

Dabei decken sich für das in die Sonne versetzt gedachte Auge die unendlich dünn zu denkenden Drähte der Grundfläche $A_1 B_1 C_1 D_1$ des Modells mit ihren eigenen Schattenlinien, die also ein Quadrat bilden. Die senkrechten Würfelkanten aber werfen parallele Schattenlinien, denn steht z. B. die Sonne im Südosten, so gehen diese Schattenlinien sämtlich nach Nordwesten. Außerdem sind diese gleichlang. Steht nämlich die Sonne z. B. 50^0 über dem Horizonte, und ist k die Länge der Würfelkante, so ist die Schattenlänge der senkrechten Kanten $b = k \cot 50^0$. Allgemeiner ist $b = k \cot \alpha$, sobald die Sonne α^0 über dem Horizonte steht.

Fig. 137.

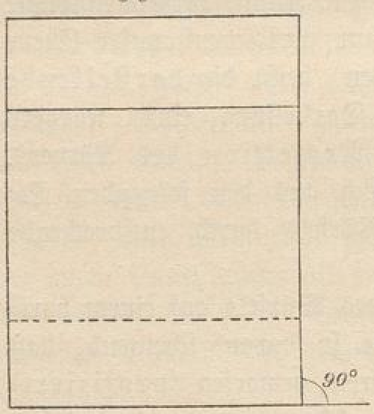


Die Drähte der oberen Würfelfläche endlich geben Schattenlinien, welche die Endpunkte der eben besprochenen verbinden, sodaß sie ein Quadrat bilden, welches dem zuerst besprochenen kongruent und gegen dieses um die Strecke b verschoben ist

In Fig. 137 bedeutet bei dieser Auffassung $A_1 B_1 C_1 D_1$ die Grundfläche, $ABCD$ die obere Fläche, $A_1 A$, $B_1 B$, $C_1 C$ und $D_1 D$ sind die Schatten der senkrechten Kanten. Die Sonne ist wo zu denken? (Man errichte in D_1 auf der Ebene der Zeichnung ein Lot $D_1 X = k$. Zieht man DX, so zeigt diese Linie nach der unendlich fern zu denkenden Sonne hin.)

Aufgabe. Versuche Fig. 137 so zu deuten, daß das Würfelmodell mit der Fläche $A_1 B_1 C_1 D_1$ an die senkrechte Wandtafel gehalten und das Schattengebilde durch die Sonne auf diese geworfen wird. Welches ist dann die horizontale Grundfläche des Würfels, wo sind die senkrechten Seitenkanten, und wie hat man sich den Stand der Sonne zu denken?

Fig. 138.



b) Man kann sich die Sonne auch so stehend denken, daß das Schattengebilde so wie in Fig. 138 erscheint. Die vorher sichtbaren Seitenflächen sind jetzt unsichtbar geworden. An Stelle des Winkels $A_1 A B$, der vorher 30^0 betrug, ist ein Winkel von 90^0 getreten.

c) Je nach der Höhe des Sonnenstandes können die Kanten AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 des Würfels verkürzt, verlängert oder auch in richtiger Länge erscheinen. Im letzteren Falle kann man die Zeichnung als eine isometrische bezeichnen. In der Regel wird man aber irgend eine Verkürzung wählen. Ebenso willkürlich kann man mit dem Winkel A_1AB verfahren.

Man wird jetzt verstehen, was es heißen soll, in Fig. 137 sei der Würfel in der Parallelperspektive*) zu 30^0 mit $\frac{1}{3}$ Verkürzung gezeichnet. Ebenso kann man die Parallelperspektive 45^0 und $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ usw. Verkürzung nehmen; ebenso die Parallelperspektive zu 90^0 und $\frac{1}{4}$ Verkürzung usw. Statt Parallelperspektive im allgemeinen möge man abgekürzt sagen „Schrägbild".

Die gewöhnliche Stellung des Würfels ist dabei die sog. Frontstellung. (Durch die in Fig. 137 eingezeichnete Dialgonalebene ist zugleich dargestellt, wie die dreiseitigen Säulen, in die durch jene der Würfel zerlegt ist, erscheinen würden.)

d) **Aufgabe.** Den Würfel in der Parallelperspektive zu 30^0 und $\frac{1}{3}$ Verkürzung in „Übereckstellung" zu zeichnen.**)

(Man kann die Figur aus Fig. 137 ableiten. Setzt man in dieser $AB = 1$, so zeichne man einen Würfel von der Kante $\sqrt{2}$, sodaß seine Höhe leicht zu bestimmen ist. Die Grundlinien erscheinen dann von derselben Länge und Richtung, wie in Fig. 137 A_1B und AB_1.)

e) Zwei Sonderfälle der Parallelperspektive sind von besonderer Wichtigkeit, bei denen es sich um die Verkürzung $\frac{1}{\infty} = 0$ handelt.

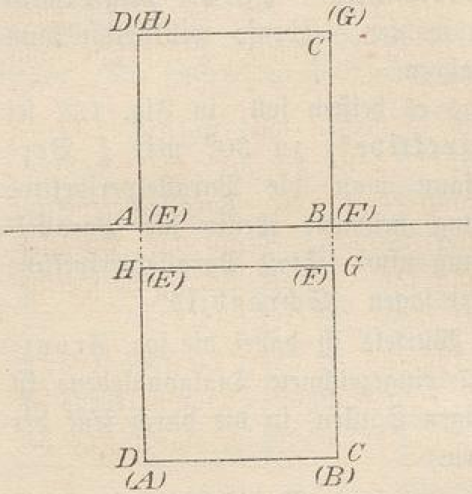
Steht die Sonne senkrecht über dem Reißbrett, bezw. der Fläche der Wandtafel, so fällt $ABCD$ auf $A_1B_1C_1D_1$ und es wird $AA_1 = 0$, $BB_1 = 0$ usw. In dem einen Falle entsteht dann die Grundriß-Zeichnung, in dem anderen die Aufriß-Zeichnung des Würfels, in beiden Fällen zunächst ein Quadrat. Im Gegensatze zu den Schrägbildern bezeichnet man diese Zeichnungen als senkrechte Projektionen (orthogonale oder orthographische Projektionen) des Würfels. Die Zeichnungen der Bau- und Maschinentechnik werden in der Regel durch Grundriß und Aufriß zugleich dargestellt. So ist in

*) Der Name Perspektive kommt daher, daß man das unendlich scharfe Auge des Beobachters an die Stelle der Sonne versetzt denkt. Diesem Auge decken sich die Drahtkanten des Modells mit ihren Schattenlinien. Ihm erscheint der Würfel so, wie das gezeichnete Bild.

**) Näheres über diese Darstellung findet man in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen". Leipzig bei B. G. Teubner, 1886.

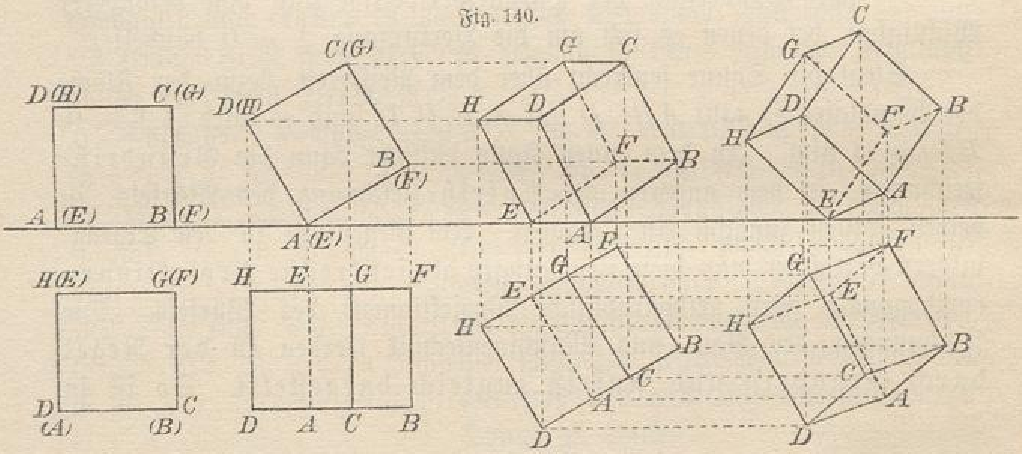
Fig. 139 der Würfel im Grundriß und Aufriß zugleich gezeichnet. Für die mathematischen Zwecke der Schule ist die Schrägprojektion im allgemeinen die geeignetere, da sie nur eine Zeichnung erfordert. Nur für die Zeichnung der Kugel ist die senkrechte Projektion vorzuziehen, weil sie in dieser als Kreis, bei der schrägen dagegen im allgemeinen als Ellipse erscheint.

Fig. 139.



f) Die Grund- und Aufrißzeichnung ist sehr geeignet, den Würfel in den verschiedensten Stellungen zur Darstellung zu bringen. Wie dies geschehen kann, ergibt sich aus Fig. 140. In dieser ist zunächst die gewöhnliche Frontstellung gewählt, wobei die verdeckten Punkte mit eingeklammerten Buchstaben bezeichnet sind. Denkt man sich dann den Würfel im Aufriß um irgend einen Winkel unter Festhaltung der Kante AE gedreht, wobei das Aufrißbild sonst ungeändert bleibt, so wandern die Grundrißpunkte in horizontaler Bahn. Wie sie im

Fig. 140.

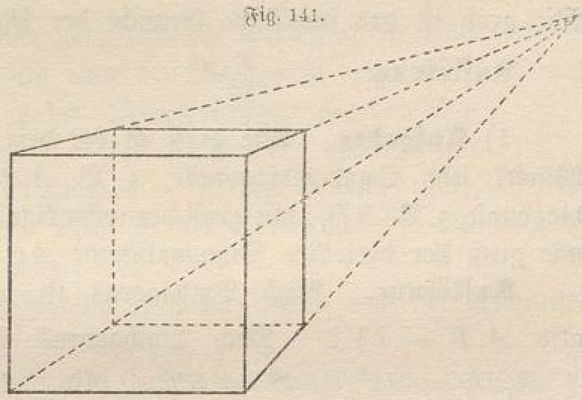


zweiten Bilde liegen, ergibt sich aus dem Herabprojizieren der Aufrißpunkte in den Grundriß. Dann drehe man das Grundrißbild, wobei die Punkte des Aufrisses horizontal wandern. Ihre Lage ergibt sich aus dem Hinaufprojizieren. Im Aufriß kann man schließlich noch eine andere Drehung vornehmen, was eine ganz allgemeine Lage ergibt.

g) Denkt man sich die Kante des Würfels als 1, so hat die einbeschriebene Kugel den Radius $\varrho = \frac{1}{2}$, die umbeschriebene aber hat den Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, (warum?) kann also ebenfalls leicht konstruiert werden.*) Den Mittelpunkt beider Kugeln findet man durch den Schnitt je zweier Hauptdiagonalen. Die Kugeln sind also für alle vier Lagen im Grund- und Aufriß als je zwei gleich große Kreise leicht zu zeichnen.

h) Macht man den ersten Beleuchtungsversuch statt mit den Sonnenstrahlen mit einen Kerzenlichte, so erhalten die Quadrate verschiedene Größe, und die Schatten der senkrechten Drähte laufen so auseinander, als ob sie von einem Punkte ausgingen, dem äußeren Ähnlichkeitspunkte der beiden Quadrate. Fig. 141 stellt eine solche Projektion dar, die man als Zentralprojektion (Zentralperspektive, Malerperspektive) des Würfels bezeichnet. Sie stellt den Würfel so dar, wie er dem in endlicher Entfernung befindlichen Auge erscheint. Räumlich ist das Kerzenlicht wo zu denken? Man errichte in einem Eckpunkte D_1 des kleineren Quadrates auf der Ebene der Zeichnung ein Lot

Fig. 141.



$D_1 X$ gleich der Seite dieses Quadrates. Ist nun D der Endpunkt der zugehörigen Schräglinie, so zeigt die Gerade DX nach dem leuchtenden „Punkte" hin. Macht man dieselbe Konstruktion an einer anderen Ecke, so schneiden sich die beiden Raumlinien im leuchtenden Punkte. — Das Auge befindet sich an derselben Stelle.

Auf diese Zeichnungsart kann hier noch nicht näher eingegangen werden.**)

3) **Aufgaben.** a) Der Würfel habe die Kante k; wie groß ist seine Oberfläche, sein Inhalt und, wenn p' das spezifische Gewicht ist, sein Gewicht? (Bei Eisen z. B. ist $p' = 7{,}5$ zu nehmen.)

Auflösung. $O = 6k^2, \quad I = k^3, \quad p = k^3 p'$.

b) Wie groß sind k, I und p bei gegebener Oberfläche O?

---

*) Letzterer Kreis geht nicht durch die Ecken der zuerst gezeichneten Quadrate.

**) Die Einführung in das stereometrische Zeichen teilt das Wichtigste darüber mit.

Auflösung. $k = \sqrt{\frac{O}{6}}$, $I = k^3 = \left(\sqrt{\frac{O}{6}}\right)^3$, $p = \left(\sqrt{\frac{O}{6}}\right)^3 p'$, wobei auch p' gegeben sein muß.

c) Wie groß sind k, O und p bei gegebenem I?

Auflösung. $k = \sqrt[3]{I} = I^{\frac{1}{3}}$, $O = 6k^2 = 6I^{\frac{2}{3}}$, $p = I \cdot p'$.

d) Wie lang müssen die Kanten eines würfelförmigen Hektolitergefäßes genommen werden?

Auflösung. $x^3 = 100$ cbdcm, folglich $x = \sqrt[3]{100} = ?$

e) Wie lang müssen die Kanten eines Eisenwürfels sein, der 1000 kg wiegen soll?

Auflösung. Aus $p = I \cdot 7{,}5 = x^3 \cdot 7{,}5$ folgt $x = \sqrt[3]{\frac{p}{7{,}5}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{7{,}5}} = ?$

f) Ein Würfel von der Kantenlänge k habe das Gewicht p. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Masse?

Auflösung. $p' = \frac{p}{k^3}$.*)

4) **Aufgaben.** Wie groß ist bei dem in Fig. 137 dargestellten Würfel jede Quadratdiagonale, z. B. A_1B; wie groß jede Hauptdiagonale, z. B. BD_1; wie groß der rechteckige Diagonalschnitt A_1BCD_1; wie groß der dreieckige Diagonalschnitt ACD_1?

Auflösung. Nach Pythagoras ist $A_1B^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$, also $A_1B = k\sqrt{2}$. Nach Pythagoras ist ferner $BD_1^2 = A_1B^2 + A_1D_1^2 = 2k^2 + k^2 = 3k^2$, also $BD_1 = k\sqrt{3}$. Fläche $A_1BCD_1 = A_1B \cdot A_1D_1 = k\sqrt{2}k = k^2\sqrt{2}$. Fläche $ACD_1 = \frac{AC^2}{4}\sqrt{3} = \frac{2k^2}{4}\sqrt{3} = \frac{k^2}{2}\sqrt{3}$.

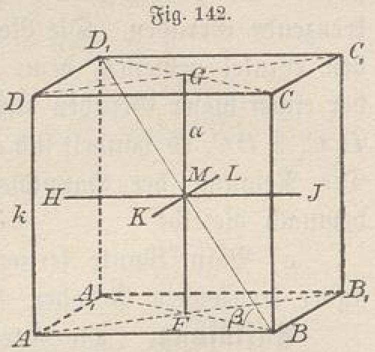
5) Die Hauptdiagonalschnitte A_1BCD_1 und AB_1C_1D (Fig. 142) schneiden sich in der Mittellinie FG des Würfels. Die beiden anderen Paare von Schnittflächen geben die Mittellinien HJ und KL.

Je zwei der Geraden FG, HJ und KL bestimmen eine Ebene, die den Würfel in kongruente Teile zerlegt. Diese Ebenen heißen die Mittelschnitte des Würfels. Der Punkt M, der diesen drei Ebenen gemeinschaftlich ist, ist zugleich sämtlichen Hauptdiagonalschnitten gemein, in ihm schneiden sich sowohl die Mittellinien FG, HJ, KL, als auch die vier Hauptdiagonalen AC_1, BD_1, B_1D und A_1C. M

*) Über den Würfel, die Kubikzahlen, die Raum- und Gewichtsmaße, die Flüssigkeitsmaße, das spezifische Gewicht, über die Urmaße und über numerische Aufgaben vgl. Vorkursus § 75 bis § 79. Man beachte besonders die dort unter 78e) gegebene Rechenregel.

heißt der Mittelpunkt des Würfels. Es ist gleichweit von allen Ecken, gleichweit von allen Kanten, gleichweit von allen Flächen des Würfels entfernt. Er ist also der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, deren Radius $\varrho = \frac{k}{2}$ ist, und zugleich der Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel, deren Radius $\frac{1}{2} B D_1$ oder $r = \frac{k}{2}\sqrt{3}$ ist. Er ist auch der Mittelpunkt einer Kugel, die jede Würfelkante in ihrer Mitte berührt. In der Kristallographie nennt man die drei Mittellinien FG, HJ und KL das Achsenkreuz des Würfels.

Fig. 142.



6) **Aufgaben.** a) Wie groß sind die Kanten k, die Oberfläche O, der Inhalt I eines Würfels und der Radius r der umbeschriebenen Kugel, wenn der Radius ϱ der einbeschriebenen gegeben ist?

b) Wie groß sind k, O, I und ϱ, wenn r gegeben ist?

c) Einer Kugel mit Radius r sei ein Würfel um- und ein anderer einbeschrieben. Wie groß ist der Unterschied der Kanten, der Oberflächen, der Inhalte beider Würfel?

d) Wie groß ist der Radius r, wenn irgend eine der genannten Differenzen gegeben ist?

e) Welche Neigung hat jede Hauptdiagonale des auf horizontaler Basis stehenden Würfels?

Auflösung. In Fig. 142 ist $\tan\beta = \frac{A_1 D_1}{B A_1} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{0{,}5}$; $\lg 0{,}5 = 19{,}698\,97 - 20$, oder $\lg\sqrt{0{,}5} = 9{,}849\,49 - 10$, also $\beta = 35^0\,15'\,50''$. Man nennt diesen Winkel den Neigungswinkel der Hauptdiagonale gegen die Grundfläche. Der Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, wird stets in derjenigen Ebene gemessen, die durch die Gerade geht und auf der ersteren Ebene senkrecht steht, also in der projizierenden Ebene. Es handelt sich also um den Winkel zwischen den Geraden und ihrer Projektion auf die Ebene.

Jede Hauptdiagonale des Würfels bildet mit jeder der Würfelflächen den Winkel $35^0\,15'\,50''$.

f) Welchen Winkel bildet jede Hauptdiagonale des Würfels mit den von ihr getroffenen Kanten?

Auflösung. Fig. 142 zeigt, daß es sich um den Komplementwinkel des vorigen handelt, also um $\beta_1 = 54^0\,44'\,10''$, für den $\tan\beta_1 = \sqrt{2}$ ist.

Bemerkung. Man könnte auch nach der Neigung fragen, die eine Hauptdiagonale gegen Würfelkanten hat, mit denen sie sich nicht trifft. So sind z. B. die Diagonale BD_1 und die Kante D einander kreuzende Geraden. Die Neigung der beiden gegeneinander wird durch den Winkel gemessen, denn man erhält, wenn man durch einen Punkt der einen dieser Geraden eine Parallele zur anderen legt. So ist z. B. $D_1C_1 \parallel DC$, es handelt sich also um den Winkel $BD_1C_1 = 54^0 44' 10''$. Die Neigung der Hauptdiagonalen gegen sämtliche Würfelkanten ist demnach dieselbe.

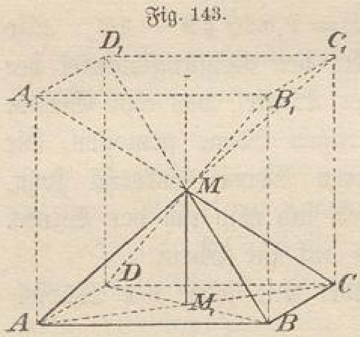
g) Man könnte ferner nach der kleinsten Entfernung der einander kreuzenden Geraden D und BD_1 voneinander fragen.

Auflösung. Die Gerade DC ist parallel zu jeder durch D_1C_1 gelegten Ebene, also auch parallel zu der durch D_1C_1 und BD_1 gelegten Ebene BC_1D_1A, die unter 45^0 gegen die Horizontalebene geneigt ist. Von dieser Ebene hat DC überall die Entfernung $CJ = DH = k\sqrt{\frac{1}{2}}$. Verbindet man M mit dem Halbierungspunkte von DC, so erhält man den kleinsten Abstand der Geraden DC und BD_1 voneinander, d. h. wiederum $k\sqrt{\frac{1}{2}}$. Diese Verbindungslinie steht nämlich auf beiden Geraden senkrecht, was bei keiner zweiten Verbindungslinie ihrer Punkte stattfindet. Jede andere Verbindungslinie ist also länger.

In ähnlicher Weise bestimmt man allgemein für zwei einander kreuzende Geraden das gemeinschaftliche Lot und die kürzeste Entfernung beider voneinander.

h) In Fig. 143 sind die vier Diagonalen eines Würfels gezeichnet, welche eine senkrechte Pyramide von der quadratischen Grundfläche $ABCD$ und der Spitze M bestimmen. Der Würfel läßt sich in sechs solche Pyramiden zerlegen; ist also a seine Kante, so hat jede dieser Pyramiden den Inhalt $\frac{a^3}{6}$. Dafür kann man schreiben $\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$, wenn man die Pyramidenhöhe $\frac{a}{2} = h$ setzt. Setzt man noch die Grundfläche $a^2 = F$, so ist der Inhalt dieser Pyramide $J = \frac{1}{3}Fh$, d. h. der dritte Teil des Produkts aus Grundfläche und Höhe. (Diese Formel wird sich als für alle Pyramiden und Kegel gültig herausstellen.)

Fig. 143.



i) **Aufgabe.** Das Flächennetz des Würfels zu zeichnen und sein Kartonmodell anzufertigen.

Das Netz ist in Fig. 144 dargestellt und bedarf keiner Erläuterung (Vgl. Vorkursus § 75.)

k) Den Würfel von der Kante $c = (a + b)$ gemäß der Gleichung

$$c^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

in Würfel von den Kanten a und b, in drei quadratische Säulen von der Grundfläche a^2 und der Höhe b, und in drei quadratische Säulen

Fig. 144.

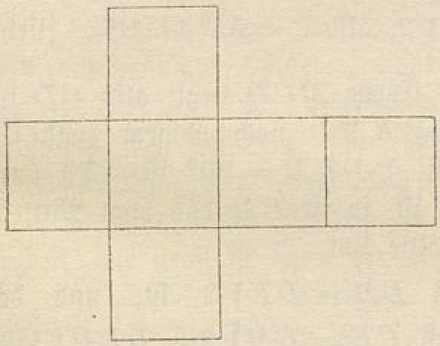
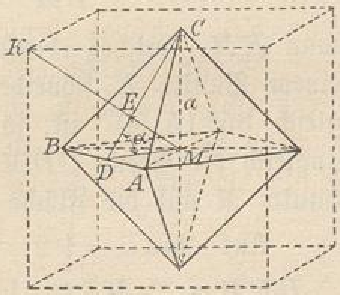


Fig. 145.



von der Grundfläche b^2 und der Höhe a zu zerlegen. (Ein genaues Schrägbild wird gefordert.)

l) Die Kante eines Würfels sei $c = a - b$. Es soll stereometrisch gezeigt werden, daß

$$c^3 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ist. (Ein genaues Schrägbild wird gefordert.)

Zu beiden Aufgaben vgl. Vorkursus § 93.

Bemerkung. In der Mineralogie tritt der Würfel auf als Kristallform für Steinsalz, Flußspat, Silber, Gold, Bleiglanz, Schwefelkies usw.

7) **Aufgabe.** Das regelmäßige Achtflach (Oktaeder) aus dem Würfel abzuleiten.

Auflösung. Die Mitten der Würfelflächen sind die Ecken eines regelmäßigen Achtflachs, welches ihm einbeschrieben ist. Dieses kann also leicht gezeichnet und berechnet werden. In Fig. 145 ist die Zeichnung ausgeführt. Ist a die Länge jeder Halbachse, so ist $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $BC = a\sqrt{2}$. Dies ist die Länge jeder der 12 Kanten der Körpers. Die 8 Flächen sind demnach gleichseitige Dreiecke. Es handelt sich also um das regelmäßige Oktaeder oder Achtflach. Jede Fläche des Oktaeders ist, wenn man die Oktaederkante mit k bezeichnet, $F = \frac{k^2}{4}\sqrt{3}$, die gesamte Oberfläche also

$O = 2k^2\sqrt{3} = 4a^2\sqrt{3}$. Der körperliche Inhalt wird erst später berechnet.

In der Stellung der Figur ist die Neigung jeder schrägen Kante gleich 45^0. Jede Kante bildet mit den drei mit ihr zusammenstoßenden Kanten zwei Winkel von 60^0 und einen von 90^0.

Die Neigung der Fläche ABC mißt man mit Hilfe der Mittellinie DC und der Geraden DM, da beide auf der Schnittkante AB der Fläche ABC und der Horizontalebene ABM senkrecht stehen. Dabei ist $\tan\alpha = \frac{MC}{DM} = \frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$, also $\alpha = 54^0\,44'\,10''$. Zieht man KM, welches ebenfalls in der Ebene MCD liegt, also CD in einem Punkte E schneidet, wobei $\sphericalangle KMD$ nach obigem (vgl. 6) gleich $35^0\,15'\,50''$ ist, so folgt, daß $\sphericalangle DEM = 90^0$ ist. Da nun zugleich die Ebene $CDM \perp ABC$ ist, so ist EM das vom Mittelpunkte M auf die Fläche ABC gefällte Lot.

Aus $\tan\alpha = \sqrt{2}$ folgt, daß $EM = DE\sqrt{2}$ ist, und da $\triangle DEM \sim \triangle MEC$, so folgt, daß $CE = EM\sqrt{2} = DE\sqrt{2}\sqrt{2} = 2DE$ ist. Demnach ist E der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC. Da $DC = \frac{k}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, also $DE = \frac{DC}{3} = a\sqrt{\frac{1}{6}}$ ist, so folgt $EM = DE\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dies gilt für alle Flächen des Oktaeders. Folglich: Dem regelmäßigen Oktaeder läßt sich eine Kugel einbeschreiben, deren Radius $\varrho = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist. Ebenso läßt sich ihm eine Kugel vom Radius $r = a$ umbeschreiben.

Je zwei mit den Kanten aneinander stoßende Oktaederflächen bilden einen Winkel von der Größe $2\alpha = 109^0\,28'\,20''$, je zwei nur in einer Ecke zusammenstoßende bilden einen Winkel $180^0 - 2\alpha = 70^0\,31'\,40''$. Man achte auf folgende Beziehungen:

Weil der Würfel 6 Flächen hat, besitzt das Oktaeder 6 Ecken,
" " " 8 Ecken " " " " 8 Flächen,
" " " 12 Kanten " " " " 12 Kanten,

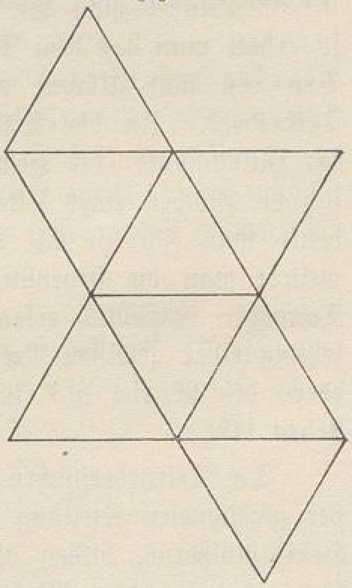
denn jeder dreikantigen Ecke des Würfels liegt eine dreikantige Fläche des Oktaeders gegenüber, jeder vierkantigen Ecke des Oktaeders entspricht eine vierkantige Fläche des Würfels.

Je zwei einander gegenüberliegende Kanten bezw. Flächen der Oktaeders sind parallel.

Das Flächennetz des Oktaeders ist in Fig. 146 dargestellt. Die gleichseitigen Dreiecke sind dabei so angeordnet, daß in jeder Ecke des Körpers vier von ihnen zusammenstoßen.

Bemerkung. Das regelmäßige Oktaeder ist die Kristallform für Magneteisen und einige andere Eisenerze, für Rotkupfer, Schwefelkies, Bleiglanz, Silberglanz, Platin, Alaun, Gold usw.

Fig. 146.



8) **Aufgaben.** a) Bei einem regelmäßigen Oktaeder sei eine der Größen a, k, O, r, ϱ gegeben. Die anderen sollen aus ihr berechnet werden.

b) Einer Kugel vom Radius r sei ein regelmäßiges Oktaeder einbeschrieben und das entsprechende umbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Halbachsen, ihrer Kanten, ihrer Oberflächen?

c) Eine dieser Differenzen sei gegeben, wie groß ist dann der Radius r?

d) Suche zu beweisen, daß die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Oktaeders die Ecken des einbeschriebenen Würfels sind, zeichne die entsprechende Figur und berechne die neue Würfelkante aus der Halbachse des Oktaeders.

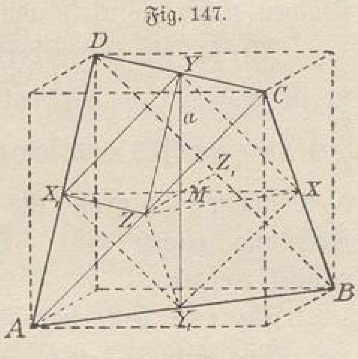
e) Einem Würfel sei ein Oktaeder, diesem ein Würfel eingezeichnet. Wie verhalten sich die Kanten der beiden Würfel?

f) Zeichne den ebenflächigen Körper, dessen Ecken die Halbierungspunkte der Oktaederkanten sind, und beschreibe und berechne diesen.

g) Löse dieselbe Aufgabe für die Halbierungspunkte der Kanten des Würfels. (Zu f) und g) vgl. Fig. 172.)

9) **Aufgabe.** Das regelmäßige Vierflach (Tetraeder) aus dem Würfel abzuleiten.

Fig. 147.



Auflösung. In Fig. 147 sind am Würfel vier dreiseitige Diagonalschnitte geführt, welche die gleichseitigen Dreiecke ABC, ACD, ADB und BCD gegeben haben. Diese begrenzen das gesuchte Vierflach oder Tetraeder $ABCD$. Die Zeichnung des so aufgestellten Körpers macht also keine Schwierigkeit. Daß seine Flächen gleichseitige Dreiecke von derselben Größe sind, reicht schon hin, ihn als einen regelmäßigen Körper erscheinen zu lassen. Man kann ihn als die einzige wirklich regelmäßige Pyramide betrachten.

Verbindet man die Mitten der Gegenkanten dieses Vierflachs, so schneiden einander die Verbindungslinien in einem Punkte und bilden wieder das Achsenkreuz XX_1, YY_1, ZZ_1 des Körpers.

Verbindet man die Mitten der Kanten auch in anderer Weise, so erhält man das dem Tetraeder einbeschriebene regelmäßige Achtflach. Von den acht Flächen des letzteren fallen vier in die Flächen des Tetraeders. In der Kristallographie wird daher das Tetraeder als der Halbflächner (die Hemiedrie) des Oktaeders bezeichnet. Denkt man sich die Flächen eines Oktaeders abwechselnd mit + und — bezeichnet, denkt man sich die mit dem Minuszeichen versehenen weg, und erweitert man die stehenbleibenden bis zum Schließen, so entsteht ein Tetraeder. (Endlich erkennt man an der Figur noch, daß die Aufsetzung einer gewissen Art von Pyramiden auf die Flächen des Tetraeders den Würfel als einen Sonderfall des Pyramidentetraeders entstehen läßt.)

Die Tetraederflächen haben demnach, wie die Oktaederflächen, in der gezeichneten Stellung sämtlich die Neigung $54^0\,44'\,10''$ gegen die Horizontalebene, bilden also, wie an der Kante CD gezeigt werden kann, miteinander Winkel von der Größe $180^0 - 2(54^0\,44'\,10'') = 70^0\,31'\,40''$. Die einbeschriebene Kugel stimmt mit der des Oktaeders überein, ist also vom Radius $\varrho = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, wenn a die Länge der Halbachse MX ist. Die umbeschriebene Kugel dagegen hat den Radius $r = MD = a\sqrt{3}$, stimmt also mit der des Würfels überein. Da die Hauptdiagonalen des Würfels sich in einem Punkte M schneiden, und da jede von ihnen eine der Tetraederflächen senkrecht durchschneidet, so treffen sich die vier Höhen des Tetraeders in einem Punkte M, und von jeder ist durch diesen der vierte Teil abgeschnitten, weil $r = 3\varrho$ ist. Jede Tetraederfläche wird von den Kanten der übrigen Flächen unter Winkeln von der Größe $54^0\,44'\,10''$ geschnitten.

Ist k_1 die Tetraederkante, k die Würfelkante, a die Halbachse, so ist $k_1^2 = 2k^2 = 8a^2$, also $k_1 = 2a\sqrt{2}$, folglich jede Tetraederfläche $\frac{k_1^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$ und die gesamte Oberfläche des Körpers $O = 8a^2\sqrt{3}$, d. h. doppelt so groß, als die Oktaederoberfläche, was sich auch ohne Rechnung zeigen läßt. Der körperliche Inhalt soll erst später berechnet werden.

Fig. 148 stellt das Flächennetz des Tetraeders dar.

Die Zahl der Ecken des Körpers ist 4, die der Kanten 6. Die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Tetraeders bilden wiederum ein regelmäßiges Tetraeder. Je zwei Gegenkanten des Tetraeders kreuzen einander senkrecht. Legt man durch jede Kante eine Ebene parallel zur Gegenkante, so erhält man den umbeschriebenen Würfel (Fig. 148).

In der Mineralogie erscheint das Tetraeder mehrfach als Kristallform, z. B. beim Fahlerz, bei der Zinkblende usw.

[**Aufgabe.** Die beiden Tetraeder, die sich dem Würfel einzeichnen lassen, in ihrer gegenseitigen Durchdringung darzustellen.

Auflösung. In Fig. 149 ist die Aufgabe gelöst, wobei zunächst alle Quadratdiagonalen des Würfels gezogen sind. Von je zwei sich

Fig. 148.

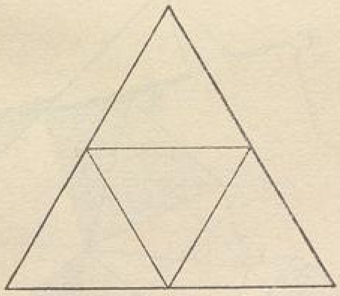
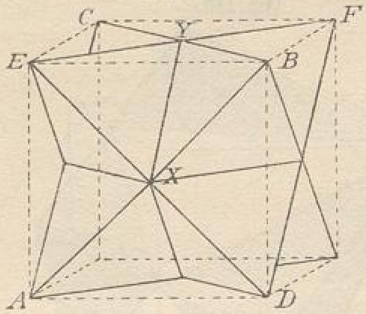


Fig. 149.



schneidenden Dreiecken, wie z. B. ABC und DEF, sind dabei je zwei Schnittpunkte, z. B. X und Y, zu suchen und durch eine Schnittlinie zu verbinden.*)]

10) **Aufgaben.** a) Bei einem regelmäßigen Tetraeder sei eine der Größen a, k, O, r, ϱ oder h (Höhe des Tetraeders $= r + \varrho$) gegeben. Die übrigen sollen daraus bestimmt werden.

b) Einer Kugel vom Radius r sei ein regelmäßiges Tetraeder um-, ein anderes einbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Kanten, ihrer Halbachsen, ihrer Oberflächen?

c) Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante k_1 sei ein anderes einbeschrieben, dessen Ecken mit den Flächenmittelpunkten des anderen zusammenfallen. Die Kante des zweiten Tetraeders soll berechnet werden.

d) Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante k_1 sei ein Würfel umbeschrieben. Die Kante desselben soll berechnet werden.

*) Es empfiehlt sich, die sichtbaren Flächenteile jedes Tetraeders mit leichten Farbentönen so anzulegen, daß zusammengehörige Stücke sich deutlich hervorheben. Das gegenseitige Durchdringen tritt dabei klar hervor, und der Schüler übt sich darin, die ebene Zeichnung räumlich (plastisch) zu sehen.

e) Unter welchem Winkel schneiden sich die Flächen der beiden sich durchdringenden regelmäßigen Tetraeder der Fig. 149?

f) Zwei gleiche Würfel sollen eine Diagonale gemein haben und unter 60^0 gegeneinander gedreht sein. Wie sieht die gegenseitige Durchdringung aus?

(Fig. 150 stellt die Zeichnung dar, in der gewisse Würfelkanten halbiert sind. Der eine Würfel ist schraffiert, der andere weiß gelassen.)

g) Bei zwei gleichen Oktaedern sollen zwei Gegenflächen in dieselben Ebenen fallen, und die Körper sollen um 60^0 gegeneinander

Fig. 150.

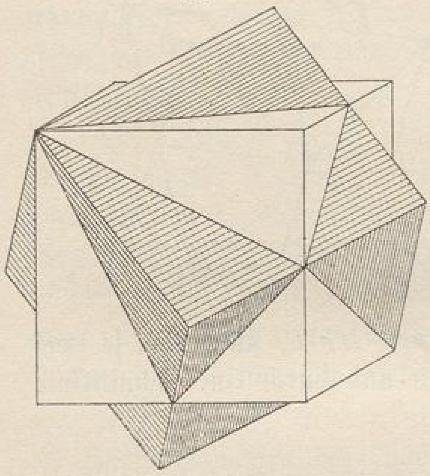
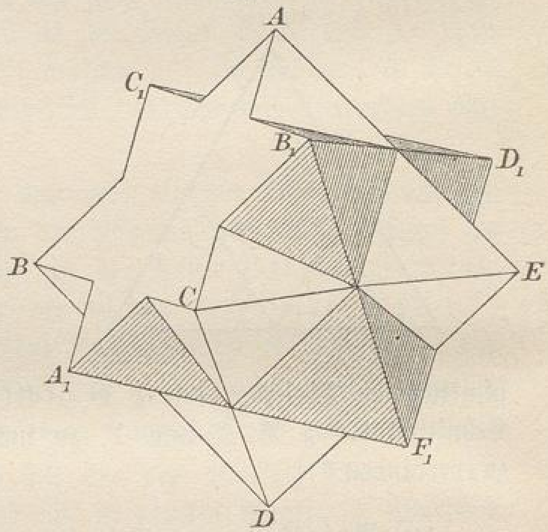


Fig. 151.



gedreht sein, sodaß jene beiden Flächen als regelmäßige Sechsecksterne erscheinen. Wie sieht die gegenseitige Durchdringung aus?

(Fig. 151 stellt die Zeichnung dar. Der eine Körper ist schraffiert. Nur diejenigen Dreiecke sind unschraffiert, die den Sechseckstern vollenden.)

Zu beiden Aufgaben vgl. den Vorkursus.

[11) **Aufgabe.** Auf die Flächen eines Würfels Pyramiden von gegebener Höhe so aufzusetzen, daß ein Pyramidenwürfel entsteht.

In Fig. 152 ist zunächst der gegebene Würfel gezeichnet und der Mittelpunkt jeder Fläche bestimmt. Dort sind auf jeder Fläche Lote von der gegebenen Länge BC errichtet, das nach vorn gerichtete Lot DE natürlich in der gewählten Verkürzung (z. B. in $\frac{1}{3}$ der Länge) gezeichnet. Die Endpunkte der Lote sind mit den Würfelecken verbunden. Aus der Würfelkante k und der Pyramidenhöhe h lassen sich

Kanten, Oberfläche, Winkel, Radius ϱ der einbeschriebenen Kugel usw. des Körpers berechnen. (Eine umbeschriebene Kugel hat der Körper nur in einem Sonderfalle. In welchem?)

Das Netz des Körpers ist leicht zu zeichnen. Hier wird angenommen, daß der Körper überall konvex ist, daß also die Pyramiden nicht so hoch sind, daß einspringende Winkel entstehen. Der Grenzfall soll der nachstehende sein. (Fig. 153.)

Bemerkung. Der Pyramidenwürfel ist als Kristallform in der Mineralogie von Bedeutung. Er wird hier besprochen, weil sich aus ihm andere Körperformen leicht ableiten lassen. Macht man die

Fig. 152.

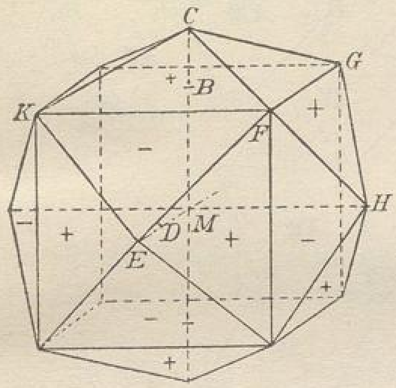
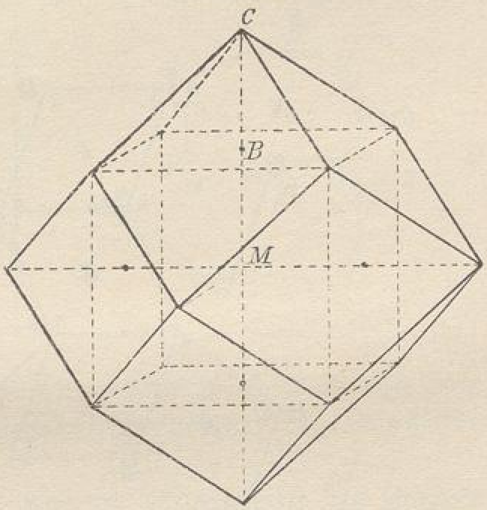


Fig. 153.

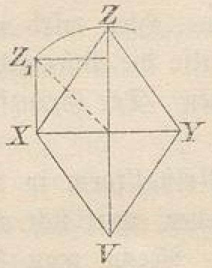


Pyramidenhöhe gleich der halben Würfelkante, so erhalten die Pyramidenflächen die Neigung 45^0 gegen die Würfelflächen, und die Kante zwischen je zwei benachbarten fällt weg, sodaß aus 24 Dreiecken 12 Rhomben entstehen. Fig. 153 stellt diesen besonderen Fall des Pyramidenwürfels, das Rhombenzwölfflach oder Rhombendodekaeder, dar. (Dies ist die häufigste Kristallform des Granats, der Körper wird daher auch als Granatoeder*) bezeichnet.) Aus der Würfelkante k lassen sich die Kanten, die Oberfläche, die Winkel des Körpers leicht berechnen.]

Da die kleineren Diagonalen der Rhomben zugleich Würfelkanten sind, die größeren dagegen die Länge der zugehörigen Quadratdiagonalen haben, so sind die Rhomben leicht zu zeichnen. In Fig. 154 ist das

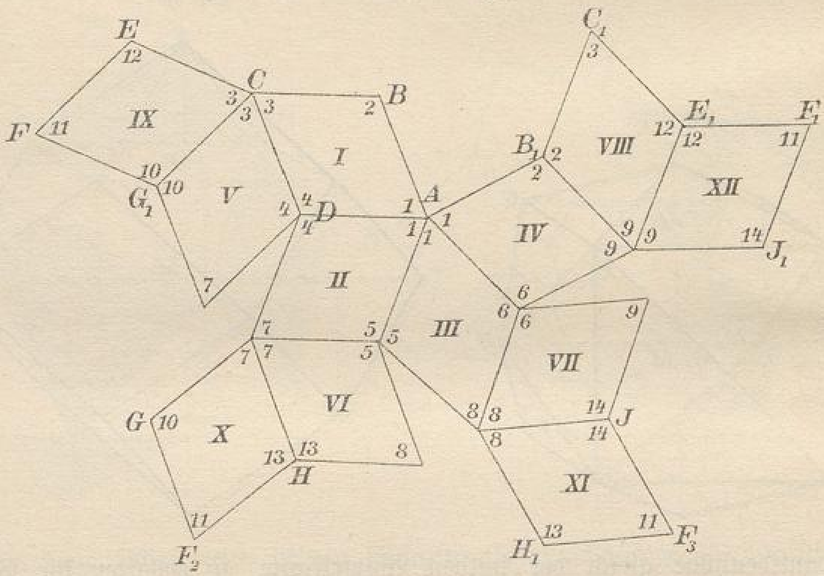
*) Das Wort Granatoeder ist sprachlich als Mißbildung zu betrachten, läßt sich aber in der Mineralogie kaum vermeiden.

Flächennetz des Rhombenzwölfflachs konstruiert. Die Zahlen in den Winkeln der Flächen geben an, welche Ecken zusammenfallen, wenn man das Kartonmodell wirklich bildet.



12) a) Bezeichnet man die Flächen des Pyramidenwürfels abwechselnd mit + und —, wie es in Fig. 152 geschehen ist, läßt man die mit — bezeichneten Flächen wegfallen, und erweitert man die übrig bleibenden so weit, daß der Körper wieder geschlossen ist, so entsteht ein im all-

Fig. 154.



gemeinen von unregelmäßigen, aber symmetrischen Fünfecken begrenztes Zwölfflach, das **Pentagondodekaeder**. Dieses ist also der Halbflächner oder die Hemiedrie des Pyramidenwürfels. Aus Fig. 152 leitet sich die Konstruktion folgendermaßen ab: Je zwei stehenbleibende Pyramidenflächen bilden in ihrer Erweiterung ein Dach, dessen Firstlinie zu den Grundkanten parallel ist. Eine solche Firste ist durch C parallel zu KF zu legen. Rechts reicht sie bis zum Schnitte mit der durch H gehenden Mittellinie der Fläche FGH, wodurch die halbe Länge der Firstlinie gegeben ist. Eine solche von derselben Länge ist senkrecht durch E zu legen usw. Die Endpunkte dieser sechs Dachfirsten geben mit den Ecken des Würfels zusammen die $12 + 8 = 20$ Ecken des gesuchten Körpers, der in einem Sonderfalle durch Fig. 155 veranschaulicht werde.

Das nicht von regelmäßigen, sondern von symmetrischen Fünfecken begrenzte Pentagondodekaeder kommt in der Mineralogie als Kristallform des Schwefelkieses oder Pyrits vor und wird dort als Pyritoeder bezeichnet (was als sprachliche Mißbildung zu betrachten ist.)

b) Jetzt wird folgendes behauptet: Macht man die Pyramiden des Pyramidenwürfels so hoch, daß die von der Mitte des Körpers bis zu jeder Pyramidenspitze gehende Gerade durch

Fig. 155.

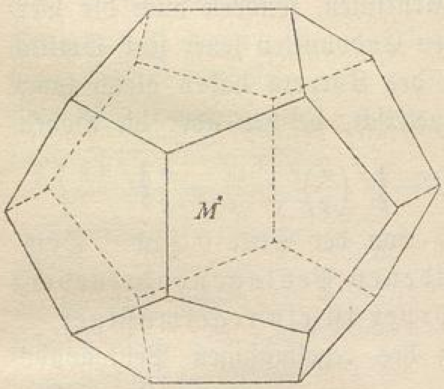
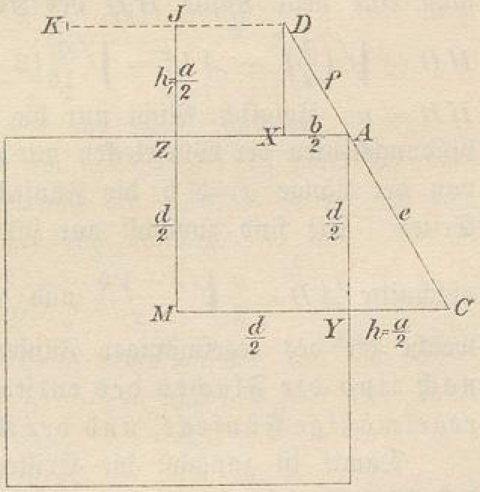


Fig. 156.



die Würfelfläche stetig geteilt ist, dann wird das aus dem Körper hervorgehende Pentagondodekaeder ein regelmäßiger Körper.

In Fig. 156 ist dargestellt, was im Mittelschnitte des Körpers bei der vorigen Konstruktion für den Fall vor sich geht, daß MJ und MC in Z bezw. in Y stetig geteilt sind. Durch J ist die Firstlinie KD bis zum Schnitte mit CA gelegt, sodaß auch CD in A stetig geteilt ist, denn J, Z, M sind horizontal auf CD projiziert. Fällt man DX als Lot auf ZA, so verhalten sich auch XA und YC wie Teile einer stetig geteilten Linie (Ähnlichkeit der Dreiecke), und beide zusammen geben den zu YC gehörigen größeren Teil MY der stetig geteilten Geraden MC, sodaß $ZX = YC$ ist. Demnach ist $ZXDJ$ ein Quadrat, und die Firstlinie $KD = a$ ist doppelt so lang als die Pyramidenhöhe $h = \frac{a}{2}$. (Vgl. Geometrie, 302, Bemerkung.)

Aus der stetigen Teilung von MJ folgt, wenn man $MZ = \frac{d}{2}$ setzt, $a:d = d:(a+d)$, also $d = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$, oder, da nur das positive Wurzelzeichen brauchbar ist, $d = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$ als Länge der Würfelkante.

Demnach ist $XA = \frac{d}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}(\sqrt{5}+1) - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}(\sqrt{5}-1)$, was nach dem Gesetz des goldenen Schnittes auch ohne Rechnung folgt. Demnach ist $AD = \sqrt{DX^2 + XA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{a}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$ Man denke sich nun in A auf der Zeichnungsebene ein Lot von der Länge $\frac{d}{2}$ errichtet und dessen Endpunkt H mit D verbunden, dann hat man eine neue Kante HD des Körpers. Diese ist von der Länge $HD = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16}(6 + 2\sqrt{5}) + \frac{a^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})}$ oder $HD = a$. Folglich: Nicht nur die Firstlinien, sondern auch die Verbindungslinien der Würfelecken mit den Endpunkten jener sind sämtlich von der Länge a, d. h. die Fünfecke des Körpers haben gleich lange Seiten. Sie sind zunächst nur symmetrisch, besitzen aber die Höhenabschnitte $AD = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ und $AC = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, welche die des regelmäßigen Fünfecks von der Seite a sind. Demnach sind die Flächen des entstandenen Pentagondodekaeders regelmäßige Fünfecke, und der Körper ist ein regelmäßiger.

Damit ist zunächst die Existenz des regelmäßigen Pentagondodekaeders bewiesen.

c) Nach Fig. 157 kann man es folgendermaßen herstellen:

Man nehme einen Würfel, dessen Kante gleich der Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks ist. Das Fünfeck lege man so an eine

Fig. 157.

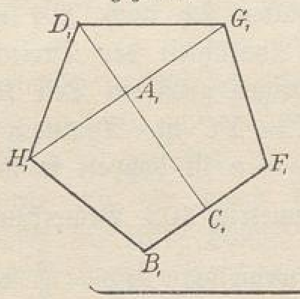
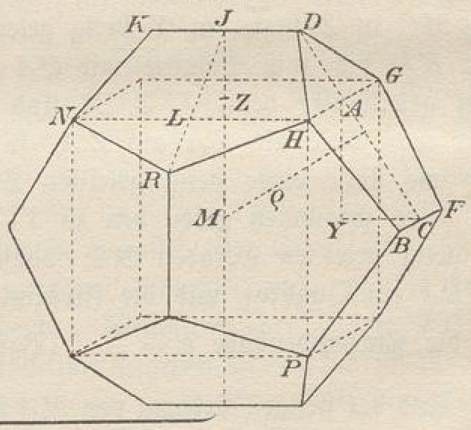


Fig. 158.

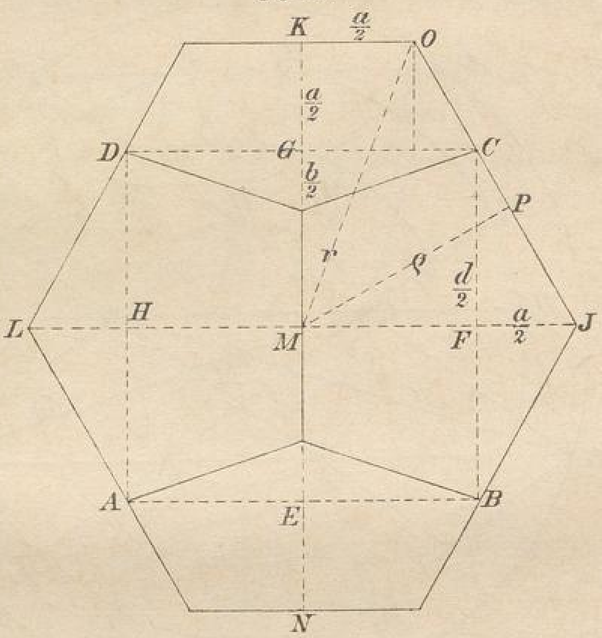


Würfelkante an, daß die Ecke D genau so weit von der zugehörigen Würfelfläche entfernt ist, wie die Grundlinie BF von der zu dieser gehörigen (wobei die Entferung gleich der halben Fünfeckskante ist).

Macht man dasselbe im ganzen mit zwölf kongruenten Fünfecken, so erhält man das regelmäßige Pentagondodekaeder.

d) Eine zweite Herstellung ist folgende. Man konstruiere ein Achsenkreuz, teile eine der Halbachsen nach dem goldenen Schnitt so, daß der größere Teil von der Mitte ausgeht, errichte im Endpunkte jeder Halbachse ein Lot, dessen Richtung den besprochenen Firstlinien entspricht und markiere die Eckpunkte des zum verkleinerten Achsenkreuze gehörigen Würfels (z. B. durch dessen Diagonalen), dann hat man alle Ecken des Körpers, die nur noch geradlinig zu verbinden sind.

Fig. 159.



e) Die Zeichnung in Parallelperspektive zu 30^0 und $\frac{1}{3}$ Verkürzung ist in Fig. 158 dargestellt und geht am bequemsten vom Würfel aus, dessen Achsenkreuz zu zeichnen und in angegebener Weise zu verlängern ist.

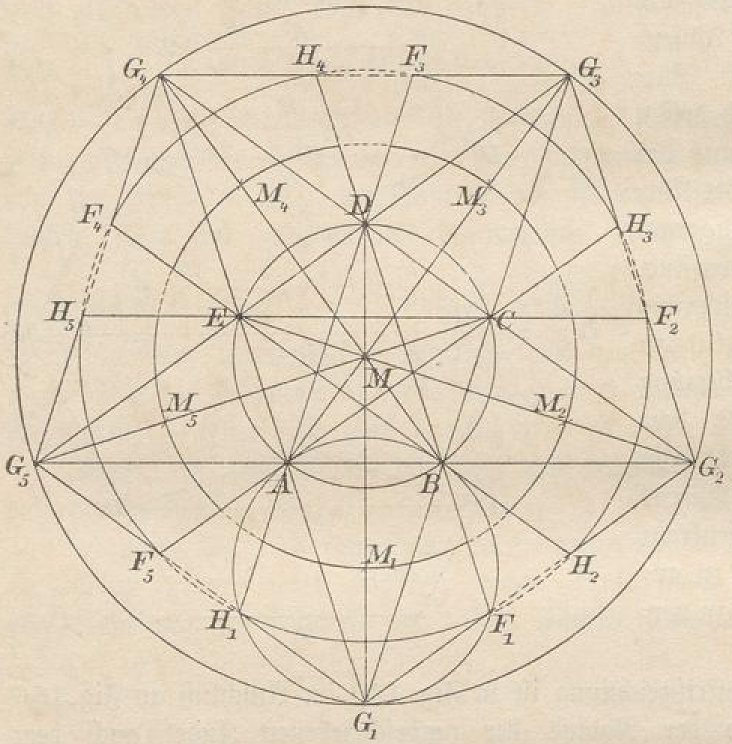
f) Eine Aufrißzeichnung ist in Fig. 159 im Anschluß an Fig. 156 dargestellt. Da der Radius der umbeschriebenen Kugel auch dem Würfel angehört, ist $r = \frac{d}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{4}(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}$. Das Fünfeck mit Seite a hat als Radius des umbeschriebenen Kreises $r_1 = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Demnach ist der Radius der dem Körper einbeschriebenen Kugel zu berechnen aus $\varrho^2 = MO^2 - OP^2 = r^2 - r_1^2$ als $\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

g) Die Hälfte des Flächennetzes ist in Fig. 160 gezeichnet.*) Auch in dieser Figur spielt die Teilung nach dem goldenen Schnitte eine bedeutende Rolle. Man achte auf die Fünfecksterne (Pentagramme, d. h. Fünfecke, die erst nach zweimaligem Umgange schließen) im mittelsten Fünfeck und im großen Fünfeck.

*) Beschreibe die Entstehung dieser Figur. (Vgl. Vorkursus § 100.)

h) Denkt man sich jedes der fünf äußeren Fünfecke der Figur so weit um die Kante geklappt, die sie mit dem innersten Fünfeck gemein haben, bis ihre Seitenkanten sich paarweise treffen, so entsteht eine Art Schüssel als Hälfte der Oberfläche des Körpers. Während der entsprechenden Bewegung wandern die einzelnen Punkte auf Kreisen, deren Projektionen auf die Grundfläche gerade Linien sind.

Fig. 160.



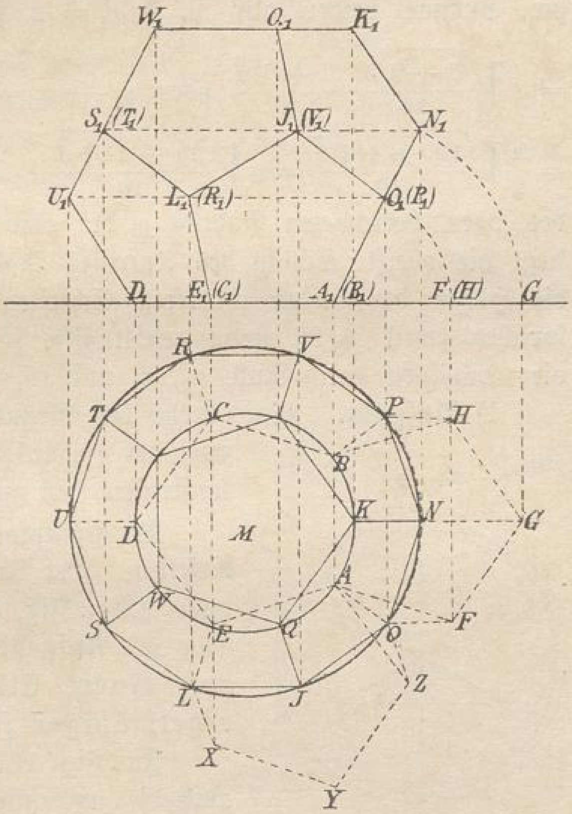
So wandert z. B. die Projektion von H_1 auf der Geraden H_1E, die von F_5 auf der Geraden F_5B. Wo H_1E und F_5B einander schneiden, da liegt die Projektion des den Punkten H_1 und F_5 entsprechenden Schüsselpunktes Z.*) Ebenso geben F_1 und H_1 einen symmetrisch zu Z liegenden Schüsselpunkt Z_1, wobei $ZZ_1 = H_1F_1$ und die Projektion der letzteren Linie in der neuen Lage ist. ZZ_1 ist die Diagonale des zweiten regelmäßigen Fünfecks mit horizontaler Grundlinie, welches sich in den Kreis M_1 legen läßt. AZ ist also die Seite des dem letzteren einbeschriebenem Zehnecks, also gleich $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, wenn der Radius gleich 1 gesetzt wird. Dann ist $MZ = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ der Radius des zweiten der konzentrischen Kreise. Auf ihm liegen die fünf Punkte Z der Schüssel und zugleich die Punkte M_1 bis M_5, denn auch MM_1 ist gleich $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Die erste Schüssel wird nämlich

*) Man schreibe Z in Fig. 160 ein. Es ergibt sich der eine Punkt, wo der um M_1 gelegte Kreis und der mit Radius MM_1 um M gelegte einander schneiden. Der zweite Schnittpunkt ist mit Z_1 zu bezeichnen.

von der zweiten noch fehlenden Schüssel so bedeckt, daß die Spitzen von deren seitlichen Fünfecken mit den Punkten Z zusammenfallen, während die sonstigen Randpunkte nach den Punkten M_1 bis M_5 fallen, denn die Projektionen beider Teile sind kongruent. Folglich bilden die Projektionen der Randpunkte jeder der beiden Schüsseln im Grundriß das regelmäßige Zehneck der Punkte M_1 bis M_5 und der zwischenliegenden Punkte Z auf dem Kreise mit Radius MM_1. Dies läßt sich auch durch Rechnung nachweisen.

i) Somit ist die Grundrißzeichnung der Fig. 161 bequem herzustellen. Man denke sich konzentrische Kreise mit den Radien $\varrho = 1$ und $r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, deren Radien sich also verhalten wie die Teile einer nach dem goldenen Schnitte geteilten Geraden, gezeichnet. In den inneren Kreis lege man zwei regelmäßige Fünfecke mit je einer senkrechten Seite so, daß ihre Ecken ein regelmäßiges Zehneck bilden. Durch die Ecken lege man die Fortsetzungen von Radien, die bis zum äußeren Kreise reichen und zeichne das dadurch bestimmte Zehneck fertig.

Fig. 161.



Man ziehe die Geraden, die sichtbar oben liegen sollen, kräftig aus und deute die anderen gestrichelt an.

k) Für die gezeichnete Lage ergibt sich die Aufrißzeichnung dadurch, daß man die Punkte des unteren Fünfecks nach der oberen Grundlinie projiziert, was dort Punkte A_1, (B_1), (C_1), D_1, E_1 gibt. Das Nachbarfünfeck gibt außerdem im Aufriß die Punkte F, G und (H). Beim Aufklappen bewegen sich F und (H), auch G auf Kreisen um A_1 so weit, bis die Punkte in die senkrechten Geraden OPO_1 bezw. NN_1

fallen. In die durch O_1 und N_1 gelegten Horizontalen fallen dann die übrigen Punkte der Wände beider Schüsseln, die also leicht nach oben zu projizieren sind. Die obere Schüssel erscheint als der unteren kongruent, der Abstand der beiden obersten Höhenschichten ist also gleich dem der beiden untersten. Auch die Punkte des oberen Fünfecks sind nun leicht noch oben zu projizieren.

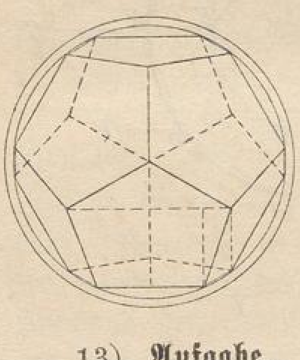
Die Aufrißzeichnung ist dieselbe, die in Fig. 159 gegeben war, nur ist die dortige Linie OJ jetzt horizontal gestellt worden.

[Denkt man sich den inneren Kreis einem Fünfeck von der Seite a umbeschrieben, dann ist der Radius $\varrho_1 = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{16}}$, der des äußeren Kreises ist das $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$-fache oder $r_1 = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, die Summe beider also $\varrho_1 + r_1 = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\left[1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ $= a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ oder $\varrho_1 + r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}(14+6\sqrt{5})}$ $= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{100+44\sqrt{5}}{10}} = a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$. Dies ist aber das doppelte des oben berechneten Radius ϱ der einbeschriebenen Kugel, folglich liegt die oberste Schicht des Aufrisses in der Höhe $r_1 + \varrho_1$, und da die Höhen der beiden mittleren Schichten der stetigen Teilung entsprechen (weil A_1N_1 stetig geteilt ist), so sind die Höhenlagen aller vier Schichten durch Null, ϱ_1, r_1 und $(r_1 + \varrho_1)$ gegeben.]

l) **Aufgabe.** Man drehe den Grundriß der Fig. 161 so, daß zwei der Zehnecksseiten senkrecht werden und konstruiere den zugehörigen Aufriß.

Die Höhenlagen der Aufrißpunkte bleiben dieselben. Der Aufriß selbst fällt symmetrisch aus. (Vgl. Fig. 171 a.)

Fig. 162.



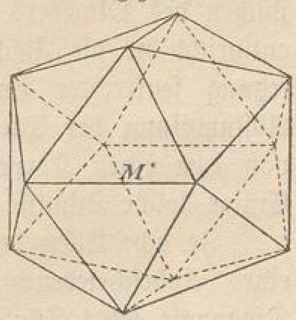
m) **Aufgabe.** Den Grundriß des auf einem Eckpunkte balancierenden regelmäßigen Zwölfflachs zu zeichnen.

In Fig. 162 ist die Aufgabe gelöst, auch die umbeschriebene Kugel mitgezeichnet.

13) **Aufgabe.** Man bestimme die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Zwölfflachs und untersuche das durch diese Eckpunkte bestimmte Polygon.

a) Je drei aneinander stoßende Flächen geben drei Mittelpunkte, die gleichweit von M entfernt sind und miteinander verbunden ein gleichseitiges Dreieck geben. Der entstehende Körper ist ein dem Zwölfflach einbeschriebener von zwanzig regelmäßigen Dreiecken begrenzter regelmäßiger Körper, bei dem je fünf Flächen zu einer Ecke gehören. Während das Zwölfflach 12 Flächen, 20 Ecken und 30 Kanten hat, hat der neue Körper 12 Ecken, 20 Flächen und 30 Kanten. Er heißt das regelmäßige Zwanzigflach oder Ikosaeder.

Fig. 163.

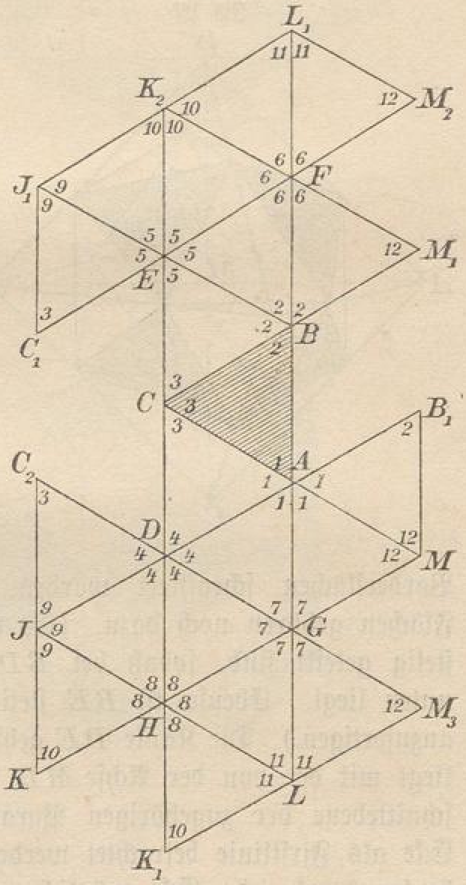


Die Mitten seiner Dreiecksflächen bilden ein ihm einbeschriebenes regelmäßiges Zwölfflach. In Fig. 163 ist es in der der Fig. 158 entsprechenden Lage gezeichnet.

b) Das Netz des regelmäßigen Zwanzigflachs zu zeichnen.

In Fig. 164 ist das Netz gezeichnet, wobei vom Dreiecke ABC ausgegangen ist. In die Winkel sind stets die Zahlen eingeschrieben, welche angeben, welche Ecken bei der Bildung des Modells zusammenfallen. (Im Vorkursus § 90 ist diese Angelegenheit eingehender erörtert worden.)

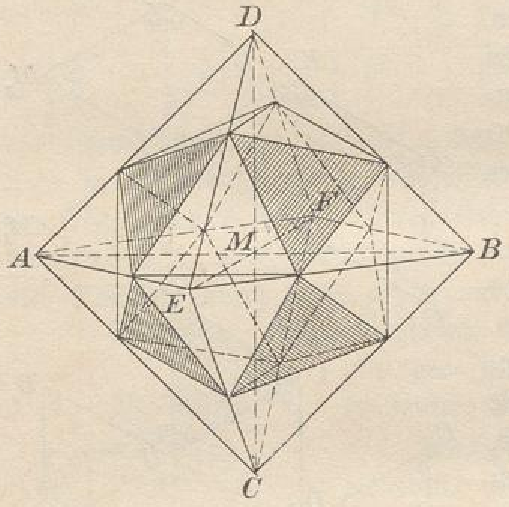
Fig. 164.



c) Die Ecken, die Flächen und die Kanten des Zwölfflachs hängen mit den Flächen bezw. Ecken und Kanten des Zwanzigflachs ebenso eng zusammen, wie die des Würfels und Oktaeders. Man nennt jedesmal den einen Körper den reziproken des anderen. Zwei Flächen des einen entsprechen zwei Eckpunkten des anderen, der Schnittlinie der ersteren entspricht die Verbindungslinie der letzteren. Denkt man sich den einen Körper als den einbeschriebenen des anderen, so entspricht jeder Geraden an dem einen eine sie rechtwinkelig kreuzende Gerade des anderen. (Dem Achsenkreuze des einen entsprechen Geraden, die in unendlicher Entferung liegen und jene Achsen rechtwinkelig kreuzen. Dies gilt von jeder durch den Mittelpunkt gehenden Geraden.) Der Verbindungslinie zweier Gegenecken des Oktaeders z. B. entspricht die Schnittlinie der zugehörigen parallelen Gegenflächen des Würfels. Der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten des Würfels entspricht die Schnittlinie der zugehörigen parallelen Grenzflächen des Oktaeders. Der durch die Ecken gehenden Kugel des einen entspricht die die Flächen berührende Kugel des anderen. Der Aufsetzung senkrechter Pyramiden auf den einen entspricht regelmäßige Abstumpfung der Ecken des anderen usw. So kommt es, daß man von dem einen Körper unmittelbar auf den anderen schließen kann. Einige solche Schlüsse sollen gezogen und nachträglich bewiesen werden.

Je acht Ecken des regelmäßigen Zwölfflachs ließen sich als Ecken eines einbeschriebenen Würfels betrachten. Da jedesmal nur eine Diagonale jedes Fünfecks als Würfelkante zur Geltung kam, so ließen sich dem Körper fünf Würfel einbeschreiben. Jedem Würfel aber ließen sich zwei Zwölfflache umbeschreiben, das der mit + bezeichneten Flächen des betreffenden Pyramidenwürfels und das der mit — bezeichneten Flächen. Beide Zwölfflache sind um 90^0 gegen einander gedreht. Folglich: Je acht Flächen des regelmäßigen Zwanzigflachs lassen sich als Flächen eines umbeschriebenen Achtflachs betrachten. In Fig. 165 sind die betreffenden Vorderflächen schraffiert worden, die vier entsprechenden hinteren Flächen gehören noch dazu. (Es wird sich zeigen, daß BD und ED stetig geteilt sind, sodaß bei BD der größere Teil oben, bei ED unten liegt. Ebenso ist BE stetig geteilt, die Zeichnung also leicht anzufertigen.) Die Kante DE geht durch eine Ecke des Ikosaeders und liegt mit der von der Achse MD halbierten Firstlinie in einer Hauptschnittebene der zugehörigen Pyramide. Da aber jede Kante dieser Ecke als Firstlinie betrachtet werden kann, sind fünf solcher Oktaederkanten durch jede Ecke möglich. Folglich lassen sich dem Zwanzigflach fünf Oktaeder umbeschreiben. Jedem Oktaeder lassen sich zwei Zwanzigflache einbeschreiben, die um 90^0 gegeneinander gedreht sind,

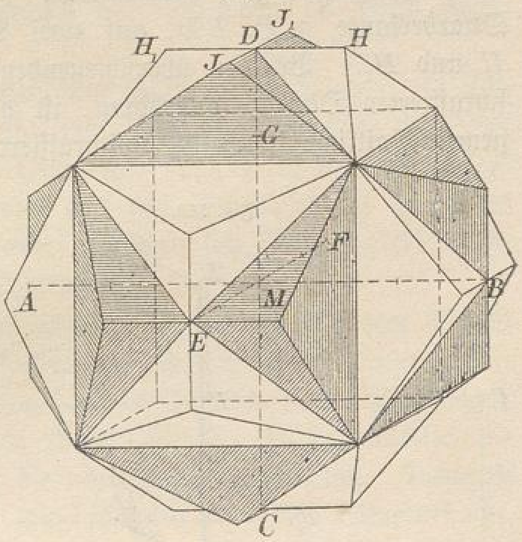
Fig. 165.



z. B. um die Achse CD. Unten sind die beiden Körper dargestellt. (Fig. 167).

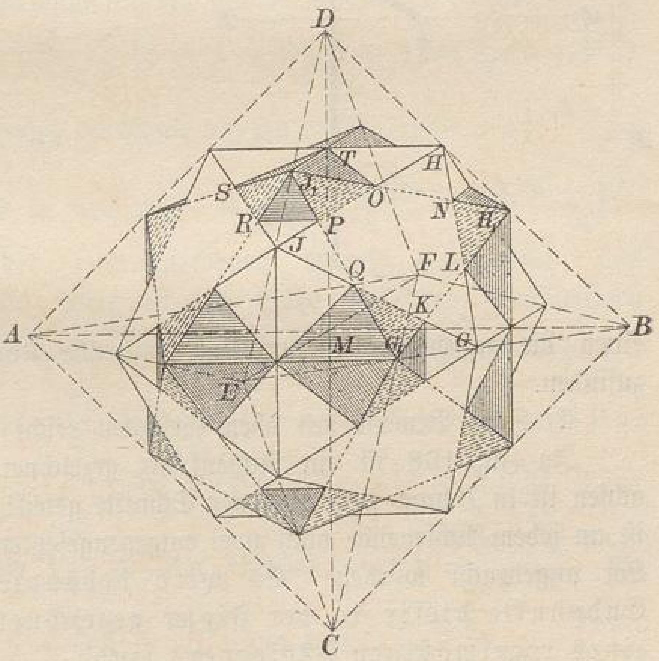
Die beiden demselben Würfel umbeschriebenen Zwölfflache haben einen Pyramidenwürfel gemein, bei dem die Verlängerung der Halbachsen einer stetigen Teilung entsprach. Folglich: Die beiden demselben Oktaeder angehörigen Ikosaeder sind demselben abgestumpften Oktaeder einbeschrieben, bei dem die Abstumpfung einer stetigen Teilung der Halbachse entspricht. Der Würfel und die beiden ihm umbeschriebenen Zwölfflache haben dieselbe umbeschriebene Kugel, der Pyramidenwürfel und die beiden Zwölfflache haben dieselbe einbeschriebene Kugel. Folglich:

Fig. 166.



Das Oktaeder und die beiden ihm einbeschriebenen Zwanzigflache haben dieselbe einbeschriebene Kugel; das abgestumpfte Oktaeder und die beiden Zwanzigflache haben dieselbe umbeschriebene Kugel.

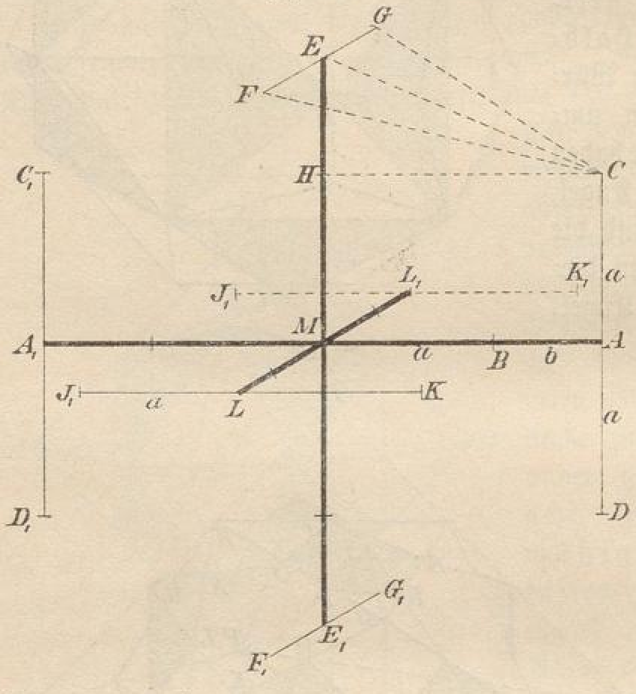
Fig. 167.



In Fig. 166 sind die beiden demselben Würfel umbeschriebenen Zwölfflache in ihrer Durchdringung dargestellt. Das eine von beiden ist schraffiert worden. Der Würfel und ebenso der gemeinschaftliche Pyramidenwürfel sind leicht zu erkennen.

Fig. 167 stellt die beiden demselben Oktaeder einbeschriebenen Ikosaeder in ihrer Durchdringung dar. Das eine von beiden ist schraffiert worden, nur war bei der Schraffierung folgendes zu beachten: In der Oktaederfläche EBD liegen zwei gleichseitige Dreiecke JGH und $J_1G_1H_1$ der beiden Zwanzigflache aufeinander und bilden einen unregelmäßigen Sechseckstern. (Es wird sich zeigen, daß jede Oktaederkante, z. B. BD, auf zwei Arten stetig geteilt ist, z. B. in H und H_1.) Bei den überschießenden Dreiecken des Sterns, die dem schraffierten Oktaeder angehören, ist die Schraffierung angedeutet, die gemeinschaftliche Fläche ist unschraffiert gelassen. Diesem Sechseckstern entspricht in Fig. 166 die an der entsprechenden Würfelecke befindliche „Sternecke" mit einspringenden Winkeln.

Fig. 168.



Das Oktaeder ist durch quadratische Flächen abgestumpft (entecktt), von denen nur die Diagonalen gezeichnet sind.

Man versuche zu jedem Punkte oder jeder Fläche der einen Figur die zugehörige Fläche bezw. den zugehörigen Punkt der anderen zu bestimmen, zu jeder Kante der einen die zugehörige rechtwinklig kreuzende Kante der anderen aufzufinden.

d) Zum Beweise des oben Gesagten reicht folgendes hin.

In Fig. 168 ist ein Achsenkreuz gezeichnet. Eine seiner Halbachsen ist in B nach dem goldenen Schnitte geteilt. Der größere Teil a ist an jedem Achsenende nach zwei entgegengesetzten Achsenrichtungen als Lot angebracht worden. Es wird behauptet, daß die zwölf Endpunkte dieser in der Figur gezeichneten Lote die Ecken eines regelmäßigen Ikosaeders sind.

Beweis. $FC^2 = FE^2 + EC^2 = FE^2 + HC^2 + HE^2$. Setzt man $MB = a$, $BA = b$, also $MA = a + b$, so erhält man $FE = a$,

$HC = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$, $BA = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. Daher wird $FC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}(5+1+2\sqrt{5}) + \frac{a^2}{4}(5+1-2\sqrt{5}) = 4a^2 = (2a)^2$. Da $FG = 2a$, $FC = 2a$ und ebenso $GC = 2a$ ist, so ist FGC ein gleichseitiges Dreieck. Solcher gleichseitigen Dreiecke lassen sich an dem Gebilde zwanzig nachweisen, folglich sind die Ecken die eines regelmäßigen Zwanzigflachs.

Bemerkung. Verlängert man jede Halbachse noch um a, so sind die neuen Achsen stetig geteilt und man erhält die Eckpunkte des einen dem Ikosaeder umbeschriebenen Oktaeders. Daß z. B. die Kante DE in Fig. 165 stetig geteilt ist, folgt aus dem Parallelismus von EM und der „Firstlinie". Im Ikosaeder befinden sich $\frac{30}{6} = 5$ gleichberechtigte Achsenkreuze, ebenso im Dodekaeder.

Die Verbindungslinie jedes Flächenmittelpunktes mit dem Mittelpunkte des Körpers gibt den Radius der einbeschriebenen Kugel. Die Fläche FKC liegt so in dem zugehörigen Oktaeder des Achsenkreuzes, daß ϱ mit allen Achsen dieselben Winkel bildet. Es hat nämlich die Lage einer Würfeldiagonale für die normale Würfelstellung. Demnach ist die zugehörige Normalfläche, wie behauptet war, eine Oktaederfläche.

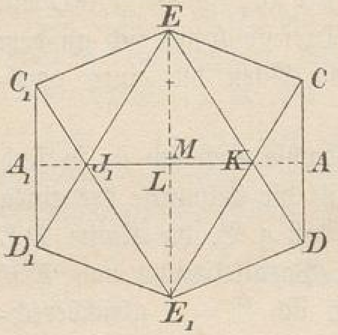
[e) Der Radius der umbeschriebenen Kugel des Ikosaeders ergibt sich bei der gewählten Bezeichnung aus $FM^2 = ME^2 + EF^2 = (a+b)^2 + a^2 = \left[\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)\right]^2 + a^2 = \frac{a^2}{4}[5+1+2\sqrt{5}+4] = \frac{a^2}{2}(5+\sqrt{5})$, sodaß unter Voraussetzung der Kante $k = 2a$ der Radius $r = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ ist. Für die Kante k ist demnach $r = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = k\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Der Radius der einbeschriebenen Kugel ergibt sich aus $\varrho^2 = ME^2 - (\frac{1}{3}EC)^2$. Hier ist die Höhe EC des gleichseitigen Dreiecks von Seite $2a$ gleich $\frac{2a}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{3}$, also $\frac{1}{3}EC = \frac{1}{3}a\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. So folgt $\varrho^2 = \left[\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)\right]^2 - (a\sqrt{\frac{1}{3}})^2 = \frac{a^2}{4}(6+2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2}(3+\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}[9+3\sqrt{5}-2] = \frac{a^2}{6}(7+3\sqrt{5})$. Demnach ist bei der Kante $k = 2a$ der Radius $\varrho = a\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$, für die Kante k also ist $\varrho = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = k\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{24}}$.]

f) **Aufgabe.** Das Ikosaeder im Anschluß an Fig. 168 im Aufriß zu zeichnen.

Auflösung. Die in Fig. 169 gegebene Darstellung unterscheidet sich von der in Fig. 163 und 168 gegebenen nur dadurch, daß die dritte Achse in der Länge Null erscheint, ebenso die beiden zu ihr parallelen Firstlinien.

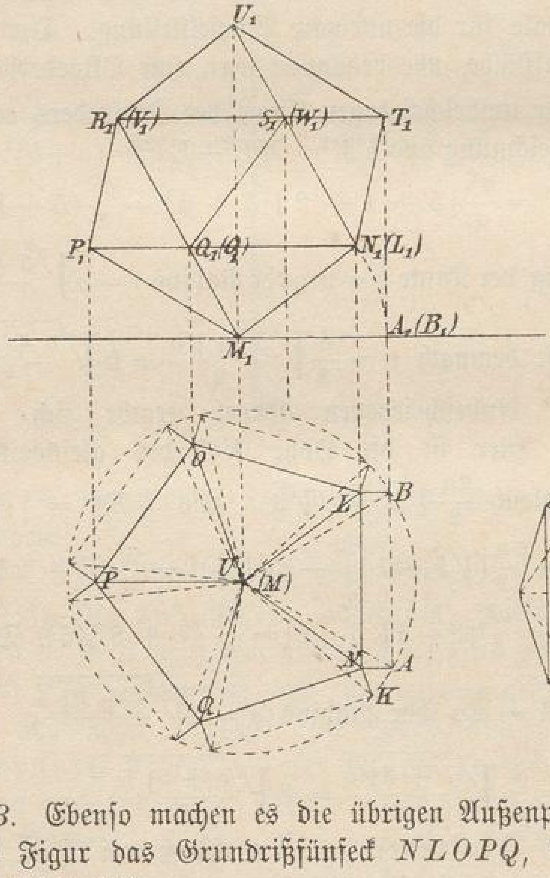
Fig. 169.

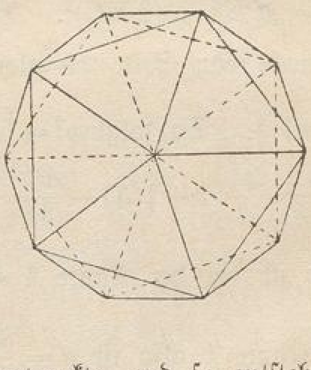


Der Grundriß ist leicht dazu zu konstruieren. Er sieht ebenso aus und ist nur um 90^0 gedreht zu zeichnen.

g) **Die Grund- und Aufrißzeichnung des Ikosaeders nach der Aufklappmethode herzustellen.** In Fig. 170 sind im Grundriß zunächst fünf gleichseitige Dreiecke regelmäßig um einen Punkt gruppiert worden, wobei das eine eine senkrechte Seite haben soll. Jedes Dreieck soll um eine Achse gedreht werden, die durch den gemeinschaftlichen Eckpunkt M geht und zur betreffenden Gegenseite parallel ist. Die Drehung soll so weit gehen, bis die Kanten gleichmäßig aneinander stoßen, sodaß eine Art Trichter entsteht, d. h eine auf der Spitze balancierende fünfseitige Pyramide. Dabei bewegen sich z. B. die Projektionen von A und B normal gegen

Fig. 170.





AB. Ebenso machen es die übrigen Außenpunkte, und so entsteht in der Figur das Grundrißfünfeck $NLOPQ$, dessen Ecken mit M zu verbinden sind.

Der Aufriß dieses Trichters entsteht folgendermaßen: M, A und B geben, auf die Grundlinie des Aufrisses projiziert, M_1, A_1 und (B_1). Man schlage mit $M_1 A_1$ einen Kreisbogen um M so weit, bis N_1 und (L_1) senkrecht über NL liegen. Damit ist die Höhenlage für das Fünfeck $N_1 L_1 O_1 P_1 Q_1$ gefunden. Zugleich zeigt sich, daß durch die Gerade $M_1 Q_1$ bezw. $M_1 O_1$ die Ebene des Fünfecks $M_1 Q_1 R_1 V_1 O_1$ dargestellt ist. Dieses Fünfeck erscheint in derselben Projektionszeichnung wie das vorige, also ist $M_1 Q_1 = P_1 Q_1$ und $Q_1 R_1 = Q_1 N_1$, also $\triangle P_1 M_1 Q_1$ gleichschenklig und, wenn man noch $P_1 R_1$ zieht, $\triangle Q_1 M_1 N_1 \cong Q_1 P_1 R_1$. Mit R_1 ist die Höhenlage für das obere Fünfeck $R_1 V_1 S_1 W_1 T_1$ gefunden. Der oberste Trichter (Pyramide) ist

Fig. 171 a.

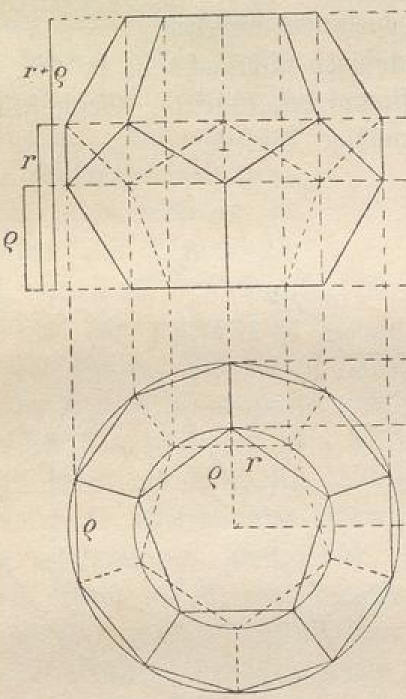
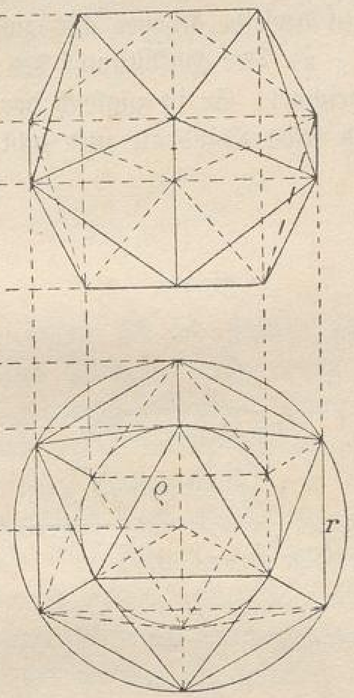


Fig. 171 b.



zum untersten kongruent zu zeichnen, jedoch entsprechend zu drehen. Die Figur ist leicht zu vollenden. Der Aufriß stimmt mit dem in Fig. 169 gegebenen überein, nur sind zwei der schrägen Parallelen horizontal gestellt worden, die Achse AB dagegen senkrecht. Gegen $Q_1 S_1$ findet Symmetrie statt. In der nebenstehenden Figur ist der Grundriß vollendet, der sich als ein regelmäßiges Zehneck mit zwei einbeschriebenen Fünfecken und den zugehörigen Radien darstellt.

b) **Aufgabe.** Den Grundriß Fig. 170 so zu drehen, daß zwei Zehnecksseiten senkrecht werden. Im Aufriß findet dann nur Hori=

zontalverschiebung statt, und die Figur wird symmetrisch gegen eine vertikale Achse.

i) **Aufgabe.** Das auf einer Fläche stehende Ikosaeder im Grund- und Aufriß darzustellen. (In Fig. 171 b ist die Aufgabe gelöst. Dabei ist gezeigt, daß, wenn man im Grundriß dieselben Hilfskreise wählt wie beim Pentagondodekaeder, die vier Punktschichten des Aufrisses in dieselben Höhen fallen wie bei diesem. Der Schüler führe die Konstruktion und die Beweise selbst aus.)

14) Einige Halbstumpfe und ihre reziproken Körper. Unter Halbstumpf soll ein Körper verstanden werden, der dadurch aus einem anderen entsteht, daß man die Kanten des letzteren halbiert und die Abstumpfung der Ecken (Entecktung) bis dorthin durchführt. Dabei kann derselbe Körper aus zwei verschiedenen entstehen.

a) Der Halbstumpf des regelmäßigen Achtflachs ist in Fig. 172 gezeichnet. Er ist zugleich der Halbstumpf des Würfels. Seine Flächen sind sechs Quadrate und acht regelmäßige Dreiecke.

Fig. 172.

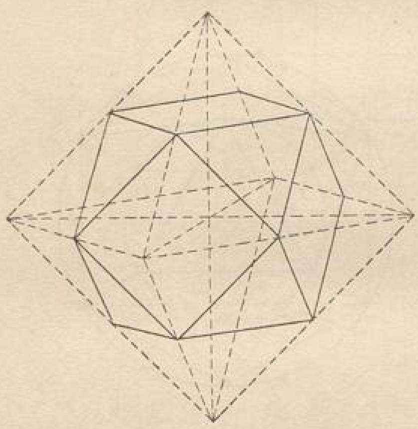
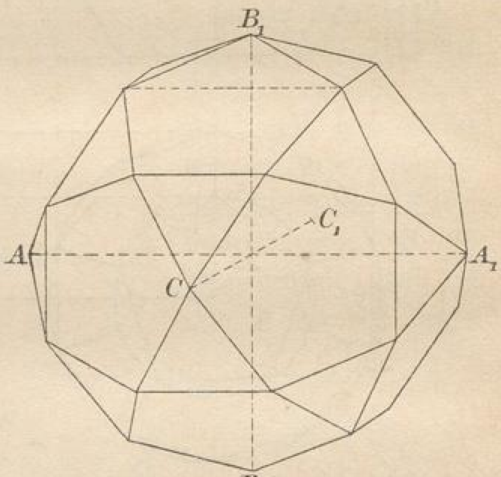


Fig. 173.



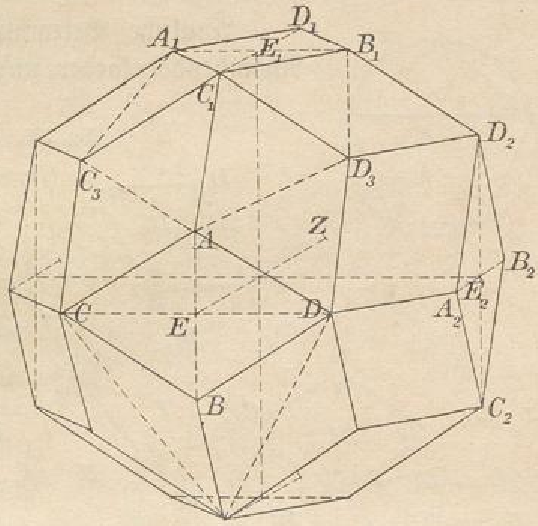
Die Flächenmitten dieses Körpers bilden ein Rhombenzwölfflach, welches demnach der reziproke Körper ist. Der Abstumpfung des Würfels oder Oktaeders bis zur Kantenmitte entspricht also ein Aufsetzen so hoher Pyramiden auf die Würfelflächen oder Oktaederflächen, daß je zwei benachbarte Pyramidenflächen in dieselbe Ebene fallen und nur die halbe Anzahl von Flächen bestehen bleibt.

b) Der Halbstumpf des regelmäßigen Zwanzigflachs ist in Fig. 173 dargestellt. Er ist zugleich der des regelmäßigen Zwölfflachs. Er zeigt als Flächen zwölf regelmäßige Fünfecke und zwanzig gleichseitige Dreiecke. Dem Achsenkreuze entspricht ein einbeschriebenes Oktaeder.

Die Flächenmitten dieses Körpers liegen auf einem Rhombendreißigflach. Dieses ist in Fig. 174 dargestellt. Beide Körper sind reziprok zueinander. Die unterste und oberste Fläche des Rhombendreißigflachs, die vorderste und hinterste, die linke und rechte sind Flächen eines umbeschriebenen Würfels.

In das regelmäßige Zwölfflach lassen sich im ganzen fünf Würfel einstellen. Die dreißig Würfelflächen umhüllen ein Rhombendreißigflach, während die Ecken der Würfel (von denen je zwei zusammenfallen, sodaß ihre Zahl $\frac{40}{2} = 20$ beträgt) die Ecken des Dodekaeders bilden.

Fig. 174.



Um das regelmäßige Zwanzigflach lassen sich im ganzen fünf Oktaeder legen. Die vierzig Flächen dieser Oktaeder, von denen je zwei in dieselbe Ebene fallen, sodaß nur zwanzig selbständig bestehen, umhüllen das Ikosaeder, die dreißig Ecken der Oktaeder liegen aber in den Ecken des durch Fig. 173 dargestellten Halbstumpfs.

Auf die Flächen eines Rhombendreißigflachs lassen sich die Kanten eines regelmäßigen Zwölfflachs zeichnen. Die betreffenden Fünfecke werden durch die kleinen Diagonalen der Rhomben gebildet. Aber auch die Kanten eines regelmäßigen Zwanzigflachs lassen sich aufzeichnen. Die betreffenden Dreiecke werden durch die großen Diagonalen der Rhomben gebildet.

Da C_3D_3 Diagonale des Fünfecks und gleich CD ist, A_1B_1 dagegen als Fünfecksseite auftritt, so verhalten sich die kleineren und die größeren Diagonalen jedes Rhombus wie die Teile einer stetig geteilten Geraden. Das Netz des Körpers ist daher mit Hilfe eines regelmäßigen Fünfecks oder der stetigen Teilung leicht herzustellen. In Fig. 175 ist die Hälfte des Netzes gezeichnet und dabei angedeutet, welche Ecken beim Bilden des Modelles zusammenfallen.

Die genannten Eigenschaften des Rhombendreißigflachs hängen damit zusammen, daß es der Zwischenfall für das Pyramidenzwölfflach bezw. das Pyramidenzwanzigflach ist, bei dem je zwei Pyramidenflächen zu einer zusammenfallen, sodaß nur $\frac{5 \cdot 12}{2}$ bezw. $\frac{3 \cdot 20}{2}$ oder 30 Flächen bestehen bleiben.

Diesen Eigenschaften stehen reziproke des zugehörigen Halbstumpfs gegenüber, welche aufzusuchen dem Schüler überlassen bleiben soll. — Ähnliche Betrachtungen versuche man für das Rhombendodekaeder und den Halbstumpf des Würfels auszuführen. Der Halbstumpf des Tetraeders ist ein Oktaeder.

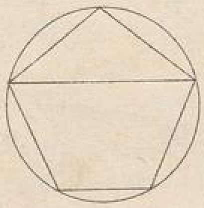
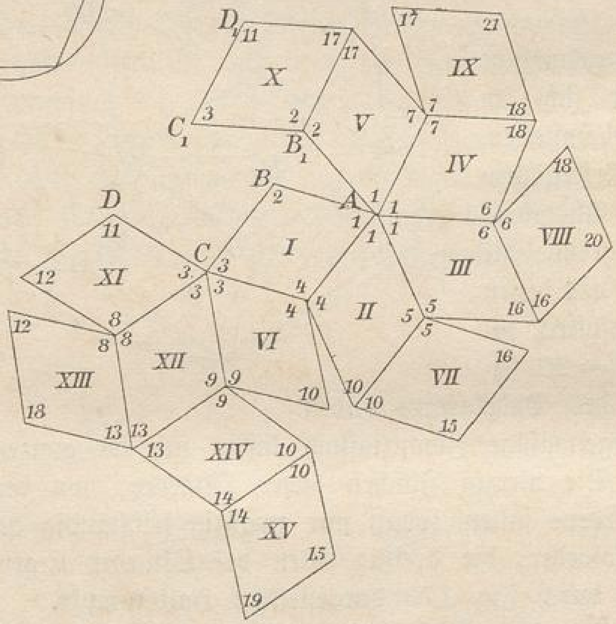


Fig. 175.

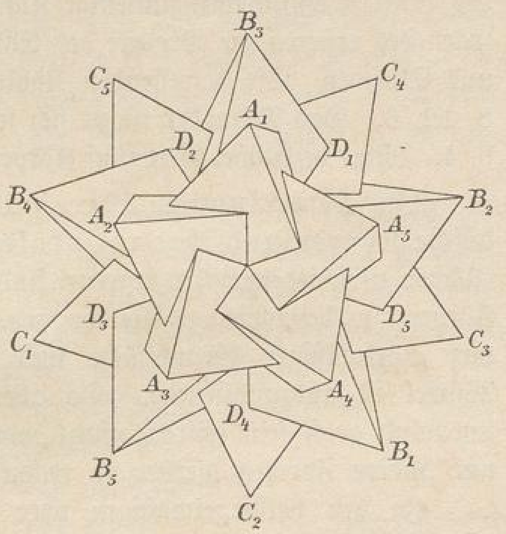


15) Wie sich dem Rhombendodekaeder fünf Würfel einbeschreiben lassen, lassen sich ihm auch zehn Tetraeder einbeschreiben, denn in jedem Würfel können zwei eingezeichnet werden. Von diesen Tetraedern kann man je fünf aussuchen, die keine Ecke miteinander gemein haben.

Denkt man sich also die zwanzig Ecken eines regelmäßigen Zwölfflachs gezeichnet, so kann man stets je vier als Ecken eines Tetraeders betrachten. Diese Tetraeder bilden den sogenannten Stern der fünf Tetraeder. Dieser ist durch Fig. 176 dargestellt. So sind z. B. A_1, B_1, C_1, D_1 Ecken eines Tetraeders, davon D_1 die auf der Rückseite zu denkende. (Der Punkt hat noch eine andere Bedeutung. Jede Tetraederkante ist an zwei Stellen stetig geteilt, z. B. $B_3 C_3$ in D_1 und in dem durch A_5 verdeckten Punkte, auch ist sie halbiert an der Stelle, wo sie zwischen zwei Tetraederflächen wieder sichtbar werden möchte, ohne jedoch ins Freie zu gelangen. Jede der auftretenden Schnittlinien geht verlängert durch eine der Tetraederecken. Die zwanzig Flächen umhüllen ein Ikosaeder.)

Um das Ikosaeder ließen sich fünf Oktaeder legen, von denen jedes zwei umbeschriebene Tetraeder als Halbflächner hat. Wählt man von den zehn Tetraedern ebenfalls fünf voneinander freie aus, so entsteht wieder ein Stern von fünf Tetraedern. Der reziproke Körper zu einem solchen Tetraederstern ist also wieder ein solcher. —

Fig. 176.



16) **Bemerkungen über die regelmäßigen oder Platonischen Körper.** Von den regelmäßigen Körpern sind drei von gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Beim Tetraeder stoßen in jeder Ecke drei Dreiecke zusammen, beim Oktaeder vier, beim Ikosaeder fünf. Ein weiterer von Dreiecken begrenzter Körper ist nicht möglich, denn sechs gleichseitige Dreiecke bilden keine Ecke, sondern fallen, da $6 \cdot 60^0 = 360^0$ ist, in dieselbe Ebene. Ein Winkel von mehr als 360^0 ist ferner unmöglich, da die Summe der Winkel um einen Punkt bei einer konvexen Ecke 360^0 nicht übersteigen kann.

Ein regelmäßiger Körper, der Würfel, ist von Quadraten begrenzt, von denen je drei in jeder Ecke zusammenstoßen. Ein weiterer von Quadraten begrenzter Körper ist unmöglich, denn vier Quadrate bilden keine Ecke, sie fallen in dieselbe Ebene, da $4 \cdot 90^0 = 360^0$ ist. Noch mehr Quadrate können erst recht keine Ecke bilden.

Ein regelmäßiger Körper, das Zwölfflach, war von regelmäßigen Fünfecken begrenzt. Ein weiterer von solchen begrenzter Körper ist unmöglich, da $4 \cdot 108^0 = 432^0$ den Winkel von 360^0 schon überschreitet.

Ein von regelmäßigen Sechsecken begrenzter Körper ist unmöglich, denn drei solcher Flächen können keine Ecke bilden, sondern sie fallen, da $3 \cdot 120^0 = 360^0$ ist, in dieselbe Ebene.

Bei drei Siebenecken würde der Winkel von 360^0 schon weit überschritten werden. Folglich gibt es nicht mehr als die genannten fünf regelmäßigen Vielflache. Als Grenzfall, d. h. als regelmäßiges Unendlichflach, können nur die Kugel oder etwa die unbegrenzte Ebene gelten, denn auf der letzteren lassen sich unendlich viele gleichseitige Dreiecke oder Quadrate oder regelmäßige Sechsecke lückenlos aneinander schließen.

Von den fünf regelmäßigen Polyedern sind das Zwölfflach und das Zwanzigflach reziproke. Die Zahl der Flächen, Kanten, Ecken ist beim ersteren 12, 30, 20, beim letzteren 20, 30, 12. Den Fünfecken des ersteren entsprechen fünfeckige Kanten des letzteren, den dreikantigen Ecken des ersteren die Dreiecke des letzteren. Reziprok sind auch Würfel und Oktaeder. Die betreffenden Zahlen sind bei beiden 6, 12, 8 bezw. 8, 12, 6. Das Tetreader ist zu sich selbst reziprok. Die Zahlen sind 4, 6, 4. Man bezeichnet diese fünf Körper als die Platonischen Körper.

17) Bemerkungen über halbregelmäßige oder Archimedische Körper und ihre reziproken. Körper, die von regelmäßigen Flächen verschiedener Art begrenzt sind, pflegt man als halbregelmäßige Körper zu bezeichnen. Hierher gehören eigentlich auch alle Säulen von regelmäßiger Grundfläche und quadratischen Seitenflächen (der Würfel ist auszuschließen). Da aber dann die Anzahl der Formen unendlich groß sein würde, pflegt man die Säulen auszuschließen und nur andere Formen hierher zu rechnen.

Zu den halbregelmäßigen oder Archimedischen Körpern gehören die beiden oben betrachteten Halbstumpfe des Würfels (oder Achtflachs) und des Zwölfflachs (oder Zwanzigflachs). Es gibt solche Körper mit zwei Arten von Flächen, die Dreiecke und Quadrate, Dreiecke und Sechsecke, Quadrate und Sechsecke, Dreiecke und Achtecke, Dreiecke und Fünfecke, Sechsecke und Fünfecke, Zehnecke und Dreiecke sein können. Andere haben drei Arten regelmäßiger Flächen, z. B. Achtecke, Sechsecke und Quadrate, oder Fünfecke, Dreiecke und Quadrate, oder Zehnecke, Sechsecke und Quadrate. Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten beschlossen.

Auch die Archimedischen Körper haben ihre reziproken. So gehörte zum Halbstumpf des Würfels das Rhombendodekaeder, zum Halbstumpf des Zwölfflachs das Rhombendreißigflach. Das erstere hatte regelmäßige Dreikantecken und regelmäßige Vierkantecken, welche die reziproken Gebilde der Dreiecke und Quadrate sind. Beim Rhombendreißigflach dagegen gab es regelmäßige Dreikantecken und Fünfkantecken als Bilder der regelmäßigen Dreiecke und Fünfecke. Die reziproken Körper der Archimedischen werden auch als antarchimedische bezeichnet.

Näher auf diese Gebilde einzugehen, würde zu weit führen.*) (Auf die Kepler-Poinsotschen Körper und auf die verschiedenen Kristallformen sei besonders aufmerksam gemacht.)

*) Weiteres Material findet man im Anhange des Vorkursus, in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen", Leipzig bei B. G. Teubner, und in seinem vierbändigen Werke „Elemente der Stereometrie", Leipzig bei G. J. Göschen.