



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik**

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig und Berlin, 1904**

Lehraufgaben der Untersekunda.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-94706](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-94706)

# Vierte Abteilung.

## Stereometrie.

### Lehraufgabe der Untersekunda.

#### Vorbemerkungen.

1) Aus dem Vorkursus und der Lehraufgabe der Quinta und Quarta werden folgende Begriffe der räumlichen Geometrie als bekannt vorausgesetzt:\*)

Dreidimensionaler Raum (mathematischer Raum im Gegensatz zum Weltraum). Körper (mathematischer Körper im Gegensatz zum physischen Körper). Ebene Fläche. Krumme Fläche. Ebene Kurve. Raumkurve. Ebene Punktgruppen. Nichtebene Punktgruppen. Das Strahlenbündel eines Punktes (Gesamtheit der Richtungen). Senkrechte, wagerechte und schiefe Geraden. Parallele Geraden im Raume. Senkrechte, wagerechte und schiefe Ebenen. Parallele Ebenen. Ihr gegenseitiger Abstand. Lot auf einer Ebene. Normalebene auf einer Geraden. Abstand eines Punktes von einer Ebene. Gerade, die zu einer Ebene parallel ist. Ihr Abstand von der Ebene. Gerade als Schnitt zweier oder mehrerer Ebenen. Das Ebenenbüschel einer Geraden. Schnittwinkel zweier Ebenen. Schnittwinkel einer Geraden und einer Ebene. Bestimmung einer Ebene durch drei Punkte, die nicht in einer Ebene liegen; oder durch zwei einander schneidende Geraden; oder durch zwei parallele Geraden, oder durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb der Geraden. Vier Punkte in nicht ebener oder windschiefer Lage. Windschiefe oder einander kreuzende Geraden. Kürzester Abstand oder gemeinschaftliches Lot zweier Geraden.

\*) Hier wird zweckmäßig eine vollständige Wiederholung vorgenommen, die zu weiterer Klärung der Grundbegriffe dienen kann.

Die rechtwinklige Ecke. Der Würfel mit seinen Kanten, Flächen, Diagonalen, Diagonalebene. Sein Rauminhalt, seine Oberfläche, seine Kantenlänge. Seine einbeschriebene Kugel. Die Kubikzahlen und die Raumaße. Der Rechteckkörper, seine Kanten, Flächen, Diagonalen und Diagonalebene. Sein Inhalt, seine Oberfläche, seine Kantenlänge. Dreikantige Säulen, die mit dem Würfel und dem Rechteckkörper zusammenhängen. Ihre Inhaltsformel. Pyramiden, die mit dem Würfel und dem Rechteckkörper zusammenhängen. Das dem Würfel einbeschriebene regelmäßige Achteck. Die beiden dem Würfel einbeschriebenen regelmäßigen Viersecke. — Die Symmetrie im Raume. — Die Kugel als Ort konstanten Abstandes von einem Punkte. Halbmesser, Sehne, Durchmesser, Gegenpunkte der Kugel. Die Kugel als regelmäßiger Körper. Schnitt einer Ebene mit der Kugel. Haupt- oder größte Kreise, kleinere Kreise der Kugel. Meridiane und Parallelkreise. Kugelabschnitt (Segment). Halbkugelförper. Kugelhaube (Kalotte). Halbkugelfläche. Kugelausschnitt (Sektor). Meridiankeil und Meridiankeil. Kreisbüschel auf der Kugelfläche. Krümmung. Länge, Breite und Gradeinteilung am Globus. Senkrechter Kreiszylinder (Walze). Sein Inhalt, seine Mantelfläche und Oberfläche. Der konzentrische Hohlzylinder. Der senkrechte Kreiskegel, seine Mantelfläche und Oberfläche. Reihe einiger Körper. Körpermodelle verschiedener Art.

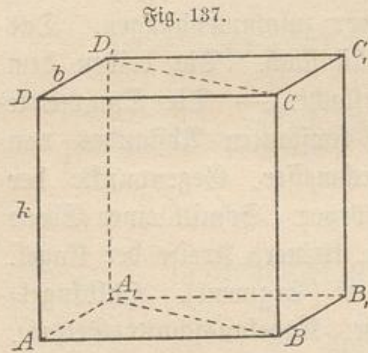
## I. Übungen am Würfel und an den aus ihm abgeleiteten Körpern.

2) Das Zeichnen des Würfels. Die Kunst, dreidimensionale Körper und sonstige Raumgebilde in der nur zweidimensionalen Ebene durch eine korrekte Zeichnung wiederzugeben, heißt die darstellende Geometrie. Jede besondere Art der Darstellung eines Körpers in der Ebene bezeichnet man als eine Projektion des Körpers. Die Berechtigung dieses Namens wird sich aus den folgenden Erläuterungen über die Darstellung des Würfels durch entsprechende Zeichnungen ergeben.

a) Man denke sich das Drahtmodell des Würfels auf einem horizontalen Reißbrett stehend und die Sonne so darauf scheinend, daß der Schatten des Modells auf das Reißbrett geworfen (projiziert) wird. Bei schrägem Einfall der Sonnenstrahlen, die man wegen der sehr großen Entfernung der Sonne als parallel betrachten darf,

nennt man das entstehende Schattengebilde eine schräge Parallelprojektion des Würfels. (Vergl. Fig. 137.)

Dabei decken sich für das in die Sonne versetzt gedachte Auge die unendlich dünn zu denkenden Drähte der Grundfläche  $A_1B_1C_1D_1$  des Modells mit ihren eigenen Schattenlinien, die also ein Quadrat bilden. Die senkrechten Würfelkanten aber werfen parallele Schatten-



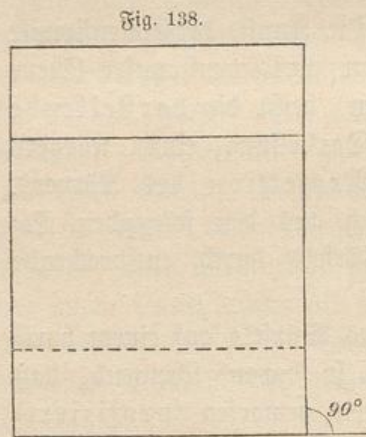
linien, denn steht z. B. die Sonne im Südosten, so gehen diese Schattenlinien sämtlich nach Nordwesten. Außerdem sind diese gleichlang. Steht nämlich die Sonne z. B.  $50^\circ$  über dem Horizonte, und ist  $k$  die Länge der Würfelkante, so ist die Schattenlänge der senkrechten Kanten  $b = k \cot 50^\circ$ . Allgemeiner ist  $b = k \cot \alpha$ , sobald die Sonne  $\alpha^\circ$  über dem Horizonte steht.

Die Drähte der oberen Würfeloberfläche endlich geben Schattenlinien, welche die Endpunkte der eben besprochenen verbinden, sodaß sie ein Quadrat bilden, welches dem zuerst besprochenen kongruent und gegen dieses um die Strecke  $b$  verschoben ist.

In Fig. 137 bedeutet bei dieser Auffassung  $A_1B_1C_1D_1$  die Grundfläche,  $ABCD$  die obere Fläche,  $A_1A$ ,  $B_1B$ ,  $C_1C$  und  $D_1D$  sind die Schatten der senkrechten Kanten. Die Sonne ist wo zu denken? (Man errichte in  $D_1$  auf der Ebene der Zeichnung ein Lot  $D_1X = k$ . Zieht man  $DX$ , so zeigt diese Linie nach der unendlich fern zu denkenden Sonne hin.)

**Aufgabe.** Versuche Fig. 137 so zu deuten, daß das Würfel-

modell mit der Fläche  $A_1B_1C_1D_1$  an die senkrechte Wandtafel gehalten und das Schattengebilde durch die Sonne auf diese geworfen wird. Welches ist dann die horizontale Grundfläche des Würfels, wo sind die senkrechten Seitenkanten, und wie hat man sich den Stand der Sonne zu denken?



b) Man kann sich die Sonne auch so stehend denken, daß das Schattengebilde so wie in Fig. 138 erscheint. Die vorher sichtbaren Seitenflächen sind jetzt unsichtbar geworden. An Stelle des Winkels  $A_1AB$ , der vorher  $30^\circ$  betrug, ist ein Winkel von  $90^\circ$  getreten.

c) Je nach der Höhe des Sonnenstandes können die Kanten  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  des Würfels verkürzt, verlängert oder auch in richtiger Länge erscheinen. Im letzteren Falle kann man die Zeichnung als eine isometrische bezeichnen. In der Regel wird man aber irgend eine Verkürzung wählen. Ebenso willkürlich kann man mit dem Winkel  $A_1AB$  verfahren.

Man wird jetzt verstehen, was es heißen soll, in Fig. 137 sei der Würfel in der Parallelperspektive\*) zu  $30^\circ$  mit  $\frac{1}{3}$  Verkürzung gezeichnet. Ebenso kann man die Parallelperspektive  $45^\circ$  und  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  usw. Verkürzung nehmen; ebenso die Parallelperspektive zu  $90^\circ$  und  $\frac{1}{4}$  Verkürzung usw. Statt Parallelperspektive im allgemeinen möge man abgekürzt sagen „Schrägbild“.

Die gewöhnliche Stellung des Würfels ist dabei die sog. Frontstellung. (Durch die in Fig. 137 eingezeichnete Diagonalebene ist zugleich dargestellt, wie die dreiseitigen Säulen, in die durch jene der Würfel zerlegt ist, erscheinen würden.)

d) **Aufgabe.** Den Würfel in der Parallelperspektive zu  $30^\circ$  und  $\frac{1}{3}$  Verkürzung in „Übereckstellung“ zu zeichnen.\*\*)

(Man kann die Figur aus Fig. 137 ableiten. Setzt man in dieser  $AB = 1$ , so zeichne man einen Würfel von der Kante  $\sqrt{2}$ , so daß seine Höhe leicht zu bestimmen ist. Die Grundlinien erscheinen dann von derselben Länge und Richtung, wie in Fig. 137  $A_1B$  und  $AB_1$ .)

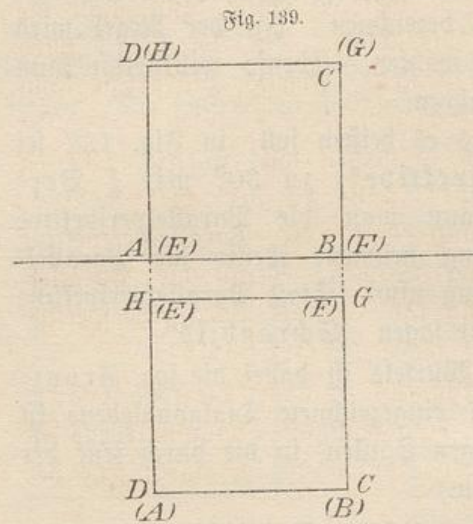
e) Zwei Sonderfälle der Parallelperspektive sind von besonderer Wichtigkeit, bei denen es sich um die Verkürzung  $\frac{1}{\infty} = 0$  handelt.

Steht die Sonne senkrecht über dem Reißbrett, bezw. der Fläche der Wandtafel, so fällt  $ABCD$  auf  $A_1B_1C_1D_1$  und es wird  $AA_1 = 0$ ,  $BB_1 = 0$  usw. In dem einen Falle entsteht dann die Grundriß-Zeichnung, in dem anderen die Aufriß-Zeichnung des Würfels, in beiden Fällen zunächst ein Quadrat. Im Gegensatz zu den Schrägbildern bezeichnet man diese Zeichnungen als senkrechte Projektionen (orthogonale oder orthographische Projektionen) des Würfels. Die Zeichnungen der Bau- und Maschinentechnik werden in der Regel durch Grundriß und Aufriß zugleich dargestellt. So ist in

\*) Der Name Perspektive kommt daher, daß man das unendlich scharfe Auge des Beobachters an die Stelle der Sonne versetzt denkt. Diesem Auge decken sich die Drahtkanten des Modells mit ihren Schattenlinien. Ihm erscheint der Würfel so, wie das gezeichnete Bild.

\*\*) Näheres über diese Darstellung findet man in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“. Leipzig bei B. G. Teubner, 1886.

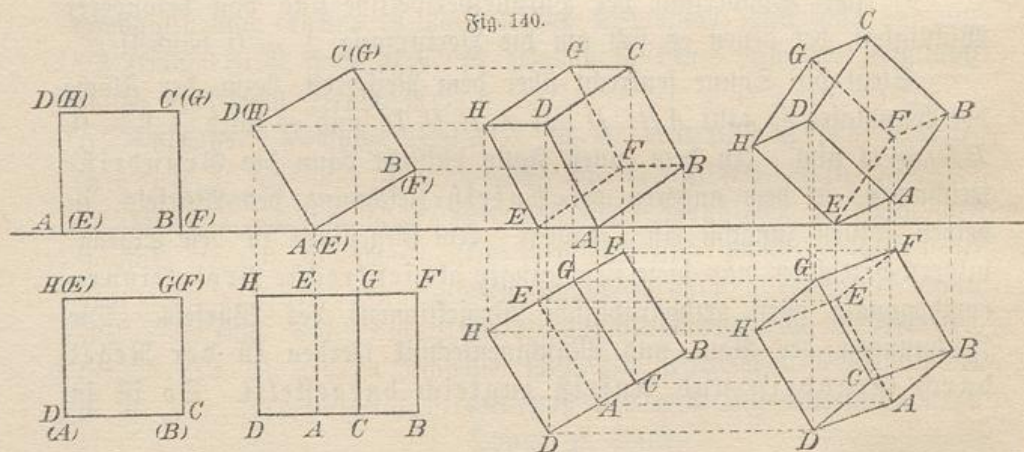
Fig. 139 der Würfel im Grundriß und Aufriß zugleich gezeichnet. Für die mathematischen Zwecke der Schule ist die Schrägprojektion im all-



gemeinen die geeignetere, da sie nur eine Zeichnung erfordert. Nur für die Zeichnung der Kugel ist die senkrechte Projektion vorzuziehen, weil sie in dieser als Kreis, bei der schrägen dagegen im allgemeinen als Ellipse erscheint.

f) Die Grund- und Aufrißzeichnung ist sehr geeignet, den Würfel in den verschiedensten Stellungen zur Darstellung zu bringen. Wie dies geschehen kann, ergibt sich aus Fig. 140. In dieser ist zunächst die ge-

wöhnliche Frontstellung gewählt, wobei die verdeckten Punkte mit eingeklammerten Buchstaben bezeichnet sind. Denkt man sich dann den Würfel im Aufriß um irgend einen Winkel unter Festhaltung der Kante  $AE$  gedreht, wobei das Aufrißbild sonst ungeändert bleibt, so wandern die Grundrißpunkte in horizontaler Bahn. Wie sie im

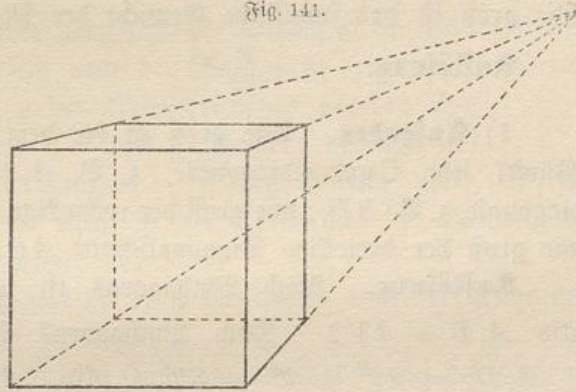


zweiten Bilde liegen, ergibt sich aus dem Herabprojizieren der Aufrißpunkte in den Grundriß. Dann drehe man das Grundrißbild, wobei die Punkte des Aufrißes horizontal wandern. Ihre Lage ergibt sich aus dem Hinausprojizieren. Im Aufriß kann man schließlich noch eine andere Drehung vornehmen, was eine ganz allgemeine Lage ergibt.

g) Denkt man sich die Kante des Würfels als 1, so hat die einbeschriebene Kugel den Radius  $\rho = \frac{1}{2}$ , die umbeschriebene aber hat den Radius  $r = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , (warum?) kann also ebenfalls leicht konstruiert werden.\*) Den Mittelpunkt beider Kugeln findet man durch den Schnitt je zweier Hauptdiagonalen. Die Kugeln sind also für alle vier Lagen im Grund- und Aufriß als je zwei gleich große Kreise leicht zu zeichnen.

h) Macht man den ersten Beleuchtungsversuch statt mit den Sonnenstrahlen mit einem Kerzenlichte, so erhalten die Quadrate verschiedene Größe, und die Schatten der senkrechten Drähte laufen so auseinander, als ob sie von einem Punkte ausgingen, dem äußeren Ähnlichkeitspunkte der beiden Quadrate. Fig. 141 stellt eine solche Projektion dar, die man als Zentralprojektion (Zentralperspektive, Malerperspektive) des

Fig. 141.



Würfels bezeichnet. Sie stellt den Würfel so dar, wie er dem in endlicher Entfernung befindlichen Auge erscheint. Räumlich ist das Kerzenlicht wo zu denken? Man errichte in einem Eckpunkte  $D_1$  des kleineren Quadrates auf der Ebene der Zeichnung ein Lot

$D_1X$  gleich der Seite dieses Quadrates. Ist nun  $D$  der Endpunkt der zugehörigen Schräglinie, so zeigt die Gerade  $DX$  nach dem leuchtenden „Punkte“ hin. Macht man dieselbe Konstruktion an einer anderen Ecke, so schneiden sich die beiden Raumlinien im leuchtenden Punkte. — Das Auge befindet sich an derselben Stelle.

Auf diese Zeichnungsart kann hier noch nicht näher eingegangen werden.\*\*)

3) **Aufgaben.** a) Der Würfel habe die Kante  $k$ ; wie groß ist seine Oberfläche, sein Inhalt und, wenn  $p'$  das spezifische Gewicht ist, sein Gewicht? (Bei Eisen z. B. ist  $p' = 7,5$  zu nehmen.)

**Auflösung.**  $O = 6k^2$ ,  $I = k^3$ ,  $p = k^3 p'$ .

b) Wie groß sind  $k$ ,  $I$  und  $p$  bei gegebener Oberfläche  $O$ ?

\*) Letzterer Kreis geht nicht durch die Ecken der zuerst gezeichneten Quadrate.

\*\*\*) Die Einführung in das stereometrische Zeichen teilt das Wichtigste darüber mit.

$$\text{Auflösung. } k = \sqrt{\frac{O}{6}}, \quad I = k^3 = \left(\sqrt{\frac{O}{6}}\right)^3, \quad p = \left(\sqrt{\frac{O}{6}}\right)^3 p',$$

wobei auch  $p'$  gegeben sein muß.

c) Wie groß sind  $k$ ,  $O$  und  $p$  bei gegebenem  $I$ ?

$$\text{Auflösung. } k = \sqrt[3]{I} = I^{\frac{1}{3}}, \quad O = 6k^2 = 6I^{\frac{2}{3}}, \quad p = I \cdot p'.$$

d) Wie lang müssen die Kanten eines würfelförmigen Hektolitergefäßes genommen werden?

$$\text{Auflösung. } x^3 = 100 \text{ cbdm, folglich } x = \sqrt[3]{100} = ?$$

e) Wie lang müssen die Kanten eines Eisenwürfels sein, der 1000 kg wiegen soll?

$$\text{Auflösung. Aus } p = I \cdot 7,5 = x^3 \cdot 7,5 \text{ folgt } x = \sqrt[3]{\frac{p}{7,5}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{7,5}} = ?$$

f) Ein Würfel von der Kantenlänge  $k$  habe das Gewicht  $p$ . Wie groß ist das spezifische Gewicht der Masse?

$$\text{Auflösung. } p' = \frac{p}{k^3} \cdot *)$$

4) **Aufgaben.** Wie groß ist bei dem in Fig. 137 dargestellten Würfel jede Quadratdiagonale, z. B.  $A_1B$ ; wie groß jede Hauptdiagonale, z. B.  $BD_1$ ; wie groß der rechteckige Diagonalschnitt  $A_1BCD_1$ ; wie groß der dreieckige Diagonalschnitt  $ACD_1$ ?

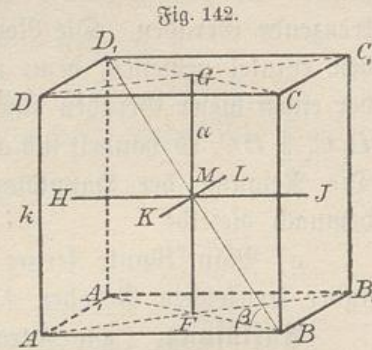
**Auflösung.** Nach Pythagoras ist  $A_1B^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$ , also  $A_1B = k\sqrt{2}$ . Nach Pythagoras ist ferner  $BD_1^2 = A_1B^2 + A_1D_1^2 = 2k^2 + k^2 = 3k^2$ , also  $BD_1 = k\sqrt{3}$ . Fläche  $A_1BCD_1 = A_1B \cdot A_1D_1 = k\sqrt{2}k = k^2\sqrt{2}$ . Fläche  $ACD_1 = \frac{AC^2}{4}\sqrt{3} = \frac{2k^2}{4}\sqrt{3} = \frac{k^2}{2}\sqrt{3}$ .

5) Die Hauptdiagonalschnitte  $A_1BCD_1$  und  $AB_1C_1D$  (Fig. 142) schneiden sich in der Mittellinie  $FG$  des Würfels. Die beiden anderen Paare von Schnittflächen geben die Mittellinien  $HJ$  und  $KL$ .

Je zwei der Geraden  $FG$ ,  $HJ$  und  $KL$  bestimmen eine Ebene, die den Würfel in kongruente Teile zerlegt. Diese Ebenen heißen die Mittelschnitte des Würfels. Der Punkt  $M$ , der diesen drei Ebenen gemeinschaftlich ist, ist zugleich sämtlichen Hauptdiagonalschnitten gemein, in ihm schneiden sich sowohl die Mittellinien  $FG$ ,  $HJ$ ,  $KL$ , als auch die vier Hauptdiagonalen  $AC_1$ ,  $BD_1$ ,  $B_1D$  und  $A_1C$ .  $M$

\*) Über den Würfel, die Kubikzahlen, die Raum- und Gewichtsmaße, die Flüssigkeitsmaße, das spezifische Gewicht, über die Urmaße und über numerische Aufgaben vgl. Vorfurjus § 75 bis § 79. Man beachte besonders die dort unter 78e) gegebene Rechenregel.

heißt der Mittelpunkt des Würfels. Es ist gleichweit von allen Ecken, gleichweit von allen Kanten, gleichweit von allen Flächen des Würfels entfernt. Er ist also der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, deren Radius  $\rho = \frac{k}{2}$  ist, und zugleich der Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel, deren Radius  $\frac{1}{2}BD_1$  oder  $r = \frac{k}{2}\sqrt{3}$  ist. Er ist auch der Mittelpunkt einer Kugel, die jede Würfelkante in ihrer Mitte berührt. In der Kristallographie nennt man die drei Mittellinien  $FG$ ,  $HJ$  und  $KL$  das Achsenkreuz des Würfels.



6) **Aufgaben.** a) Wie groß sind die Kanten  $k$ , die Oberfläche  $O$ , der Inhalt  $I$  eines Würfels und der Radius  $r$  der umbeschriebenen Kugel, wenn der Radius  $\rho$  der einbeschriebenen gegeben ist?

b) Wie groß sind  $k$ ,  $O$ ,  $I$  und  $\rho$ , wenn  $r$  gegeben ist?

c) Einer Kugel mit Radius  $r$  sei ein Würfel um- und ein anderer einbeschrieben. Wie groß ist der Unterschied der Kanten, der Oberflächen, der Inhalte beider Würfel?

d) Wie groß ist der Radius  $r$ , wenn irgend eine der genannten Differenzen gegeben ist?

e) Welche Neigung hat jede Hauptdiagonale des auf horizontaler Basis stehenden Würfels?

**Auflösung.** In Fig. 142 ist  $\tan \beta = \frac{A_1 D_1}{B A_1} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5}$ ;

$\lg 0,5 = 19,698\ 97 - 20$ , oder  $\lg \sqrt{0,5} = 9,849\ 49 - 10$ , also  $\beta = 35^\circ 15' 50''$ . Man nennt diesen Winkel den Neigungswinkel der Hauptdiagonale gegen die Grundfläche. Der Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, wird stets in derjenigen Ebene gemessen, die durch die Gerade geht und auf der ersteren Ebene senkrecht steht, also in der projizierenden Ebene. Es handelt sich also um den Winkel zwischen den Geraden und ihrer Projektion auf die Ebene.

Jede Hauptdiagonale des Würfels bildet mit jeder der Würfel-  
flächen den Winkel  $35^\circ 15' 50''$ .

f) Welchen Winkel bildet jede Hauptdiagonale des Würfels mit den von ihr getroffenen Kanten?

**Auflösung.** Fig. 142 zeigt, daß es sich um den Komplement-  
winkel des vorigen handelt, also um  $\beta_1 = 54^\circ 44' 10''$ , für den  $\tan \beta_1 = \sqrt{2}$  ist.

**Bemerkung.** Man könnte auch nach der Neigung fragen, die eine Hauptdiagonale gegen Würfelkanten hat, mit denen sie sich nicht trifft. So sind z. B. die Diagonale  $BD_1$  und die Kante  $D$  einander kreuzende Geraden. Die Neigung der beiden gegeneinander wird durch den Winkel gemessen, denn man erhält, wenn man durch einen Punkt der einen dieser Geraden eine Parallele zur anderen legt. So ist z. B.  $D_1C_1 \parallel DC$ , es handelt sich also um den Winkel  $BD_1C_1 = 54^\circ 44' 10''$ . Die Neigung der Hauptdiagonalen gegen sämtliche Würfelkanten ist demnach dieselbe.

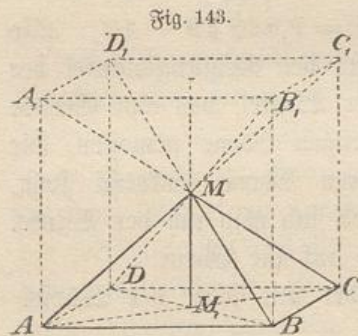
g) Man könnte ferner nach der kleinsten Entfernung der einander kreuzenden Geraden  $D$  und  $BD_1$  voneinander fragen.

**Auflösung.** Die Gerade  $DC$  ist parallel zu jeder durch  $D_1C_1$  gelegten Ebene, also auch parallel zu der durch  $D_1C_1$  und  $BD_1$  gelegten Ebene  $BC_1D_1A$ , die unter  $45^\circ$  gegen die Horizontalebene geneigt ist. Von dieser Ebene hat  $DC$  überall die Entfernung  $CJ = DH = k\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Verbindet man  $M$  mit dem Halbierungspunkte von  $DC$ , so erhält man den kleinsten Abstand der Geraden  $DC$  und  $BD_1$  voneinander, d. h. wiederum  $k\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Diese Verbindungslinie steht nämlich auf beiden Geraden senkrecht, was bei keiner zweiten Verbindungslinie ihrer Punkte stattfindet. Jede andere Verbindungslinie ist also länger.

In ähnlicher Weise bestimmt man allgemein für zwei einander kreuzende Geraden das gemeinschaftliche Lot und die kürzeste Entfernung beider voneinander.

h) In Fig. 143 sind die vier Diagonalen eines Würfels gezeichnet, welche eine senkrechte Pyramide von der quadratischen Grundfläche  $ABCD$  und der Spitze  $M$  bestimmen. Der Würfel läßt sich in sechs solche Pyramiden zerlegen; ist also  $a$  seine Kante, so hat jede dieser Pyramiden den Inhalt  $\frac{a^3}{6}$ . Dafür kann man schreiben  $\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$ , wenn man die Pyramidenhöhe  $\frac{a}{2} = h$  setzt. Setzt man noch die Grundfläche  $a^2 = F$ , so ist der Inhalt dieser Pyramide  $J = \frac{1}{3}Fh$ , d. h. der dritte Teil des Produkts aus Grundfläche und Höhe. (Diese Formel wird sich als für alle Pyramiden und Kegel gültig herausstellen.)

i) **Aufgabe.** Das Flächennetz des Würfels zu zeichnen und sein Kartonmodell anzufertigen.



Das Netz ist in Fig. 144 dargestellt und bedarf keiner Erläuterung (Vgl. Vorkursus § 75.)

k) Den Würfel von der Kante  $c = (a + b)$  gemäß der Gleichung

$$c^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

in Würfel von den Kanten  $a$  und  $b$ , in drei quadratische Säulen von der Grundfläche  $a^2$  und der Höhe  $b$ , und in drei quadratische Säulen

Fig. 144.

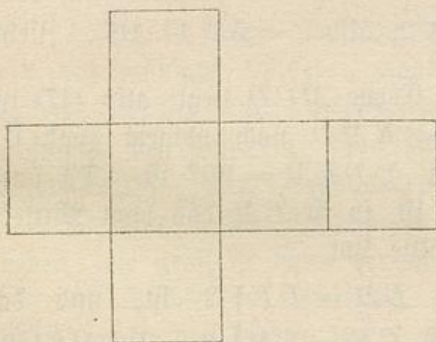
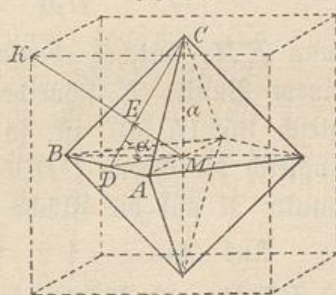


Fig. 145.



von der Grundfläche  $b^2$  und der Höhe  $a$  zu zerlegen. (Ein genaues Schrägbild wird gefordert.)

1) Die Kante eines Würfels sei  $c = a - b$ . Es soll stereometrisch gezeigt werden, daß

$$c^3 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ist. (Ein genaues Schrägbild wird gefordert.)

Zu beiden Aufgaben vgl. Vorkursus § 93.

**Bemerkung.** In der Mineralogie tritt der Würfel auf als Kristallform für Steinsalz, Flußpat, Silber, Gold, Bleiglanz, Schwefelkies usw.

7) **Aufgabe.** Das regelmäßige Achteck (Oktaeder) aus dem Würfel abzuleiten.

**Auflösung.** Die Mitten der Würfel Flächen sind die Ecken eines regelmäßigen Achtecks, welches ihm einbeschrieben ist. Dieses kann also leicht gezeichnet und berechnet werden. In Fig. 145 ist die Zeichnung ausgeführt. Ist  $a$  die Länge jeder Halbachse, so ist  $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ , also  $BC = a\sqrt{2}$ . Dies ist die Länge jeder der 12 Kanten der Körpers. Die 8 Flächen sind demnach gleichseitige Dreiecke. Es handelt sich also um das regelmäßige Oktaeder oder Achteck. Jede Fläche des Oktaeders ist, wenn man die Oktaederkante mit  $h$  bezeichnet,  $F = \frac{h^2}{4}\sqrt{3}$ , die gesamte Oberfläche also

$O = 2k^2\sqrt{3} = 4a^2\sqrt{3}$ . Der körperliche Inhalt wird erst später berechnet.

In der Stellung der Figur ist die Neigung jeder schrägen Kante gleich  $45^\circ$ . Jede Kante bildet mit den drei mit ihr zusammenstoßenden Kanten zwei Winkel von  $60^\circ$  und einen von  $90^\circ$ .

Die Neigung der Fläche  $ABC$  mißt man mit Hilfe der Mittellinie  $DC$  und der Geraden  $DM$ , da beide auf der Schnittkante  $AB$  der Fläche  $ABC$  und der Horizontalebene  $ABM$  senkrecht stehen.

Dabei ist  $\tan \alpha = \frac{MC}{DM} = \frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$ , also  $\alpha = 54^\circ 44' 10''$ . Zieht

man  $KM$ , welches ebenfalls in der Ebene  $MCD$  liegt, also  $CD$  in einem Punkte  $E$  schneidet, wobei  $\sphericalangle KMD$  nach obigem (vgl. 6) gleich  $35^\circ 15' 50''$  ist, so folgt, daß  $\sphericalangle DEM = 90^\circ$  ist. Da nun zugleich die Ebene  $CDM \perp ABC$  ist, so ist  $EM$  das vom Mittelpunkt  $M$  auf die Fläche  $ABC$  gefällte Lot.

Aus  $\tan \alpha = \sqrt{2}$  folgt, daß  $EM = DE\sqrt{2}$  ist, und da  $\triangle DEM \sim \triangle MEC$ , so folgt, daß  $CE = EM\sqrt{2} = DE\sqrt{2}\sqrt{2} = 2DE$  ist. Demnach ist  $E$  der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$ . Da  $DC = \frac{k}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ , also  $DE = \frac{DC}{3} = a\sqrt{\frac{1}{6}}$  ist, so folgt  $EM = DE\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ . Dies gilt für alle Flächen des Oktaeders. Folglich: Dem regelmäßigen Oktaeder läßt sich eine Kugel einbeschreiben, deren Radius  $\rho = a\sqrt{\frac{1}{3}}$  ist. Ebenso läßt sich ihm eine Kugel vom Radius  $r = a$  umbeschreiben.

Je zwei mit den Kanten aneinander stoßende Oktaederflächen bilden einen Winkel von der Größe  $2\alpha = 109^\circ 28' 20''$ , je zwei nur in einer Ecke zusammenstoßende bilden einen Winkel  $180^\circ - 2\alpha = 70^\circ 31' 40''$ . Man achte auf folgende Beziehungen:

Weil der Würfel 6 Flächen hat, besitzt das Oktaeder 6 Ecken,
" " " 8 Ecken " " " " 8 Flächen,
" " " 12 Kanten " " " " 12 Kanten,

denn jeder dreikantigen Ecke des Würfels liegt eine dreikantige Fläche des Oktaeders gegenüber, jeder vierkantigen Ecke des Oktaeders entspricht eine vierkantige Fläche des Würfels.

Je zwei einander gegenüberliegende Kanten bezw. Flächen der Oktaeders sind parallel.

Das Flächennetz des Oktaeders ist in Fig. 146 dargestellt. Die gleichseitigen Dreiecke sind dabei so angeordnet, daß in jeder Ecke des Körpers vier von ihnen zusammenstoßen.

**Bemerkung.** Das regelmäßige Oktaeder ist die Kristallform für Magneteisen und einige andere Eisenerze, für Rotkupfer, Schwefelkies, Bleiglanz, Silberglanz, Platin, Alaun, Gold usw.

8) **Aufgaben.** a) Bei einem regelmäßigen Oktaeder sei eine der Größen  $a, k, O, r, \rho$  gegeben. Die anderen sollen aus ihr berechnet werden.

b) Einer Kugel vom Radius  $r$  sei ein regelmäßiges Oktaeder einbeschrieben und das entsprechende umbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Halbachsen, ihrer Kanten, ihrer Oberflächen?

c) Eine dieser Differenzen sei gegeben, wie groß ist dann der Radius  $r$ ?

d) Suche zu beweisen, daß die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Oktaeders die Ecken des einbeschriebenen Würfels sind, zeichne die entsprechende Figur und berechne die neue Würfelkante aus der Halbachse des Oktaeders.

e) Einem Würfel sei ein Oktaeder, diesem ein Würfel eingezeichnet. Wie verhalten sich die Kanten der beiden Würfel?

f) Zeichne den ebenflächigen Körper, dessen Ecken die Halbierungspunkte der Oktaederkanten sind, und beschreibe und berechne diesen.

g) Löse dieselbe Aufgabe für die Halbierungspunkte der Kanten des Würfels. (Zu f) und g) vgl. Fig. 172.)

9) **Aufgabe.** Das regelmäßige Vierflach (Tetraeder) aus dem Würfel abzuleiten.

**Auflösung.** In Fig. 147 sind am Würfel vier dreiseitige Diagonalschnitte geführt, welche die gleichseitigen Dreiecke  $ABC, ACD, ADB$  und  $BCD$  gegeben haben. Diese begrenzen das gesuchte Vierflach oder Tetraeder  $ABCD$ . Die Zeichnung des so aufgestellten Körpers macht also keine Schwierigkeit. Daß seine Flächen gleichseitige Dreiecke von derselben Größe sind, reicht schon hin, ihn als einen regelmäßigen Körper erscheinen zu lassen. Man kann ihn als die einzige wirklich regelmäßige Pyramide betrachten.

Fig. 146.

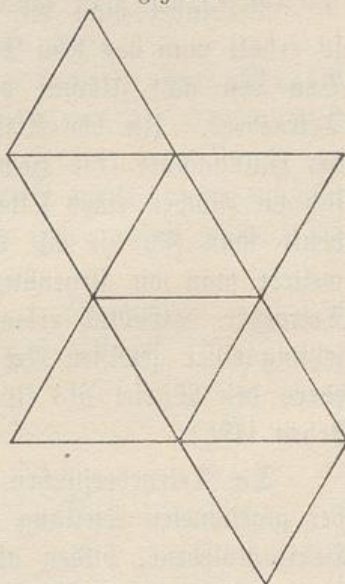
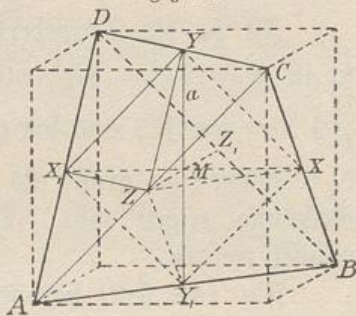


Fig. 147.



Verbindet man die Mitten der Gegenkanten dieses Vierflachs, so schneiden einander die Verbindungslinien in einem Punkte und bilden wieder das Achsenkreuz  $XX_1, YY_1, ZZ_1$  des Körpers.

Verbindet man die Mitten der Kanten auch in anderer Weise, so erhält man das dem Tetraeder einbeschriebene regelmäßige Achteflach. Von den acht Flächen des letzteren fallen vier in die Flächen des Tetraeders. In der Kristallographie wird daher das Tetraeder als der Halbflächner (die Hemiedrie) des Oktaeders bezeichnet. Denkt man sich die Flächen eines Oktaeders abwechselnd mit  $+$  und  $-$  bezeichnet, denkt man sich die mit dem Minuszeichen versehenen weg, und erweitert man die stehenbleibenden bis zum Schließen, so entsteht ein Tetraeder. (Endlich erkennt man an der Figur noch, daß die Aufsetzung einer gewissen Art von Pyramiden auf die Flächen des Tetraeders den Würfel als einen Sonderfall des Pyramidentetraeders entstehen läßt.)

Die Tetraederflächen haben demnach, wie die Oktaederflächen, in der gezeichneten Stellung sämtlich die Neigung  $54^\circ 44' 10''$  gegen die Horizontalebene, bilden also, wie an der Kante  $CD$  gezeigt werden kann, miteinander Winkel von der Größe  $180^\circ - 2(54^\circ 44' 10'') = 70^\circ 31' 40''$ . Die einbeschriebene Kugel stimmt mit der des Oktaeders überein, ist also vom Radius  $\rho = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ , wenn  $a$  die Länge der Halbachse  $MX$  ist. Die umbeschriebene Kugel dagegen hat den Radius  $r = MD = a\sqrt{3}$ , stimmt also mit der des Würfels überein. Da die Hauptdiagonalen des Würfels sich in einem Punkte  $M$  schneiden, und da jede von ihnen eine der Tetraederflächen senkrecht durchschneidet, so treffen sich die vier Höhen des Tetraeders in einem Punkte  $M$ , und von jeder ist durch diesen der vierte Teil abgeschnitten, weil  $r = 3\rho$  ist. Jede Tetraederfläche wird von den Kanten der übrigen Flächen unter Winkeln von der Größe  $54^\circ 44' 10''$  geschnitten.

Ist  $k_1$  die Tetraederkante,  $k$  die Würfelkante,  $a$  die Halbachse, so ist  $k_1^2 = 2k^2 = 8a^2$ , also  $k_1 = 2a\sqrt{2}$ , folglich jede Tetraederfläche  $\frac{k_1^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$  und die gesamte Oberfläche des Körpers  $O = 8a^2\sqrt{3}$ , d. h. doppelt so groß, als die Oktaederoberfläche, was sich auch ohne Rechnung zeigen läßt. Der körperliche Inhalt soll erst später berechnet werden.

Fig. 148 stellt das Flächenetz des Tetraeders dar.

Die Zahl der Ecken des Körpers ist 4, die der Kanten 6. Die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Tetraeders bilden wiederum ein regelmäßiges Tetraeder. Je zwei Gegenkanten des Tetraeders

kreuzen einander senkrecht. Legt man durch jede Kante eine Ebene parallel zur Gegenkante, so erhält man den umbeschriebenen Würfel (Fig. 148).

In der Mineralogie erscheint das Tetraeder mehrfach als Kristallform, z. B. beim Fahlerz, bei der Zinkblende usw.

[**Aufgabe.** Die beiden Tetraeder, die sich dem Würfel einzeichnen lassen, in ihrer gegenseitigen Durchdringung darzustellen.]

**Auflösung.** In Fig. 149 ist die Aufgabe gelöst, wobei zunächst alle Quadratdiagonalen des Würfels gezogen sind. Von je zwei sich

Fig. 148.

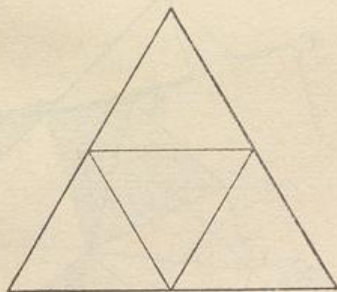
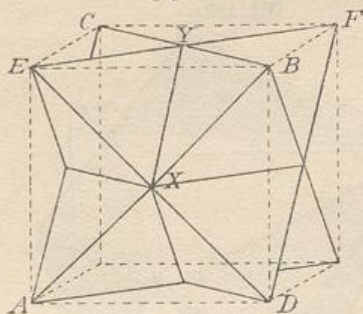


Fig. 149.



schneidenden Dreiecken, wie z. B.  $ABC$  und  $DEF$ , sind dabei je zwei Schnittpunkte, z. B.  $X$  und  $Y$ , zu suchen und durch eine Schnittlinie zu verbinden.\*)]

10) **Aufgaben.** a) Bei einem regelmäßigen Tetraeder sei eine der Größen  $a$ ,  $k$ ,  $O$ ,  $r$ ,  $\rho$  oder  $h$  (Höhe des Tetraeders =  $r + \rho$ ) gegeben. Die übrigen sollen daraus bestimmt werden.

b) Einer Kugel vom Radius  $r$  sei ein regelmäßiges Tetraeder um-, ein anderes einbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Kanten, ihrer Halbachsen, ihrer Oberflächen?

c) Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante  $k_1$  sei ein anderes einbeschrieben, dessen Ecken mit den Flächenmittelpunkten des anderen zusammenfallen. Die Kante des zweiten Tetraeders soll berechnet werden.

d) Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante  $k_1$  sei ein Würfel umbeschrieben. Die Kante desselben soll berechnet werden.

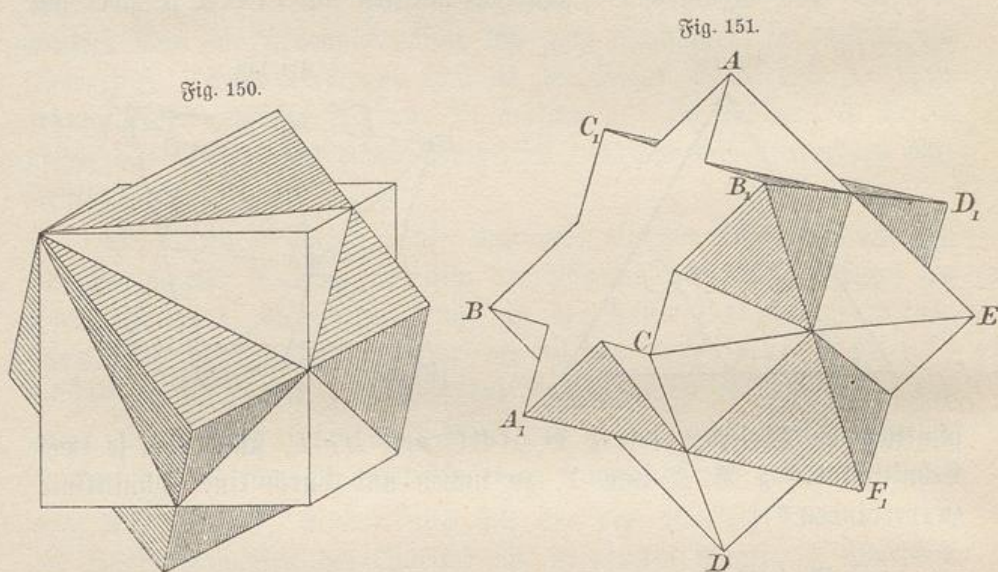
\*) Es empfiehlt sich, die sichtbaren Flächenteile jedes Tetraeders mit leichten Farbentönen so anzulegen, daß zusammengehörige Stücke sich deutlich hervorheben. Das gegenseitige Durchdringen tritt dabei klar hervor, und der Schüler übt sich darin, die ebene Zeichnung räumlich (plastisch) zu sehen.

e) Unter welchem Winkel schneiden sich die Flächen der beiden sich durchdringenden regelmäßigen Tetraeder der Fig. 149?

f) Zwei gleiche Würfel sollen eine Diagonale gemein haben und unter  $60^\circ$  gegeneinander gedreht sein. Wie sieht die gegenseitige Durchdringung aus?

(Fig. 150 stellt die Zeichnung dar, in der gewisse Würfelkanten halbiert sind. Der eine Würfel ist schraffiert, der andere weiß gelassen.)

g) Bei zwei gleichen Oktaedern sollen zwei Gegenflächen in dieselben Ebenen fallen, und die Körper sollen um  $60^\circ$  gegeneinander



gedreht sein, sodaß jene beiden Flächen als regelmäßige Sechsecksterne erscheinen. Wie sieht die gegenseitige Durchdringung aus?

(Fig. 151 stellt die Zeichnung dar. Der eine Körper ist schraffiert. Nur diejenigen Dreiecke sind unshraffiert, die den Sechseckstern vollenden.)

Zu beiden Aufgaben vgl. den Vorkursus.

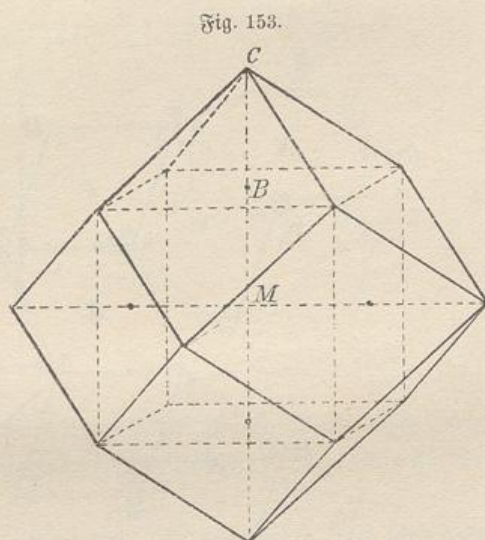
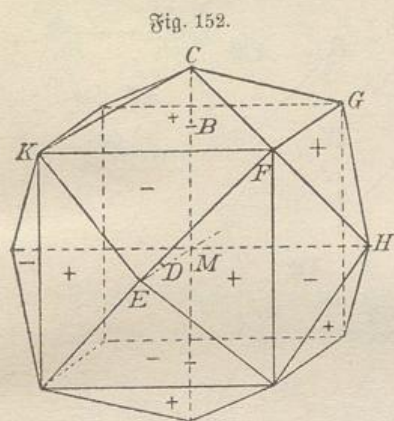
[11] **Aufgabe.** Auf die Flächen eines Würfels Pyramiden von gegebener Höhe so aufzusetzen, daß ein Pyramidenwürfel entsteht.

In Fig. 152 ist zunächst der gegebene Würfel gezeichnet und der Mittelpunkt jeder Fläche bestimmt. Dort sind auf jeder Fläche Lote von der gegebenen Länge  $BC$  errichtet, das nach vorn gerichtete Lot  $DE$  natürlich in der gewählten Verkürzung (z. B. in  $\frac{1}{3}$  der Länge) gezeichnet. Die Endpunkte der Lote sind mit den Würfelcken verbunden. Aus der Würfelkante  $k$  und der Pyramidenhöhe  $h$  lassen sich

Kanten, Oberfläche, Winkel, Radius  $\rho$  der einbeschriebenen Kugel usw. des Körpers berechnen. (Eine umbeschriebene Kugel hat der Körper nur in einem Sonderfalle. In welchem?)

Das Netz des Körpers ist leicht zu zeichnen. Hier wird angenommen, daß der Körper überall konvex ist, daß also die Pyramiden nicht so hoch sind, daß einspringende Winkel entstehen. Der Grenzfall soll der nachstehende sein. (Fig. 153.)

**Bemerkung.** Der Pyramidenwürfel ist als Kristallform in der Mineralogie von Bedeutung. Er wird hier besprochen, weil sich aus ihm andere Körperformen leicht ableiten lassen. Macht man die

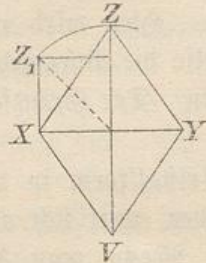


Pyramidenhöhe gleich der halben Würfelkante, so erhalten die Pyramidenflächen die Neigung  $45^\circ$  gegen die Würfelflächen, und die Kante zwischen je zwei benachbarten fällt weg, sodaß aus 24 Dreiecken 12 Rhomben entstehen. Fig. 153 stellt diesen besonderen Fall des Pyramidenwürfels, das Rhombenzwölfflach oder Rhombendodekaeder, dar. (Dies ist die häufigste Kristallform des Granats, der Körper wird daher auch als Granatoeder\*) bezeichnet.) Aus der Würfelkante  $k$  lassen sich die Kanten, die Oberfläche, die Winkel des Körpers leicht berechnen.]

Da die kleineren Diagonalen der Rhomben zugleich Würfelkanten sind, die größeren dagegen die Länge der zugehörigen Quadratdiagonalen haben, so sind die Rhomben leicht zu zeichnen. In Fig. 154 ist das

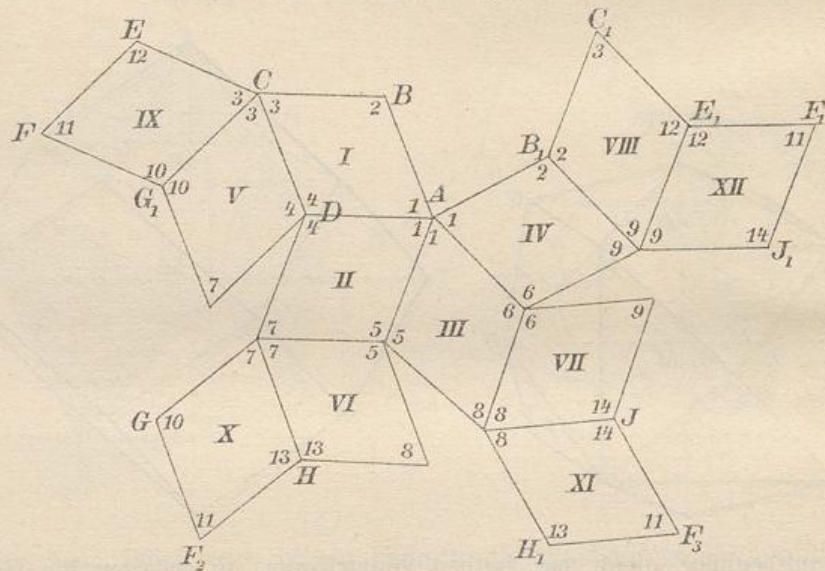
\*) Das Wort Granatoeder ist sprachlich als Mißbildung zu betrachten, läßt sich aber in der Mineralogie kaum vermeiden.

Flächennetz des Rhombenzwölfflachs konstruiert. Die Zahlen in den Winkeln der Flächen geben an, welche Ecken zusammenfallen, wenn man das Kartonmodell wirklich bildet.



12) a) Bezeichnet man die Flächen des Pyramidenwürfels abwechselnd mit + und -, wie es in Fig. 152 geschehen ist, läßt man die mit - bezeichneten Flächen wegfallen, und erweitert man die übrig bleibenden so weit, daß der Körper wieder geschlossen ist, so entsteht ein im all-

Fig. 154.



gemeinen von unregelmäßigen, aber symmetrischen Fünfecken begrenztes Zwölfflach, das Pentagondodekaeder. Dieses ist also der Halbflächner oder die Hemiedrie des Pyramidenwürfels. Aus Fig. 152 leitet sich die Konstruktion folgendermaßen ab: Je zwei stehenbleibende Pyramidenflächen bilden in ihrer Erweiterung ein Dach, dessen Firstlinie zu den Grundkanten parallel ist. Eine solche Firste ist durch  $C$  parallel zu  $KF$  zu legen. Rechts reicht sie bis zum Schnitte mit der durch  $H$  gehenden Mittellinie der Fläche  $FGH$ , wodurch die halbe Länge der Firstlinie gegeben ist. Eine solche von derselben Länge ist senkrecht durch  $E$  zu legen usw. Die Endpunkte dieser sechs Dachfirsten geben mit den Ecken des Würfels zusammen die  $12 + 8 = 20$  Ecken des gesuchten Körpers, der in einem Sonderfalle durch Fig. 155 veranschaulicht werde.

Das nicht von regelmäßigen, sondern von symmetrischen Fünf-

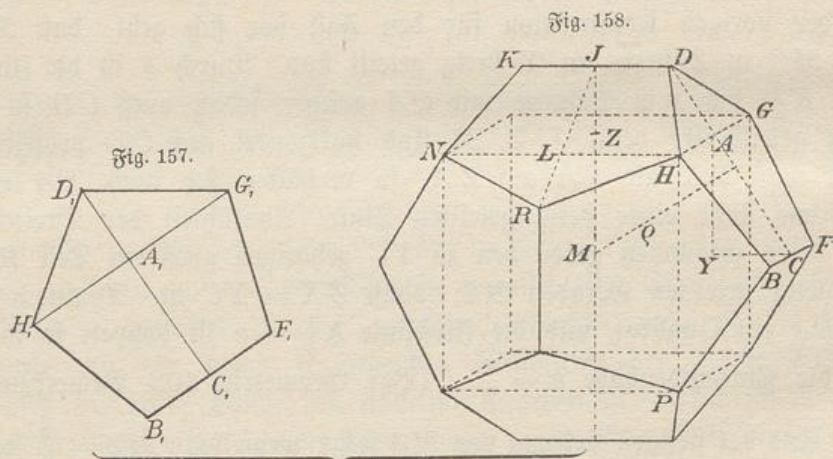


Demnach ist  $XA = \frac{d}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}(\sqrt{5} + 1) - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}(\sqrt{5} - 1)$ , was nach dem Gesetz des goldenen Schnittes auch ohne Rechnung folgt. Demnach ist  $AD = \sqrt{DX^2 + XA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{a}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ . Man denke sich nun in  $A$  auf der Zeichnungsebene ein Lot von der Länge  $\frac{d}{2}$  errichtet und dessen Endpunkt  $H$  mit  $D$  verbunden, dann hat man eine neue Kante  $HD$  des Körpers. Diese ist von der Länge  $HD = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16}(6 + 2\sqrt{5}) + \frac{a^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})}$  oder  $HD = a$ . Folglich: Nicht nur die Fächlinien, sondern auch die Verbindungslinien der Würfelcken mit den Endpunkten jener sind sämtlich von der Länge  $a$ , d. h. die Fünfecke des Körpers haben gleich lange Seiten. Sie sind zunächst nur symmetrisch, besitzen aber die Höhenabschnitte  $AD = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$  und  $AC = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ , welche die des regelmäßigen Fünfecks von der Seite  $a$  sind. Demnach sind die Flächen des entstandenen Pentagondodekaeders regelmäßige Fünfecke, und der Körper ist ein regelmäßiger.

Damit ist zunächst die Existenz des regelmäßigen Pentagondodekaeders bewiesen.

c) Nach Fig. 157 kann man es folgendermaßen herstellen:

Man nehme einen Würfel, dessen Kante gleich der Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks ist. Das Fünfeck lege man so an eine

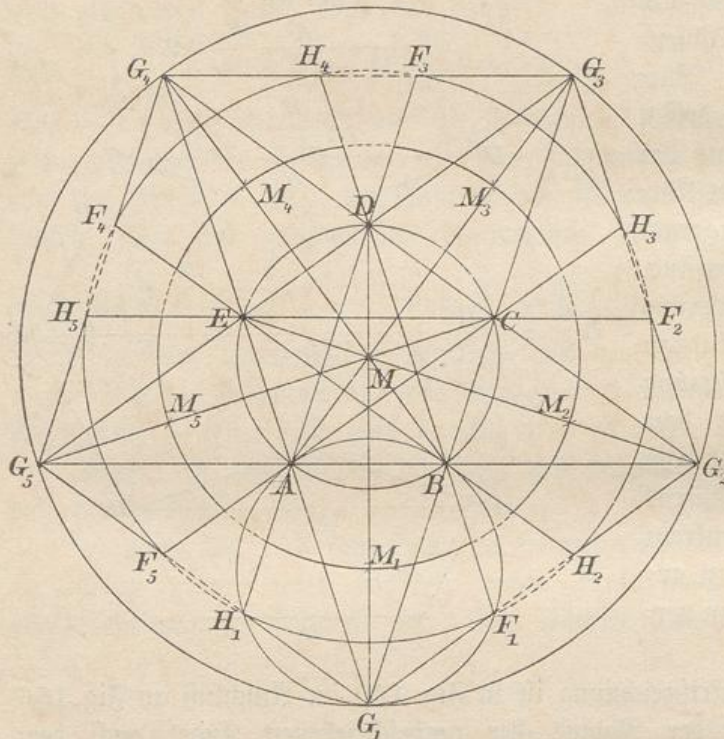


Würfelkante an, daß die Ecke  $D$  genau so weit von der zugehörigen Würfelkante entfernt ist, wie die Grundlinie  $BF$  von der zu dieser gehörigen (wobei die Entfernung gleich der halben Fünfeckskante ist).



h) Denkt man sich jedes der fünf äußeren Fünfecke der Figur so weit um die Kante geklappt, die sie mit dem innersten Fünfeck gemein haben, bis ihre Seitenkanten sich paarweise treffen, so entsteht eine Art Schüssel als Hälfte der Oberfläche des Körpers. Während der entsprechenden Bewegung wandern die einzelnen Punkte auf Kreisen, deren Projektionen auf die Grundfläche gerade Linien sind.

Fig. 160.



So wandert z. B. die Projektion von  $H_1$  auf der Geraden  $H_1E$ , die von  $F_5$  auf der Geraden  $F_5B$ . Wo  $H_1E$  und  $F_5B$  einander schneiden, da liegt die Projektion des den Punkten  $H_1$  und  $F_5$  entsprechenden Schüsselpunktes  $Z$ .\*) Ebenso geben  $F_1$  und  $H_1$  einen symmetrisch zu  $Z$  liegenden Schüsselpunkt

$Z_1$ , wobei  $ZZ_1 = H_1F_1$  und die Projektion der letzteren Linie in der neuen Lage ist.  $ZZ_1$  ist die Diagonale des zweiten regelmäßigen Fünfecks mit horizontaler Grundlinie, welches sich in den Kreis  $M_1$  legen läßt.  $AZ$  ist also die Seite des dem letzteren einbeschriebenen Zehnecks, also gleich  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ , wenn der Radius gleich 1 gesetzt wird. Dann ist  $MZ = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$  der Radius des zweiten der konzentrischen Kreise. Auf ihm liegen die fünf Punkte  $Z$  der Schüssel und zugleich die Punkte  $M_1$  bis  $M_5$ , denn auch  $MM_1$  ist gleich  $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ . Die erste Schüssel wird nämlich

\*) Man schreibe  $Z$  in Fig. 160 ein. Es ergibt sich der eine Punkt, wo der um  $M_1$  gelegte Kreis und der mit Radius  $MM_1$  um  $M$  gelegte einander schneiden. Der zweite Schnittpunkt ist mit  $Z_1$  zu bezeichnen.

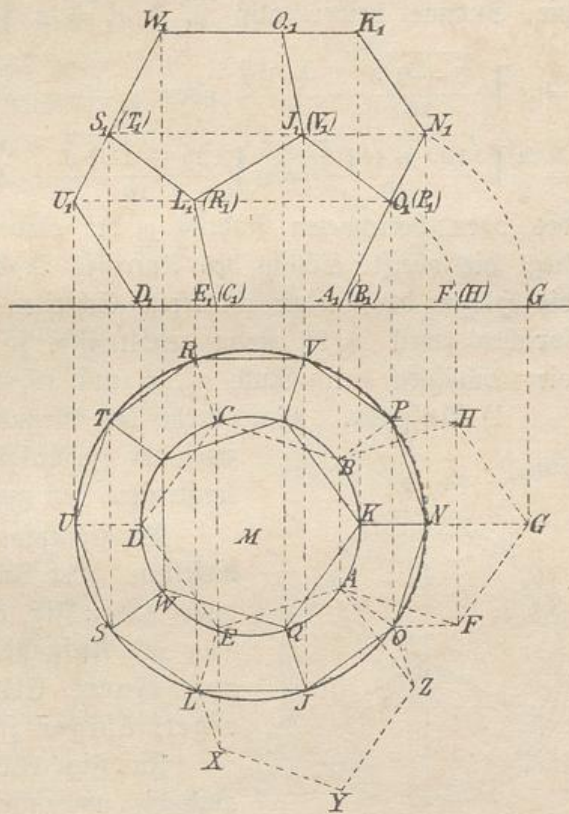
von der zweiten noch fehlenden Schüssel so bedeckt, daß die Spitzen von deren seitlichen Fünfecken mit den Punkten  $Z$  zusammenfallen, während die sonstigen Randpunkte nach den Punkten  $M_1$  bis  $M_5$  fallen, denn die Projektionen beider Teile sind kongruent. Folglich bilden die Projektionen der Randpunkte jeder der beiden Schüsseln im Grundriß das regelmäßige Zehneck der Punkte  $M_1$  bis  $M_5$  und der zwischenliegenden Punkte  $Z$  auf dem Kreise mit Radius  $MM_1$ . Dies läßt sich auch durch Rechnung nachweisen.

i) Somit ist die Grundrißzeichnung der Fig. 161 bequem herzustellen. Man denke sich konzentrische Kreise mit den Radien  $\rho = 1$  und  $r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ , deren Radien sich also verhalten wie die Teile einer nach dem goldenen Schnitte geteilten Geraden, gezeichnet. In den inneren Kreis lege man zwei regelmäßige Fünfecke mit je einer senkrechten Seite so, daß ihre Ecken ein regelmäßiges Zehneck bilden. Durch die Ecken lege man die Fortsetzungen von Radien, die bis zum äußeren Kreise reichen und zeichne das dadurch bestimmte Zehneck fertig.

Man ziehe die Geraden, die sichtbar oben liegen sollen, kräftig aus und deute die anderen gestrichelt an.

k) Für die gezeichnete Lage ergibt sich die Aufsrißzeichnung dadurch, daß man die Punkte des unteren Fünfecks nach der oberen Grundlinie projiziert, was dort Punkte  $A_1, (B_1), (C_1), D_1, E_1$  gibt. Das Nachbarfünfeck gibt außerdem im Aufsriß die Punkte  $F, G$  und  $(H)$ . Beim Aufklappen bewegen sich  $F$  und  $(H)$ , auch  $G$  auf Kreisen um  $A_1$  so weit, bis die Punkte in die senkrechten Geraden  $OPO_1$  bzw.  $NN_1$

Fig. 161.



fallen. In die durch  $O_1$  und  $N_1$  gelegten Horizontalen fallen dann die übrigen Punkte der Wände beider Schüsseln, die also leicht nach oben zu projizieren sind. Die obere Schüssel erscheint als der unteren kongruent, der Abstand der beiden obersten Höhengschichten ist also gleich dem der beiden untersten. Auch die Punkte des oberen Fünfecks sind nun leicht noch oben zu projizieren.

Die Aufrißzeichnung ist dieselbe, die in Fig. 159 gegeben war, nur ist die dortige Linie  $OJ$  jetzt horizontal gestellt worden.

[Denkt man sich den inneren Kreis einem Fünfeck von der Seite  $a$  umbeschrieben, dann ist der Radius  $\rho_1 = a \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{16}}$ , der des äußeren

Kreises ist das  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ -fache oder  $r_1 = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ ,

die Summe beider also  $\rho_1 + r_1 = a \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \left[ 1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]$

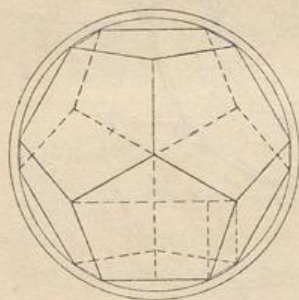
$= a \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  oder  $\rho_1 + r_1 = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} (14+6\sqrt{5})$

$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{100+44\sqrt{5}}{10}} = a \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$ . Dies ist aber das doppelte

des oben berechneten Radius  $\rho$  der einbeschriebenen Kugel, folglich liegt die oberste Schicht des Aufrisses in der Höhe  $r_1 + \rho_1$ , und da die Höhen der beiden mittleren Schichten der stetigen Teilung entsprechen (weil  $A_1N_1$  stetig geteilt ist), so sind die Höhenlagen aller vier Schichten durch Null,  $\rho_1$ ,  $r_1$  und  $(r_1 + \rho_1)$  gegeben.]

1) **Aufgabe.** Man drehe den Grundriß der Fig. 161 so, daß zwei der Zehneckseiten senkrecht werden und konstruiere den zugehörigen Aufriß.

Fig. 162.



Die Höhenlagen der Aufrißpunkte bleiben dieselben. Der Aufriß selbst fällt symmetrisch aus. (Vgl. Fig. 171 a.)

m) **Aufgabe.** Den Grundriß des auf einem Eckpunkte balancierenden regelmäßigen Zwölfflachs zu zeichnen.

In Fig. 162 ist die Aufgabe gelöst, auch die umbeschriebene Kugel mitgezeichnet.

13) **Aufgabe.** Man bestimme die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Zwölfflachs und untersuche das durch diese Eckpunkte bestimmte Polygon.

a) Je drei aneinander stoßende Flächen geben drei Mittelpunkte, die gleichweit von  $M$  entfernt sind und miteinander verbunden ein

gleichseitiges Dreieck geben. Der entstehende Körper ist ein dem Zwölfflach einbeschriebener von zwanzig regelmäßigen Dreiecken begrenzter regelmäßiger Körper, bei dem je fünf Flächen zu einer Ecke gehören. Während das Zwölfflach 12 Flächen, 20 Ecken und 30 Kanten hat, hat der neue Körper 12 Ecken, 20 Flächen und 30 Kanten. Er heißt das regelmäßige Zwanzigfläch oder Icosaeder.

Die Mitteln seiner Dreiecksflächen bilden ein ihm einbeschriebenes regelmäßiges Zwölfflach. In Fig. 163 ist es in der der Fig. 158 entsprechenden Lage gezeichnet.

b) Das Netz des regelmäßigen Zwanzigflachs zu zeichnen.

In Fig. 164 ist das Netz gezeichnet, wobei vom Dreiecke  $ABC$  ausgegangen ist. In die Winkel sind stets die Zahlen eingeschrieben, welche angeben, welche Ecken bei der Bildung des Modells zusammenfallen. (Im Vorkursus § 90 ist diese Angelegenheit eingehender erörtert worden.)

c) Die Ecken, die Flächen und die Kanten des Zwölfflachs hängen mit den Flächen bezw. Ecken und Kanten des Zwanzigflachs ebenso eng zusammen, wie die des Würfels und Oktaeders. Man nennt jedesmal den einen Körper den reziproken des anderen. Zwei Flächen des einen entsprechen zwei Eckpunkten des anderen, der Schnittlinie der ersteren entspricht die Verbindungslinie der letzteren. Denkt man sich den einen Körper als den einbeschriebenen des anderen, so entspricht jeder Geraden an dem einen eine sie rechtwinkelig kreuzende Gerade des anderen. (Dem Achsenkreuz des einen entsprechen Geraden, die in unendlicher Entfernung liegen und jene Achsen rechtwinkelig

Fig. 163.

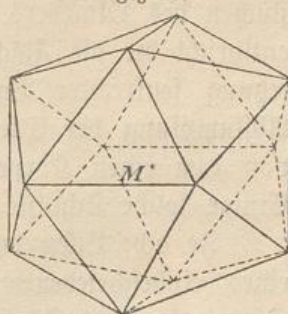
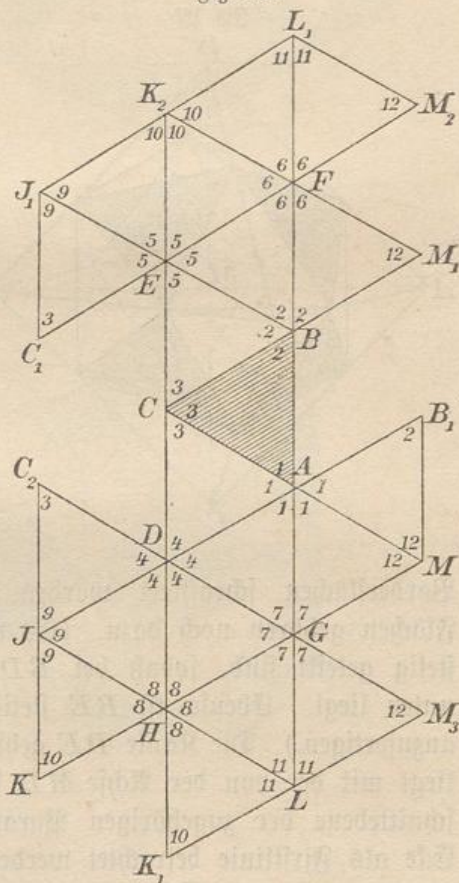
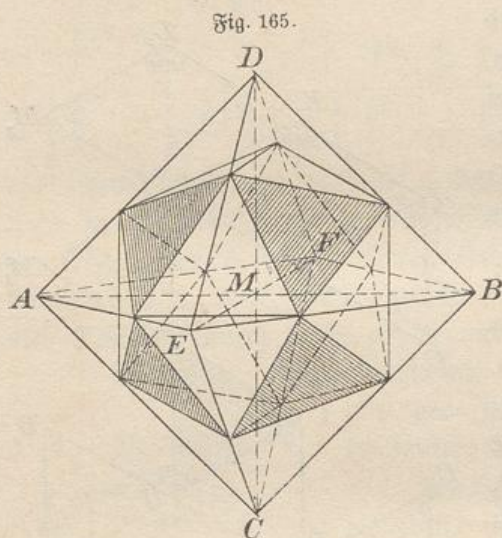


Fig. 164.



kreuzen. Dies gilt von jeder durch den Mittelpunkt gehenden Geraden.) Der Verbindungslinie zweier Gegenecken des Oktaeders z. B. entspricht die Schnittlinie der zugehörigen parallelen Gegenflächen des Würfels. Der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten des Würfels entspricht die Schnittlinie der zugehörigen parallelen Grenzflächen des Oktaeders. Der durch die Ecken gehenden Kugel des einen entspricht die die Flächen berührende Kugel des anderen. Der Aufsetzung senkrechter Pyramiden auf den einen entspricht regelmäßige Abstumpfung der Ecken des anderen usw. So kommt es, daß man von dem einen Körper unmittelbar auf den anderen schließen kann. Einige solche Schlüsse sollen gezogen und nachträglich bewiesen werden.

Je acht Ecken des regelmäßigen Zwölfflachs ließen sich als Ecken eines einbeschriebenen Würfels betrachten. Da jedesmal nur eine Diagonale jedes Fünfecks als Würfelkante zur Geltung kam, so ließen



sich dem Körper fünf Würfel einbeschreiben. Jedem Würfel aber ließen sich zwei Zwölffläche umbeschreiben, das der mit + bezeichneten Flächen des betreffenden Pyramidenwürfels und das der mit - bezeichneten Flächen. Beide Zwölffläche sind um  $90^\circ$  gegen einander gedreht. Folglich: Je acht Flächen des regelmäßigen Zwanzigflachs lassen sich als Flächen eines umbeschriebenen Achtecks betrachten. In Fig. 165 sind die betreffenden

Vorderflächen schraffiert worden, die vier entsprechenden hinteren Flächen gehören noch dazu. (Es wird sich zeigen, daß  $BD$  und  $ED$  stetig geteilt sind, sodaß bei  $BD$  der größere Teil oben, bei  $ED$  unten liegt. Ebenso ist  $BE$  stetig geteilt, die Zeichnung also leicht anzufertigen.) Die Kante  $DE$  geht durch eine Ecke des Icosaeders und liegt mit der von der Achse  $MD$  halbierten Firstlinie in einer Hauptschnittebene der zugehörigen Pyramide. Da aber jede Kante dieser Ecke als Firstlinie betrachtet werden kann, sind fünf solcher Oktaederkanten durch jede Ecke möglich. Folglich lassen sich dem Zwanzigflach fünf Oktaeder umbeschreiben. Jedem Oktaeder lassen sich zwei Zwanzigflache einbeschreiben, die um  $90^\circ$  gegeneinander gedreht sind,

z. B. um die Achse  $CD$ . Unten sind die beiden Körper dargestellt. (Fig. 167).

Die beiden demselben Würfel umbeschriebenen Zwölf-  
flache haben einen Pyramidenwürfel gemein, bei dem die Verlängerung der Halb-  
achsen einer stetigen Teilung  
entsprach. Folglich: Die bei-  
den demselben Oktaeder  
angehörigen Ikosaeder  
sind demselben abge-  
stumpften Oktaeder ein-  
beschrieben, bei dem die  
Abstumpfung einer steti-  
gen Teilung der Halb-  
achse entspricht. Der Wür-  
fel und die beiden ihm um-  
beschriebenen Zwölf-  
flache haben dieselbe umbeschriebene Kugel,  
der Pyramidenwürfel und die  
beiden Zwölf-  
flache haben die-  
selbe eingeschriebene Kugel.  
Folglich:

Das Oktaeder  
und die beiden  
ihm eingeschrie-  
benen Zwanzig-  
flache haben die-  
selbe eingeschrie-  
bene Kugel; das  
abgestumpfte Ok-  
taeder und die  
beiden Zwanzig-  
flache haben die-  
selbe umbeschrie-  
bene Kugel.

In Fig. 166  
sind die beiden dem-  
selben Würfel um-  
beschriebenen Zwölf-  
flache in ihrer Durch-  
dringung dargestellt. Das eine von beiden ist schraffiert worden. Der Würfel  
und ebenso der gemeinschaftliche Pyramidenwürfel sind leicht zu erkennen.

Fig. 166.

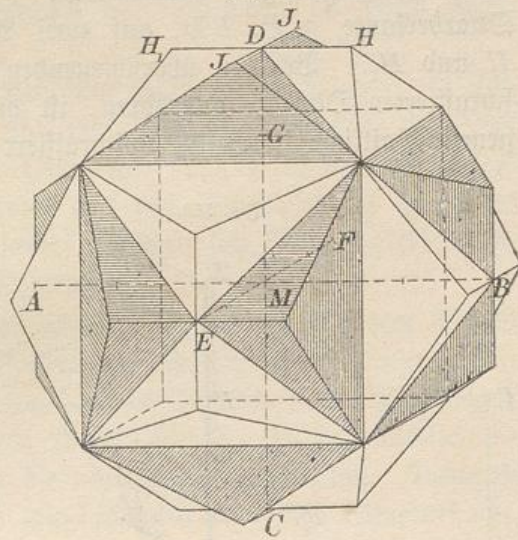


Fig. 167.

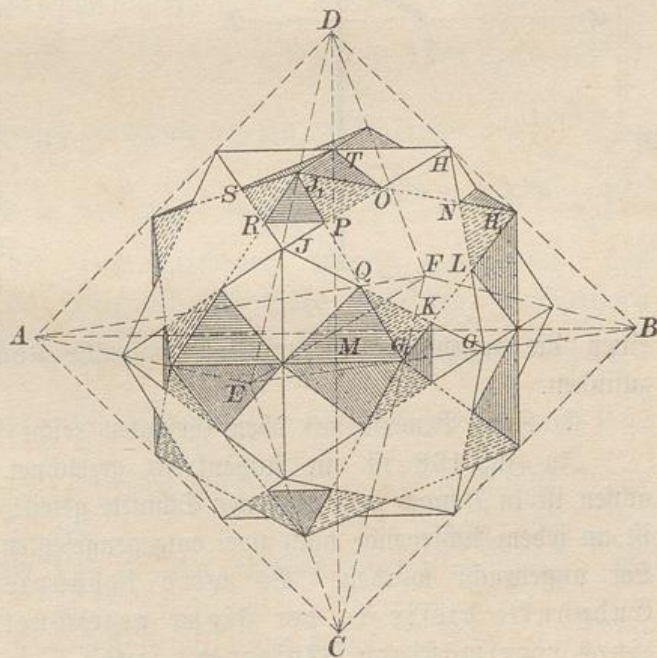
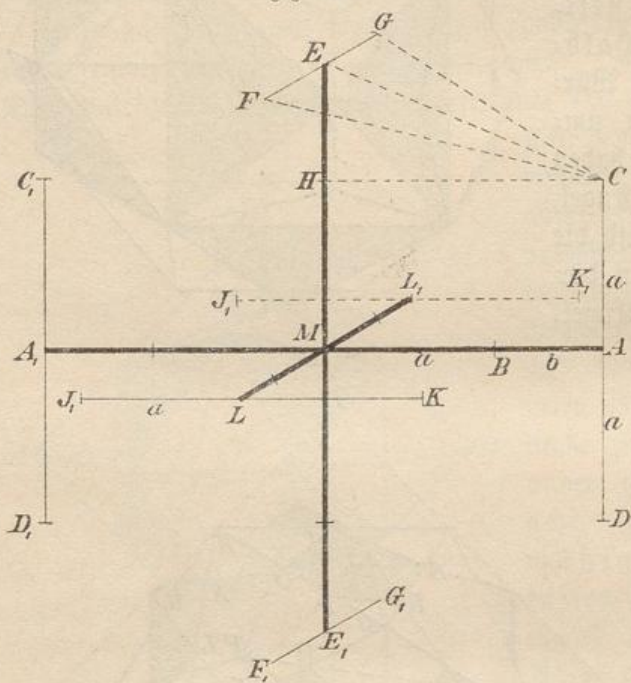


Fig. 167 stellt die beiden demselben Oktaeder einbeschriebenen Ikosaeder in ihrer Durchdringung dar. Das eine von beiden ist schraffiert worden, nur war bei der Schraffierung folgendes zu beachten: In der Oktaederfläche  $EBD$  liegen zwei gleichseitige Dreiecke  $JGH$  und  $J_1G_1H_1$  der beiden Zwanzigfläche aufeinander und bilden einen unregelmäßigen Sechseckstern. (Es wird sich zeigen, daß jede Oktaederkante, z. B.  $BD$ , auf zwei Arten stetig geteilt ist, z. B. in  $H$  und  $H_1$ .) Bei den überschießenden Dreiecken des Sterns, die dem schraffierten Oktaeder angehören, ist die Schraffierung angedeutet, die gemeinschaftliche Fläche ist ungeschraffiert gelassen. Diesem Sechseckstern entspricht in Fig. 166 die an der entsprechenden Würfelcke befindliche „Sterncke“ mit einspringenden Winkeln.

Fig. 168.



entspricht in Fig. 166 die an der entsprechenden Würfelcke befindliche „Sterncke“ mit einspringenden Winkeln.

Das Oktaeder ist durch quadratische Flächen abgestumpft (entdeckt), von denen nur die Diagonalen gezeichnet sind.

Man versuche zu jedem Punkte oder jeder Fläche der einen Figur die zugehörige Fläche bzw. den zugehörigen Punkt der anderen zu bestimmen, zu jeder Kante der

einen die zugehörige rechtwinklig kreuzende Kante der anderen aufzufinden.

d) Zum Beweise des oben Gesagten reicht folgendes hin.

In Fig. 168 ist ein Achsenkreuz gezeichnet. Eine seiner Halbachsen ist in  $B$  nach dem goldenen Schnitte geteilt. Der größere Teil  $a$  ist an jedem Achsenende nach zwei entgegengesetzten Achsenrichtungen als Lot angebracht worden. Es wird behauptet, daß die zwölf Endpunkte dieser in der Figur gezeichneten Lote die Ecken eines regelmäßigen Ikosaeders sind.

**Beweis.**  $FC^2 = FE^2 + EC^2 = FE^2 + HC^2 + HE^2$ . Setzt man  $MB = a$ ,  $BA = b$ , also  $MA = a + b$ , so erhält man  $FE = a$ ,

$HC = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$ ,  $BA = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ . Daher wird  $FC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}(5 + 1 + 2\sqrt{5}) + \frac{a^2}{4}(5 + 1 - 2\sqrt{5}) = 4a^2 = (2a)^2$ . Da  $FG = 2a$ ,  $FC = 2a$  und ebenso  $GC = 2a$  ist, so ist  $FGC$  ein gleichseitiges Dreieck. Solcher gleichseitigen Dreiecke lassen sich an dem Gebilde zwanzig nachweisen, folglich sind die Ecken die eines regelmäßigen Zwanzigflächs.

**Bemerkung.** Verlängert man jede Halbachse noch um  $a$ , so sind die neuen Achsen stetig geteilt und man erhält die Eckpunkte des einen dem Ikosaeder umbeschriebenen Oktaeders. Daß z. B. die Kante  $DE$  in Fig. 165 stetig geteilt ist, folgt aus dem Parallelismus von  $EM$  und der „Firstlinie“. Im Ikosaeder befinden sich  $\frac{30}{6} = 5$  gleichberechtigte Achsenkreuze, ebenso im Dodekaeder.

Die Verbindungslinie jedes Flächenmittelpunktes mit dem Mittelpunkt des Körpers gibt den Radius der einbeschriebenen Kugel. Die Fläche  $FKC$  liegt so in dem zugehörigen Oktaeder des Achsenkreuzes, daß  $\rho$  mit allen Achsen denselben Winkel bildet. Es hat nämlich die Lage einer Würfel diagonale für die normale Würfelstellung. Demnach ist die zugehörige Normalfläche, wie behauptet war, eine Oktaederfläche.

[e] Der Radius der umbeschriebenen Kugel des Ikosaeders ergibt sich bei der gewählten Bezeichnung aus  $FM^2 = ME^2 + EF^2 = (a+b)^2 + a^2 = \left[\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)\right]^2 + a^2 = \frac{a^2}{4}[5 + 1 + 2\sqrt{5} + 4] = \frac{a^2}{2}(5 + \sqrt{5})$ ,  
sodass unter Voraussetzung der Kante  $k = 2a$  der Radius  $r = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$

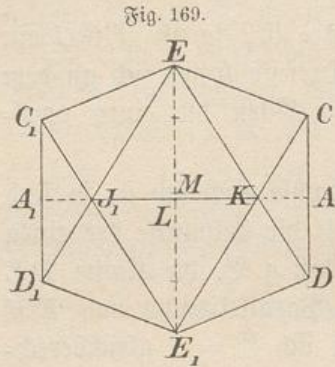
ist. Für die Kante  $k$  ist demnach  $r = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = k\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$ .

Der Radius der einbeschriebenen Kugel ergibt sich aus  $\rho^2 = ME^2 - \left(\frac{1}{3}EC\right)^2$ . Hier ist die Höhe  $EC$  des gleichseitigen Dreiecks von Seite  $2a$  gleich  $\frac{2a}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{3}$ , also  $\frac{1}{3}EC = \frac{1}{3}a\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ . So folgt  $\rho^2 = \left[\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)\right]^2 - (a\sqrt{\frac{1}{3}})^2 = \frac{a^2}{4}(6 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}[9 + 3\sqrt{5} - 2] = \frac{a^2}{6}(7 + 3\sqrt{5})$ . Demnach ist bei der Kante  $k = 2a$  der Radius  $\rho = a\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$ , für

die Kante  $k$  also ist  $\rho = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = k\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}}$ .

f) **Aufgabe.** Das Ikosaeder im Anschluß an Fig. 168 im Aufriß zu zeichnen.

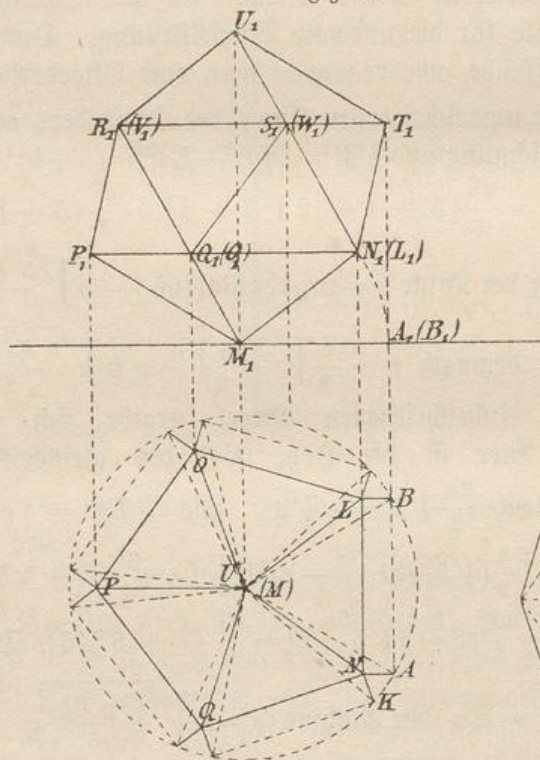
**Auflösung.** Die in Fig. 169 gegebene Darstellung unterscheidet sich von der in Fig. 163 und 168 gegebenen nur dadurch, daß die dritte Achse in der Länge Null erscheint, ebenso die beiden zu ihr parallelen Firstlinien.



Der Grundriß ist leicht dazu zu konstruieren. Er sieht ebenso aus und ist nur um  $90^\circ$  gedreht zu zeichnen.

g) Die Grund- und Aufrißzeichnung des Ikosaeders nach der Aufklappmethode herzustellen. In Fig. 170 sind im Grundriß zunächst fünf gleichseitige Dreiecke regelmäßig um einen Punkt gruppiert worden, wobei das eine eine senkrechte Seite haben soll. Jedes Dreieck soll um eine Achse gedreht werden, die durch den gemeinschaftlichen Eckpunkt  $M$  geht und zur betreffenden Gegenseite parallel ist. Die Drehung soll so weit gehen, bis die Kanten gleichmäßig aneinander stoßen, sodas eine Art Trichter entsteht, d. h. eine auf der Spitze balancierende fünfseitige Pyramide. Dabei bewegen sich z. B. die Projektionen von  $A$  und  $B$  normal gegen

Fig. 170.



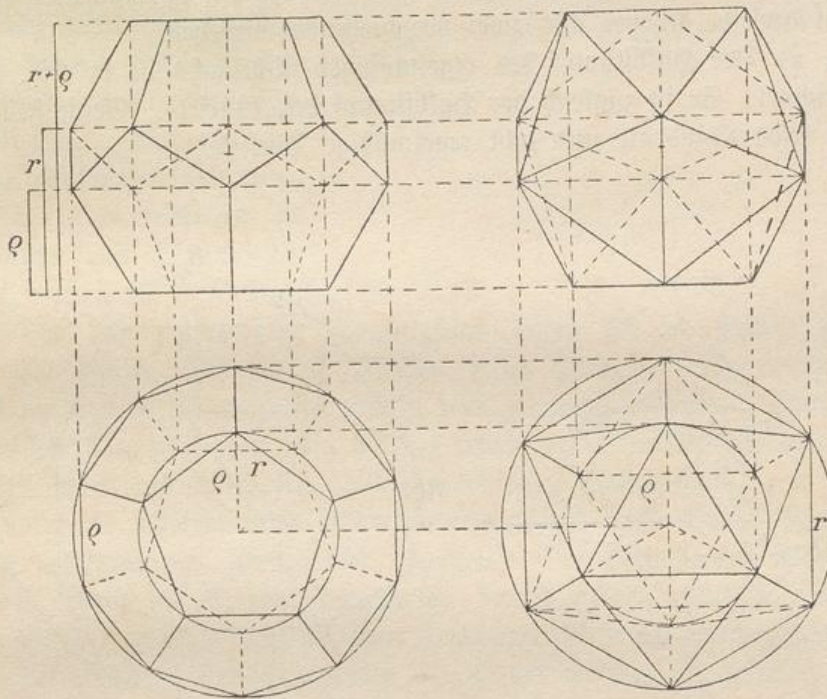
parallel ist. Die Drehung soll so weit gehen, bis die Kanten gleichmäßig aneinander stoßen, sodas eine Art Trichter entsteht, d. h. eine auf der Spitze balancierende fünfseitige Pyramide. Dabei bewegen sich z. B. die Projektionen von  $A$  und  $B$  normal gegen

$AB$ . Ebenso machen es die übrigen Außenpunkte, und so entsteht in der Figur das Grundrißfünfeck  $NLOPQ$ , dessen Ecken mit  $M$  zu verbinden sind.

Der Aufriß dieses Trichters entsteht folgendermaßen:  $M$ ,  $A$  und  $B$  geben, auf die Grundlinie des Aufrißes projiziert,  $M_1$ ,  $A_1$  und  $(B_1)$ . Man schlage mit  $M_1A_1$  einen Kreisbogen um  $M$  so weit, bis  $N_1$  und  $(L_1)$  senkrecht über  $NL$  liegen. Damit ist die Höhenlage für das Fünfeck  $N_1L_1O_1P_1Q_1$  gefunden. Zugleich zeigt sich, daß durch die Gerade  $M_1Q_1$  bzw.  $M_1O_1$  die Ebene des Fünfecks  $M_1Q_1R_1V_1O_1$  dargestellt ist. Dieses Fünfeck erscheint in derselben Projektionszeichnung wie das vorige, also ist  $M_1Q_1 = P_1Q_1$  und  $Q_1R_1 = Q_1N_1$ , also  $\triangle P_1M_1Q_1$  gleichschenkelig und, wenn man noch  $P_1R_1$  zieht,  $\triangle Q_1M_1N_1 \cong \triangle Q_1P_1R_1$ . Mit  $R_1$  ist die Höhenlage für das obere Fünfeck  $R_1V_1S_1W_1T_1$  gefunden. Der oberste Trichter (Pyramide) ist

Fig. 171 a.

Fig. 171 b.



zum untersten kongruent zu zeichnen, jedoch entsprechend zu drehen. Die Figur ist leicht zu vollenden. Der Aufriß stimmt mit dem in Fig. 169 gegebenen überein, nur sind zwei der schrägen Parallelen horizontal gestellt worden, die Achse  $AB$  dagegen senkrecht. Gegen  $Q_1S_1$  findet Symmetrie statt. In der nebenstehenden Figur ist der Grundriß vollendet, der sich als ein regelmäßiges Zehneck mit zwei einbeschriebenen Fünfecken und den zugehörigen Radien darstellt.

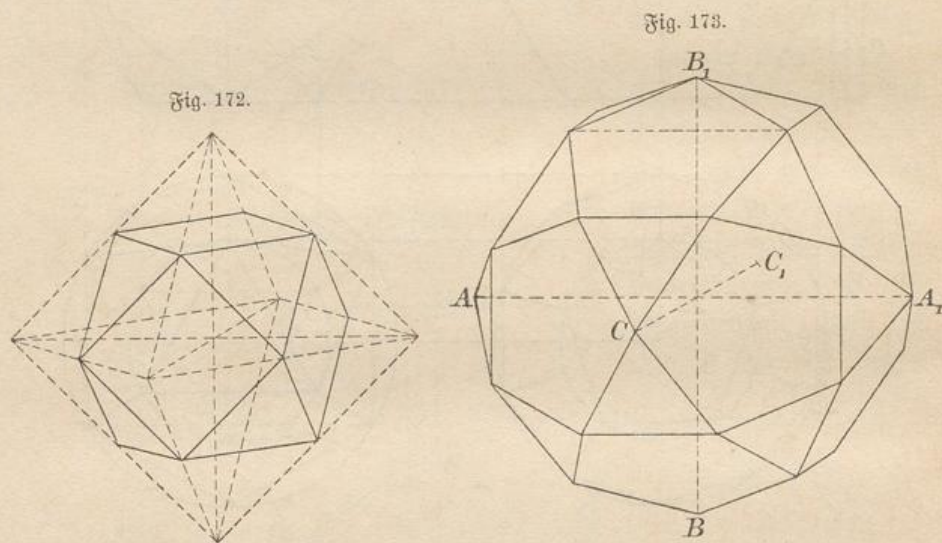
h) **Aufgabe.** Den Grundriß Fig. 170 so zu drehen, daß zwei Zehneckseiten senkrecht werden. Im Aufriß findet dann nur Hori-

zontalverschiebung statt, und die Figur wird symmetrisch gegen eine vertikale Achse.

i) **Aufgabe.** Das auf einer Fläche stehende Icosaeder im Grund- und Aufriß darzustellen. (In Fig. 171 b ist die Aufgabe gelöst. Dabei ist gezeigt, daß, wenn man im Grundriß dieselben Hilfskreise wählt wie beim Pentagondodekaeder, die vier Punktschichten des Aufrisses in dieselben Höhen fallen wie bei diesem. Der Schüler führe die Konstruktion und die Beweise selbst aus.)

14) Einige Halbstumpfe und ihre reziproken Körper. Unter Halbstumpf soll ein Körper verstanden werden, der dadurch aus einem anderen entsteht, daß man die Kanten des letzteren halbiert und die Abstumpfung der Ecken (Enteckung) bis dorthin durchführt. Dabei kann derselbe Körper aus zwei verschiedenen entstehen.

a) Der Halbstumpf des regelmäßigen Achteflachs ist in Fig. 172 gezeichnet. Er ist zugleich der Halbstumpf des Würfels. Seine Flächen sind sechs Quadrate und acht regelmäßige Dreiecke.



Die Flächenmitten dieses Körpers bilden ein Rhombenzwölfflach, welches demnach der reziproke Körper ist. Der Abstumpfung des Würfels oder Oктаeders bis zur Kantenmitte entspricht also ein Aufsetzen so hoher Pyramiden auf die Würfel- oder Oктаederflächen, daß je zwei benachbarte Pyramidenflächen in dieselbe Ebene fallen und nur die halbe Anzahl von Flächen bestehen bleibt.

b) Der Halbstumpf des regelmäßigen Zwanzigflachs ist in Fig. 173 dargestellt. Er ist zugleich der des regelmäßigen Zwölfflachs. Er

zeigt als Flächen zwölf regelmäßige Fünfecke und zwanzig gleichseitige Dreiecke. Dem Achsenkreuz entspricht ein einbeschriebenes Oktaeder.

Die Flächenmitten dieses Körpers liegen auf einem Rhombendreißigflach. Dieses ist in Fig. 174 dargestellt. Beide Körper sind reziprok zueinander. Die unterste und oberste Fläche des Rhombendreißigflachs, die vorderste und hinterste, die linke und rechte sind Flächen eines umbeschriebenen Würfels.

In das regelmäßige Zwölfflach lassen sich im ganzen fünf Würfel einstellen. Die dreißig Würfel­flächen umhüllen ein Rhombendreißigflach, während die Ecken der Würfel (von denen je zwei zusammenfallen, so daß ihre Zahl  $\frac{40}{2} = 20$  beträgt) die Ecken des Dodekaeders bilden.

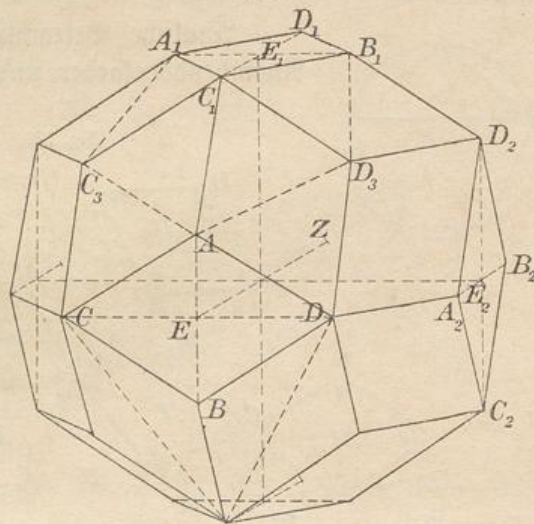
Um das regelmäßige Zwanzigflach lassen sich im ganzen fünf Oktaeder legen. Die vierzig Flächen dieser Oktaeder, von denen je zwei in dieselbe Ebene fallen, so daß nur zwanzig selbständig bestehen, umhüllen das Icosaeder, die dreißig Ecken der Oktaeder liegen aber in den Ecken des durch Fig. 173 dargestellten Halbstumpfs.

Auf die Flächen eines Rhombendreißigflachs lassen sich die Kanten eines regelmäßigen Zwölfflachs zeichnen. Die betreffenden Fünfecke werden durch die kleinen Diagonalen der Rhomben gebildet. Aber auch die Kanten eines regelmäßigen Zwanzigflachs lassen sich aufzeichnen. Die betreffenden Dreiecke werden durch die großen Diagonalen der Rhomben gebildet.

Da  $C_3D_3$  Diagonale des Fünfecks und gleich  $CD$  ist,  $A_1B_1$  dagegen als Fünfecksseite auftritt, so verhalten sich die kleineren und die größeren Diagonalen jedes Rhombus wie die Teile einer stetig getheilten Geraden. Das Netz des Körpers ist daher mit Hilfe eines regelmäßigen Fünfecks oder der stetigen Teilung leicht herzustellen. In Fig. 175 ist die Hälfte des Netzes gezeichnet und dabei angedeutet, welche Ecken beim Bilden des Modelles zusammenfallen.

Die genannten Eigenschaften des Rhombendreißigflachs hängen damit zusammen, daß es der Zwischenfall für das Pyramidenzwölfflach

Fig. 174.



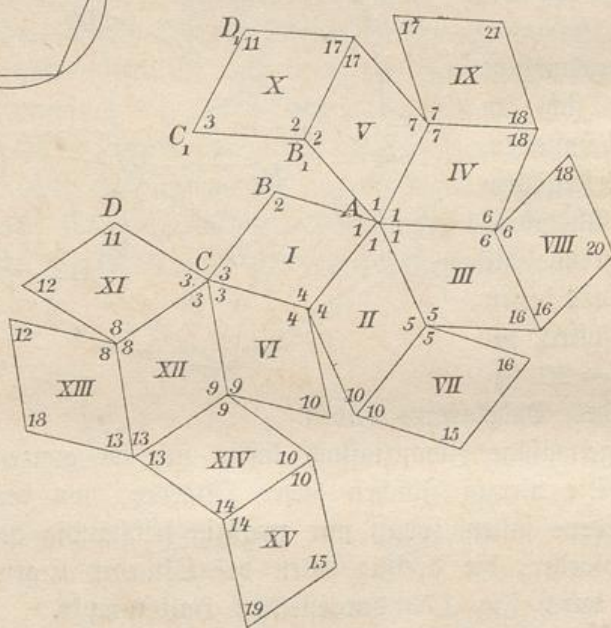
bezw. das Pyramidenzwanzigflach ist, bei dem je zwei Pyramidenflächen zu einer zusammenfallen, sodaß nur  $\frac{5 \cdot 12}{2}$  bezw.  $\frac{3 \cdot 20}{2}$  oder 30 Flächen bestehen bleiben.

Diesen Eigenschaften stehen reziproke des zugehörigen Halbstumpfs gegenüber, welche aufzufuchen dem Schüler überlassen bleiben soll. —

Ähnliche Betrachtungen versuche man für das Rhombendodekaeder und den Halbstumpf des Würfels auszuführen.



Fig. 175.



Der Halbstumpf des Tetraeders ist ein Dktaeder.

15) Wie sich dem Rhombendodekaeder fünf Würfel einbeschreiben lassen, lassen sich ihm auch zehn Tetraeder einbeschreiben, denn in jedem Würfel können zwei eingezeichnet werden.

Von diesen Tetraedern kann man je fünf aussuchen, die keine Ecke miteinander gemein haben.

Denkt man sich also die zwanzig Ecken eines regelmäßigen Zwölfflachs gezeichnet, so kann man stets je vier als Ecken eines Tetraeders betrachten. Diese Tetraeder bilden den sogenannten Stern der fünf Tetraeder. Dieser ist durch Fig. 176 dargestellt. So sind z. B.  $A_1, B_1, C_1, D_1$  Ecken eines Tetraeders, davon  $D_1$  die auf der Rückseite zu denkende. (Der Punkt hat noch eine andere Bedeutung. Jede Tetraederkante ist an zwei Stellen stetig geteilt, z. B.  $B_2 C_2$  in  $D_1$  und in dem durch  $A_2$  verdeckten Punkte, auch ist sie halbiert an der Stelle, wo sie zwischen zwei Tetraederflächen wieder sichtbar werden möchte, ohne jedoch ins Freie zu gelangen. Jede der auftretenden Schnittlinien geht verlängert durch eine der Tetraederecken. Die zwanzig Flächen umhüllen ein Ikosaeder.)

Um das Ikosaeder ließen sich fünf Oktaeder legen, von denen jedes zwei umbeschriebene Tetraeder als Halbflächner hat. Wählt man von den zehn Tetraedern ebenfalls fünf voneinander freie aus, so entsteht wieder ein Stern von fünf Tetraedern. Der reziproke Körper zu einem solchen Tetraederstern ist also wieder ein solcher. —

16) Bemerkungen über die regelmäßigen oder Platonischen Körper. Von den regelmäßigen Körpern sind drei von gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Beim Tetraeder stoßen in jeder Ecke drei Dreiecke zusammen, beim Oktaeder vier, beim Ikosaeder fünf. Ein weiterer von Dreiecken begrenzter Körper ist nicht möglich, denn sechs gleichseitige Dreiecke bilden keine Ecke, sondern fallen, da  $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$  ist, in dieselbe Ebene. Ein Winkel von mehr als  $360^\circ$  ist ferner unmöglich, da die Summe der Winkel um einen Punkt bei einer konvexen Ecke  $360^\circ$  nicht übersteigen kann.

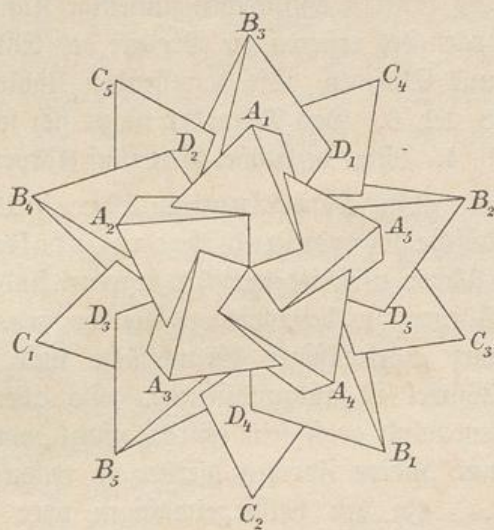
Ein regelmäßiger Körper, der Würfel, ist von Quadraten begrenzt, von denen je drei in jeder Ecke zusammenstoßen. Ein weiterer von Quadraten begrenzter Körper ist unmöglich, denn vier Quadrate bilden keine Ecke, sie fallen in dieselbe Ebene, da  $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$  ist. Noch mehr Quadrate können erst recht keine Ecke bilden.

Ein regelmäßiger Körper, das Zwölfflach, war von regelmäßigen Fünfecken begrenzt. Ein weiterer von solchen begrenzter Körper ist unmöglich, da  $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$  den Winkel von  $360^\circ$  schon überschreitet.

Ein von regelmäßigen Sechsecken begrenzter Körper ist unmöglich, denn drei solcher Flächen können keine Ecke bilden, sondern sie fallen, da  $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$  ist, in dieselbe Ebene.

Bei drei Siebenecken würde der Winkel von  $360^\circ$  schon weit überschritten werden. Folglich gibt es nicht mehr als die genannten fünf regelmäßigen Vielfläche. Als Grenzfall, d. h. als regelmäßiges Unendlichfläch, können nur die Kugel oder etwa die unbegrenzte Ebene gelten, denn auf der letzteren lassen sich unendlich viele gleichseitige Dreiecke oder Quadrate oder regelmäßige Sechsecke lückenlos aneinander schließen.

Fig. 176.



Von den fünf regelmäßigen Polyedern sind das Zwölfflach und das Zwanzigflach reziproke. Die Zahl der Flächen, Kanten, Ecken ist beim ersteren 12, 30, 20, beim letzteren 20, 30, 12. Den Fünfecken des ersteren entsprechen fünfeckige Kanten des letzteren, den dreikantigen Ecken des ersteren die Dreiecke des letzteren. Reziprok sind auch Würfel und Oktaeder. Die betreffenden Zahlen sind bei beiden 6, 12, 8 bzw. 8, 12, 6. Das Tetraeder ist zu sich selbst reziprok. Die Zahlen sind 4, 6, 4. Man bezeichnet diese fünf Körper als die Platonischen Körper.

17) Bemerkungen über halbregelmäßige oder Archimedische Körper und ihre reziproken. Körper, die von regelmäßigen Flächen verschiedener Art begrenzt sind, pflegt man als halbregelmäßige Körper zu bezeichnen. Hierher gehören eigentlich auch alle Säulen von regelmäßiger Grundfläche und quadratischen Seitenflächen (der Würfel ist auszuschließen). Da aber dann die Anzahl der Formen unendlich groß sein würde, pflegt man die Säulen auszuschließen und nur andere Formen hierher zu rechnen.

Zu den halbregelmäßigen oder Archimedischen Körpern gehören die beiden oben betrachteten Halbstumpfe des Würfels (oder Achtflachs) und des Zwölfflachs (oder Zwanzigflachs). Es gibt solche Körper mit zwei Arten von Flächen, die Dreiecke und Quadrate, Dreiecke und Sechsecke, Quadrate und Sechsecke, Dreiecke und Achtecke, Dreiecke und Fünfecke, Sechsecke und Fünfecke, Zehnecke und Dreiecke sein können. Andere haben drei Arten regelmäßiger Flächen, z. B. Achtecke, Sechsecke und Quadrate, oder Fünfecke, Dreiecke und Quadrate, oder Zehnecke, Sechsecke und Quadrate. Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten beschloffen.

Auch die Archimedischen Körper haben ihre reziproken. So gehörte zum Halbstumpf des Würfels das Rhombendodekaeder, zum Halbstumpf des Zwölfflachs das Rhombendreißigflach. Das erstere hatte regelmäßige Dreikanteken und regelmäßige Vierkanteken, welche die reziproken Gebilde der Dreiecke und Quadrate sind. Beim Rhombendreißigflach dagegen gab es regelmäßige Dreikanteken und Fünfkanteken als Bilder der regelmäßigen Dreiecke und Fünfecke. Die reziproken Körper der Archimedischen werden auch als antarchimedische bezeichnet.

Näher auf diese Gebilde einzugehen, würde zu weit führen.\*) (Auf die Kepler-Boinsotschen Körper und auf die verschiedenen Kristallformen sei besonders aufmerksam gemacht.)

\*) Weiteres Material findet man im Anhang des Vorkurses, in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“, Leipzig bei B. G. Teubner, und in seinem vierbändigen Werke „Elemente der Stereometrie“, Leipzig bei G. J. Göschen.

## II. Senkrechte Prismen und Zylinder.

18) In Fig. 177 stelle  $ABCD$  ein horizontales Rechteck dar, auf dessen Ebene in den Eckpunkten Lotte von gleicher Höhe errichtet sind, deren Endpunkte also der horizontalen Schnittebene  $A_1B_1C_1D_1$  angehören. Der so bestimmte ebenflächige Körper heißt Rechteckskörper (oder auch Rechtecker) oder senkrechtens Vierkantprisma (Säule).

Stehen die Grundkanten  $a$  und  $b$  unter sich und zur Höhe  $h$  in rationalem Verhältnis  $a : b : h$ , welches durch die kleinsten möglichen ganzen Zahlen ausgedrückt sein mag, so läßt sich der Körper ebenso in Würfel zerlegen, wie früher das Rechteck in Quadrate zerlegt wurde. Die Anzahl dieser Würfel ist  $abh$ . Betrachtet man jeden dieser Würfel als Raumeinheit, so ist der Inhalt des Körpers  $I = abh$ , oder, wenn man die Grundfläche  $ab$  mit  $G$  bezeichnet:  $I = G \cdot h$ , d. h. abgekürzt gesprochen: Inhalt gleich Grundfläche mal Höhe.

Der Fall des irrationalen Verhältnisses wird ebenso, wie bei dem Rechteck, dadurch erledigt, daß man mit beliebiger Genauigkeit rechnet, indem man für den endlosen Dezimalbruch ohne Periode den nächstliegenden endlichen Dezimalbruch von der gewählten Stellenzahl nimmt. Der Beweis für die Richtigkeit der Formel

$$I = Gh$$

wird also dann nur angenähert geliefert, jedoch mit beliebiger Genauigkeit.

19) **Aufgaben.** a) Berechne aus  $a$ ,  $b$  und  $h$  den Inhalt und die Oberfläche des Rechteckskörpers.

b) Berechne die Diagonale  $BD_1 = d$  des Körpers.

**Auflösung.** Nach Pythagoras ist  $BD_1^2 = h^2 + B_1D_1^2 = h^2 + (B_1C_1^2 + C_1D_1^2) = h^2 + a^2 + b^2$ , also  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$ .

c) Welche Winkel bildet diese Diagonale mit den Kanten?

**Auflösung.** Dreieck  $BAD_1$  hat den rechten Winkel bei  $A$ , also ist  $\cos \alpha = \frac{a}{d}$ , woraus sich  $\alpha$  berechnen läßt. Ebenso bestimmen sich die andern Winkel aus  $\cos \beta = \frac{b}{d}$  und  $\cos \gamma = \frac{h}{d}$ .

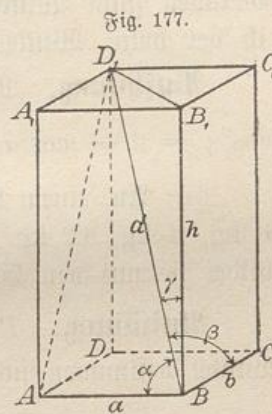


Fig. 177.

**Bemerkungen.** Die Formel  $d^2 = a^2 + b^2 + h^2$  wird als der Pythagoreische Lehrsatz für den Raum bezeichnet und lautet in Worten: Das Quadrat über der Hauptdiagonale des Rechteckkörpers ist gleich der Summe der Quadrate über den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten dieses Körpers.

Aus der Formel folgt

$$1 = \frac{d^2}{d^2} = \frac{a^2 + b^2 + h^2}{d^2} = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} + \frac{h^2}{d^2} = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Bildet also eine Gerade mit drei aufeinander Senkrechten die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , so ist die Summe der Kosinusquadrate dieser Winkel gleich Eins.

d) Eine Gerade gehe von einer Ecke aus, in der drei aufeinander senkrechte Gerade zusammenstoßen. Sie bilde mit sämtlichen Geraden spitze Winkel, von denen  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben sind. Wie groß ist der dritte Winkel  $\gamma$ ?

**Auflösung.** Nach obigem ist

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta, \text{ also } \cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

[e) An einem Punkte wirken senkrecht gegeneinander die Kräfte 3 kg, 4 kg, 12 kg. Wie groß ist ihre Resultante, und welche Winkel bildet sie mit den Einzelkräften?

**Auflösung.**  $R = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$  kg. Die Winkel bestimmen sich aus  $\cos \alpha = \frac{3}{13}$ ,  $\cos \beta = \frac{4}{13}$ ,  $\cos \gamma = \frac{12}{13}$ .]

20) Werden mehrere Rechteckkörper von gleicher Höhe  $h$ , aber von verschiedenen Grundkanten, so auf dieselbe Ebene gestellt, daß je zwei von ihnen mit einer senkrechten Fläche zusammenstoßen, so bildet die Grundfläche eine aus Rechtecken bestehende Figur nach Art von Fig. 178. Der Inhalt des Gesamtkörpers ist dann

$$I = G_1 h + G_2 h + G_3 h + \dots = (G_1 + G_2 + G_3 + \dots) h = G h,$$

wenn man die gesamte Grundfläche mit  $G$  bezeichnet.

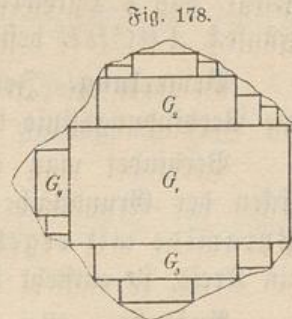
Nun läßt sich aber jede beliebig begrenzte ebene Fläche nach Art der Fig. 178 mit Rechtecken ausfüllen, wobei, wenn man in geeigneter Weise kleinere und kleinere Rechtecke anwendet, die übrig bleibenden „dreieckigen“ Flächen am Rande schließlich verschwindend klein werden, sodaß man sie vernachlässigen kann. Demnach gilt von jedem senkrechten Prisma oder Zylinder von beliebiger Grundfläche,

die dadurch entstehen, daß die Grundfläche senkrecht gegen ihre Ebene bewegt wird, die Formel

$$I = (G_1 + G_2 + G_3 + \dots)h = G \cdot h.$$

Daher gilt der Satz:

Senkrechte Prismen und Zylinder von beliebiger Grundfläche gehorchen der Inhaltsformel  $F = Gh$ , d. h. abgekürzt gesprochen: Inhalt gleich Grundfläche mal Höhe.



21) **Aufgaben.** a) Ein senkrechtcs Dreikantprisma habe die Grundkanten  $a, b$  und  $c$  und die Höhe  $h$ . Wie groß ist die gesamte Oberfläche? (Benutze für das Dreieck die Heronische Formel.) Wie groß ist der Inhalt? Welche Winkel bilden die Seitenflächen des Körpers miteinander? (Trigonometrisch zu berechnen.)

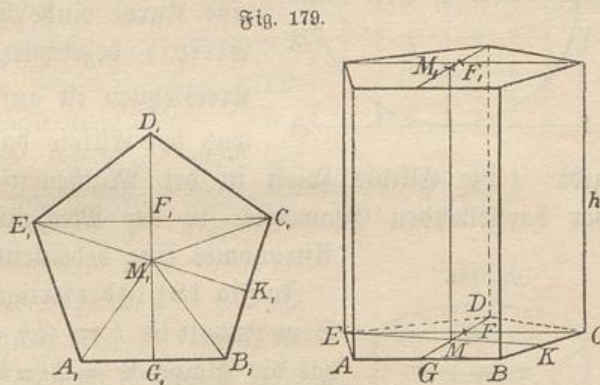
b) Dieselbe Aufgabe für das regelmäßige Dreikantprisma\*) von Grundkante  $a$  und Höhe  $h$ .

c) Dieselbe Aufgabe für das regelmäßige Dreikantprisma von Grundkante  $a$  und quadratischen Seitenflächen.

d) Dieselbe Aufgabe für regelmäßige Prismen, deren Grundflächen 4-, 5-, 6-seitig sind. Auch besondere Bestimmungen für die Höhen können dabei vorgenommen werden. (Bei dem Fünfeck ist z. B. Trigonometrie anzuwenden.)

e) Regelmäßige Prismen von verschiedener Seitenzahl in unserer Parallelperspektive korrekt zu zeichnen.

In Fig. 179 ist die Aufgabe am regelmäßigen fünfseitigen Prisma gelöst.  $A_1B_1$  ist horizontal als  $AB$  hingelegt,  $G_1D_1$  auf  $\frac{1}{3}$  reduziert und als  $GD$  unter  $30^\circ$  angelegt, was der von uns gewählten Parallelperspektive entspricht.  $GF$  ist als



\*) Ein regelmäßiges Prisma ist ein senkrechtcs Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist.

$\frac{1}{3} G_1 F_1$  abgetragen. Durch  $F$  ist die Horizontale  $EC = E_1 C_1$  so gelegt, daß  $F$  Halbpunkt bleibt. Dadurch ist das perspektivische Fünfeck  $ABCDE$  bestimmt. Das Übrige ergibt sich von selbst.

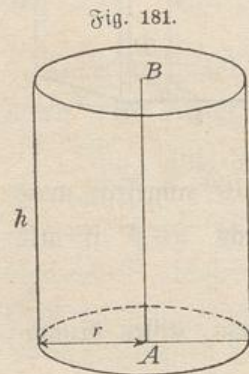
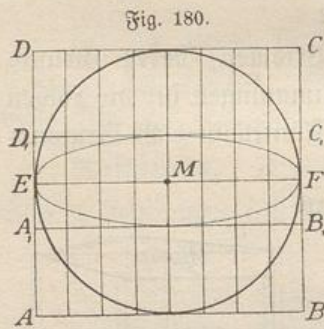
**Bemerkung.** Jedes regelmäßige Prisma hat eine Mittellinie, die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Grundflächen.

Verbindet man den oberen Endpunkt der Mittellinie mit den Ecken der Grundfläche, so erhält man die Kanten der zugehörigen Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche. Ist die Grundfläche ein Kreis, so entsteht der Keg.

**Aufgabe.** Bei gegebener Grundkante  $a$  und Höhe  $h$  die Seitenkanten einer „regelmäßigen“ Pyramide und ihre Neigung, die Seitenflächen und ihre Neigung zu berechnen, je nachdem die Grundfläche 3-, 4-, 5-, 6-seitig ist.

22) Zeichnung und Berechnung des senkrechten Kreiszyinders.

Die Zeichnung des Kreiszyinders ergibt sich am bequemsten folgendermaßen: Man wähle statt der Perspektive mit Neigung  $30^\circ$  die mit Neigung  $90^\circ$ . Die Verkürzung auf  $\frac{1}{3}$  kann man beibehalten. In Fig. 180 ist gezeigt, wie dadurch das Quadrat  $ABCD$  mit dem einbeschriebenen Kreise in ein Rechteck  $A_1 B_1 C_1 D_1$  verwandelt wird, dem eine Kurve einbeschrieben ist, die man als Ellipse bezeichnet. Jede der senkrechten Kreisbogen ist auf  $\frac{1}{3}$  der Länge reduziert, was der Ellipse das Achsenverhältnis  $1 : 3$  gibt. [Die Ellipse spielt in der Mathematik, im Zeichnen und in der darstellenden Geometrie, in der Mechanik, Technik, Physik und Astronomie eine bedeutende Rolle.]



In Fig. 181 ist der fertige Kreiszyinder dargestellt. Sein Inhalt ist  $I = Gh = r^2 \pi h$ . Sein Mantel hat die Fläche  $M = 2r\pi h$ . Denkt man sich diesen nämlich längs einer der Geraden aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet, so hat man ein Rechteck mit der Grundlinie  $u = 2r\pi$  und der Höhe  $h$ . Nimmt man den Durchmesser  $d$  statt  $r$ , so ist

$$I = \frac{d^2}{4} \pi h, \quad M = d\pi h.$$

23) **Aufgaben.** a) Ein zylindrisches Litergefäß soll doppelt so hoch, als breit sein. Wie sind die inneren Abmessungen zu nehmen?

**Auflösung.**  $I = r^2 \pi h = r^2 \pi \cdot (4r)$  soll gleich 1 cbdm sein, also  $4r^3 \pi = 1$ , folglich  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} = ?$  dem. Die Höhe wird  $h = 4r$ .

b) Ein zylindrisches Hektolitergefäß soll viermal so breit als hoch sein. Wie sind die Maße zu nehmen?

**Auflösung.**  $I = r^2 \pi h = r^2 \pi \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^3 \pi}{2}$  soll gleich 100 cbdm sein. Daraus folgt  $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} = ?$  dem.

Anderer Aufgaben verlangen die Berechnung des Gewichtes  $p$  mit Hilfe des spezifischen Gewichtes  $p'$ .

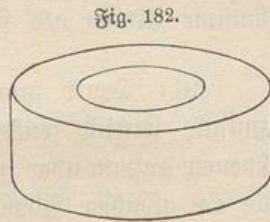
Jedes gerade Prisma mit regelmäßiger Grundfläche hat einen einbeschriebenen und einen umbeschriebenen Zylinder, jede solche Pyramide einen umbeschriebenen und einen einbeschriebenen Kegel.

**Aufgabe.** Wie verhalten sich die Inhalte des Würfels und des ein- und umbeschriebenen Zylinders? Wie verhalten sich die Oberflächen dieser drei Körper?

[Die Triebwellen und Transmissionswellen der Technik, zahlreiche Maschinen und Bauteile, Fabrikshornsteine, Brunnen- und Bergwerksschachte und viele Werkzeuge und Geräte, besonders Gefäße, haben den Zylinder als Grundform.]

24) **Aufgabe.** Einen konzentrischen Hohlzylinder mit den Radien  $r$  und  $r_1$  und der Höhe  $h$  zu zeichnen und seinen Inhalt und seine gesamte Oberfläche zu berechnen.

Fig. 182 stellt die Zeichnung dar, deren Ellipsen wie vorher zu konstruieren sind. (Man achte auf die scheinbare Veränderlichkeit des Abstandes der inneren und äußeren Kurve.)



$$I = (r^2 \pi - r_1^2 \pi) h = \pi (r^2 - r_1^2) h \\ = \pi (r + r_1)(r - r_1) h.$$

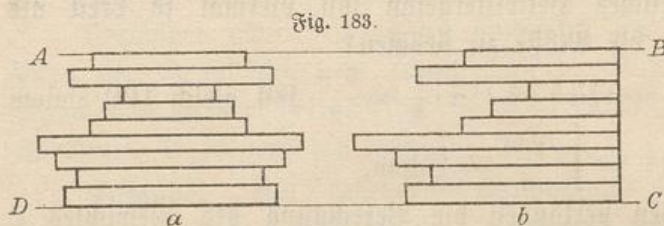
(Letztere Zerlegung eignet sich für die logarithmische Berechnung.)

$$O = 2(r^2 \pi - r_1^2 \pi) + 2r \pi h + 2r_1 \pi h = 2\pi [r^2 - r_1^2 + h(r + r_1)] \\ = 2\pi [(r + r_1)(r - r_1) + h(r + r_1)] = 2\pi (r + r_1)[r - r_1 + h].$$

**Beispiel.** Ein gußeisernes Schwungrad habe einen Schwungradring von folgenden Abmessungen:  $r = 2,8$  m,  $r_1 = 2,5$  m, Dicke  $h = 0,3$  m. Wieviel Tonnen wiegt er, wenn das spezifische Gewicht  $p' = 7,5$  gesetzt wird?

### III. Der Satz des Cavalieri und seine wichtigsten Anwendungen.

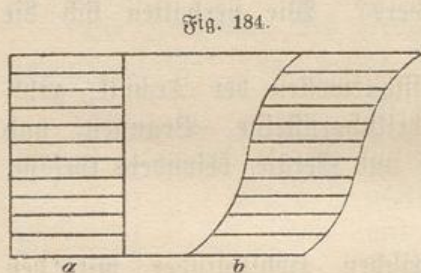
25) Der Inhalt des Satzes werde zunächst planimetrisch erläutert:



Zwischen zwei Parallelen  $AB$  und  $DC$  mögen sich endliche Rechteckstreifen von Millimeterhöhe befinden, die zwei Figuren  $a$  und  $b$

geben. Die in gleicher Höhe befindlichen Streifen sollen gleiche Breite haben. Dann sind beide Figuren inhaltsgleich. Die eine ist durch bloße Verschiebung der Streifen aus der anderen entstanden. Dasselbe gilt, wenn die Streifen nicht Millimeterhöhe, sondern nur den 1000sten,

1 000 000sten usw. Teil dieser Höhe haben. Die Figuren haben gleichen Inhalt, sobald sie in gleichen Höhen gleiche Querschnittslinien haben.



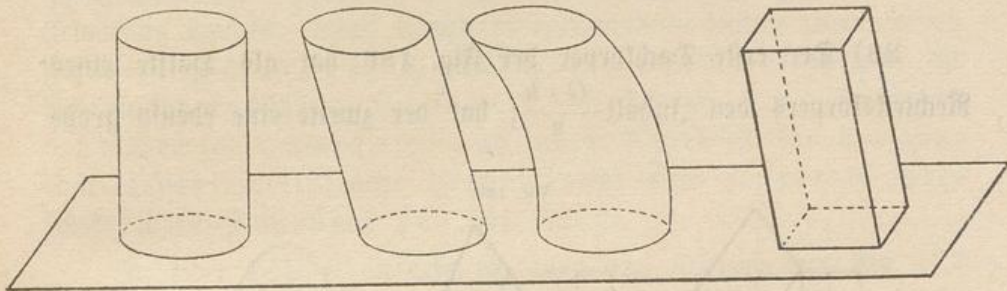
Dies ist z. B. auch in Fig. 184 der Fall, wo die einzelnen Streifen von so verschwindend kleiner Höhe zu denken sind, daß man in Fig. b

nicht einmal die „Treppenstufen“ der vorigen Figur wahrnimmt, sondern krumme Linien als seitliche Begrenzung sieht.

26) Denkt man sich nun an Stelle der Streifen dünne horizontale, seitlich senkrecht begrenzte Platten, die zwischen parallelen Ebenen aufeinander geschichtet sind, so hat man Entsprechendes. Sind die in gleicher Höhe liegenden Platten von gleicher Grundfläche, so sind sie, wenn gleiche Dicke angenommen wird, inhaltsgleich, mag auch die Gestalt der verglichenen Platten noch so verschieden sein. Sind die Platten von verschwindend kleiner Dicke, so nimmt man seitlich keine Treppenstufen wahr, so daß die Konturen als krummlinig, die Seitenflächen als krumme Flächen gelten können. Die Inhaltsgleichheit aber bleibt bestehen. So gilt unter der Voraussetzung endlicher Querschnitte der Satz:

Haben zwei Körper in gleichen Höhen flächengleiche Querschnitte, so sind sie inhaltsgleich. \*)

Fig. 185.



27) Die in Fig. 185\*\*) dargestellten Körper sollen von oben bis unten denselben Querschnitt  $G$  haben und in der Höhe übereinstimmen. Da nun der erste der Körper den Inhalt  $G \cdot h$  hat, so sind sie sämtlich vom Inhalte  $Gh$ . Die Formel  $I = Gh$  gilt also für senk-

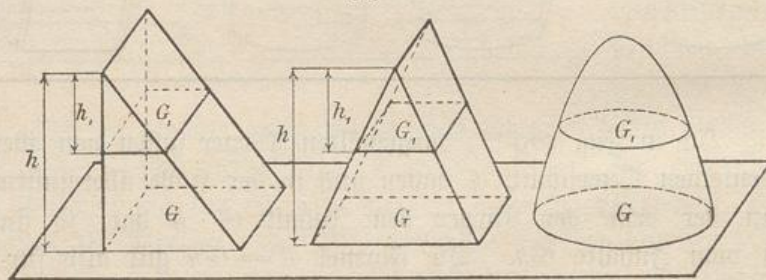
\*) Bei der planimetrischen Veranschaulichung des Satzes kann man einen strengeren Beweis geben, indem man zeigt, daß die „Treppenträume“ der Gestalt unendlich kleiner Dreiecke zustreben. Hat ein solches die Grundlinie  $\frac{b}{m}$  und die Höhe  $\frac{h}{n}$ , wobei  $m$  und  $n$  unendlich große Zahlen sind, so ist seine Fläche gleich  $\frac{bh}{2mn}$ , sodas im Nenner unendlich großes „zweiter Ordnung“ steht, was man [durch das Symbol  $\infty^2$  darstellen kann. Die Anzahl der Dreiecke ist aber nur unendlich groß erster Ordnung. Ist das berechnete das größte von allen, so ist die Summe aller kleiner als  $\frac{bh}{2} \frac{\infty^1}{\infty^2}$ . Dieser Ausdruck kann als  $\frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{\infty}$  aufgefaßt werden, d. h. er strebt der Größe Null zu. Ähnlich ist es bei den körperlichen Betrachtungen. Die Anzahl der Treppenträume ist unendlich groß erster Ordnung, der Inhalt des größten aber unendlich klein zweiter Ordnung, z. B.  $\frac{k}{\infty^2}$ , also handelt es sich bei der Summe aller wieder um einen Ausdruck, der kleiner als  $\infty \cdot \frac{k}{\infty^2}$  oder  $\frac{k}{\infty}$  ist, was aber der Null zustrebt. Also auch hier darf man den Inhalt der Treppenträume schließlich vernachlässigen. Ein näheres Eingehen auf solche Infinitesimalbetrachtungen ist erst auf einem höheren Standpunkte möglich. Der von Cavalieri ausgesprochene aber im Hinblick auf gewisse Ausnahmen nicht streng genug bewiesene Satz wird nach ihm benannt.

\*\*) Diese Figur ist nur schematisch aufzufassen. Bei genauer Konstruktion würden die großen Ellipsenachsen etwas geneigt gegen die Horizontale liegen. Die genaue Konstruktion geht über den Standpunkt der Klasse hinaus. Dasselbe gilt von Fig. 186 und 187.

rechte und schräge Prismen, für senkrechte und schräge Zylinder und von Körpern beliebigen Profils, die von oben bis unten flächengleiche Querschnitte haben. Die Gestalt dieser Querschnitte darf sich dabei von unten nach oben ändern.

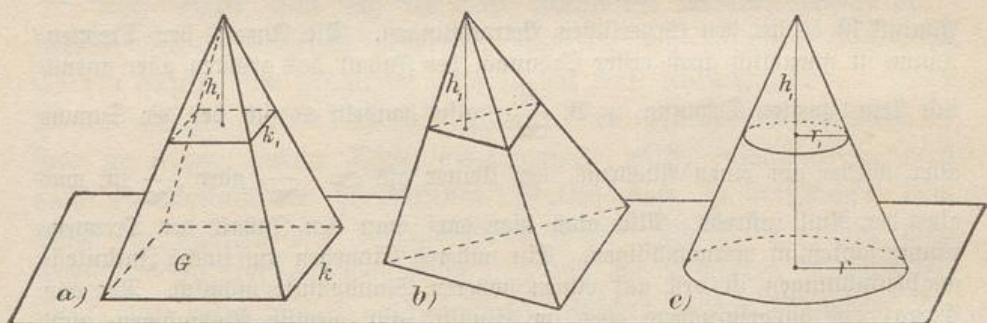
28) Der erste Dachkörper der Fig. 186 hat als Hälfte eines Rechteckskörpers den Inhalt  $\frac{G \cdot h}{2}$ ; hat der zweite eine ebenso große

Fig. 186.



Grundfläche und dieselbe Höhe, so hat er denselben Inhalt. Im ersten nämlich ist für die Querschnittsflächen  $G_1 : G = h_1 : h$  (warum?), also  $G_1 = G \frac{h_1}{h}$ . Im zweiten ist ebenfalls  $G_1 = G \frac{h_1}{h}$ , also sind die Querschnitte beider Körper in gleichen Höhen flächengleich. Angenommen, das Profil des dritten Körpers sei so gewählt, daß auch bei ihm für jedes  $h_1$  der Querschnitt  $G_1 = G \frac{h_1}{h}$  ist, so ist auch für ihn die Inhaltsformel  $I = \frac{G \cdot h}{2}$ .

Fig. 187.



29) In Fig. 187 sind Pyramiden und ein Kegel dargestellt. Alle sollen Grundflächen von derselben Größe  $G$  haben und auch in der Höhe  $h$  übereinstimmen. Will man beweisen, daß für alle dieselbe

Inhaltsformel gilt, so muß gezeigt werden, daß sie in gleichen Höhen gleiche Querschnitte haben. Zunächst ist bei jedem dieser Körper der Parallelschnitt ähnlich der Grundfläche, denn die Spitze ist als Ähnlichkeitspunkt zu betrachten, sodaß es sich um eine gesetzmäßige Verkleinerung handelt. Sind  $k$  und  $k_1$  entsprechende Linien in der ersten Figur, so ist  $k_1 : k = h_1 : h$ , also  $k_1^2 : k^2 = h_1^2 : h^2$ ; es ist aber für die ähnlichen Flächen  $G_1 : G = k_1^2 : k^2$ , folglich  $G_1 : G = h_1^2 : h^2$ , d. h.: Bei jeder Pyramide und jedem Kegel ist die horizontale Querschnittsfläche proportional dem Quadrate ihres senkrechten Abstandes von der Spitze.

In jeder Höhe  $h_1$  ist also bei allen drei Körpern der Fig. 187  $G_1 = G \frac{h_1^2}{h^2}$ , alle haben in gleichen Höhen flächengleiche Querschnitte. Folglich: Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

An dem dreiseitigen Prisma in Fig. 188 läßt sich nun folgendes zeigen: Zieht man in den Seitenflächen Diagonalen in einem Zuge (ohne abzusetzen), so ist durch die entsprechenden Flächenschnitte das Prisma in drei Pyramiden zerlegt:

- I.  $(ABC)A_1^*$ ,
- II.  $(A_1B_1C_1)B$  oder  $(BC_1B_1)A_1$ ,
- III.  $(BCC_1)A_1$ .

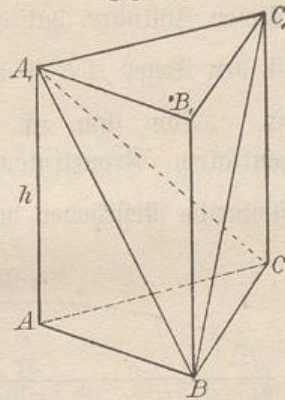
Die beiden ersten Pyramiden haben gleiche Grundflächen  $ABC = A_1B_1C_1$  und gleiche Höhen (Abstand der oberen von der unteren Fläche), sie sind also inhaltsgleich. Die zweite Pyramide in der anderen Schreibweise und die dritte haben gleiche Grundflächen  $BC_1B_1$  und  $BCC_1$  in derselben Ebene, und da sie dieselbe Spitze  $A_1$  haben, stimmen auch die Höhen überein, folglich auch die Inhalte. Da somit alle drei Pyramiden inhaltsgleich sind, so ist jede der dritte Teil des Prismas. Für dieses war aber  $I = Gh$ , folglich ist für die Pyramide  $(ABC)A_1$  die Inhaltsformel  $I = \frac{Gh}{3}$ . Alle Pyramiden und Kegel von derselben Grundfläche und derselben Höhe  $h$  sind aber inhaltsgleich, folglich:

$$\text{Für jede Pyramide und jeden Kegel ist } I = \frac{G \cdot h}{3}.$$

$$\text{Für den Kegel ist } G = r^2\pi, \text{ also } I = \frac{r^2\pi h}{3}.$$

\*) Die Spitze ist jedesmal außerhalb der Klammer geschrieben.

Fig. 188.

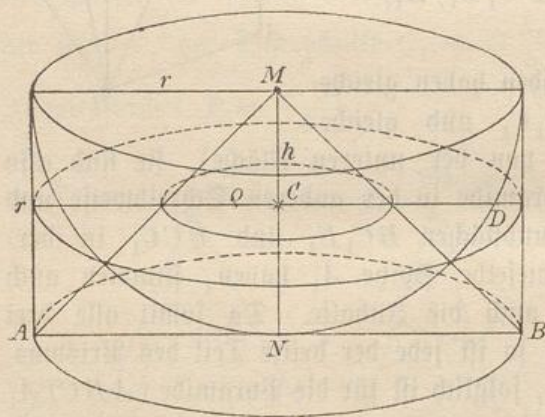


**Bemerkung.** Das Resultat für die Pyramide stimmt mit dem auf Seite 278 angegebenen überein.

**[Aufgaben.** Berechne den Inhalt des regelmäßigen Tetraeders aus der Kante  $k$ , den des regelmäßigen Oktaeders aus der Halbachse  $a$ , den des Pyramidenwürfels aus der Würfelkante  $k$  und der Pyramidenhöhe  $h$ , ebenso den des Rhombendodekaeders. — Versuche\*) die Kanten, die Winkel, die Flächen und den Inhalt des Pentagondodekaeders aus der Halbachse  $a$  des zugehörigen Würfels, oder aus der Würfelkante  $b$ , oder aus der Dodekaederkante  $k$  zu berechnen. Ein Teil der Rechnungen ist oben vorbereitet. Der Inhalt wird  $J = \frac{O\varrho}{3}$ . Dieselbe Aufgabe soll für das Ikosaeder gelöst werden, wobei das Oktaeder an Stelle des Würfels tritt.\*)

30) Fig. 189 stellt einen Zylinder dar, der durch Drehung eines Quadrates von der Seite  $r$  um die Linie  $MN$  entstanden ist. Dieser Zylinder hat den Inhalt  $(r^2\pi)r = r^3\pi$ . Aus dem Zylinder ist der Kegel  $ABM$  ausgeschnitten, dessen Inhalt  $= r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{r^3\pi}{3}$  ist. (Von ihm ist nur der Hauptschnitt gezeichnet. Die tangentialen Grenzlinien sind absichtlich weggelassen.) Der übrig bleibende Restkörper hat den Inhalt  $r^3\pi - \frac{r^3\pi}{3}$  oder  $\frac{2}{3}r^3\pi$ . In den

Fig. 189.



Zylinder ist außerdem eine Halbkugel einbeschrieben, von der sich zeigen läßt, daß sie in gleichen Höhen mit dem Restkörper flächengleichen Querschnitt hat. (Von ihr ist ebenfalls nicht der richtige Umriß, sondern nur der Hauptschnitt gezeichnet.) Im Abstände  $MC = h$  ist nämlich für den Kegelquerschnitt  $\varrho = h$ , also hat dort der Restkörper die Schnittfläche  $r^2\pi - \varrho^2\pi = \pi(r^2 - \varrho^2) = \pi(r^2 - h^2)$ ; die Halbkugel hat in derselben Höhe den nicht gezeichneten Querschnitt  $CD^2\pi = \pi(MD^2 - MC^2) = \pi(r^2 - h^2)$ .

\*) Diese beiden Aufgaben waren gewissermaßen das Endziel der Geometrie und Stereometrie des Euklid.

Beide Schnitte stimmen also im Flächeninhalte überein, und weil dies für jede Höhe gilt, so hat die Halbkugel mit dem Restkörper gleichen Inhalt. Für die Halbkugel ist also  $I = \frac{2}{3} r^3 \pi$ , folglich für die ganze Kugel  $I = \frac{4}{3} r^3 \pi$ .

31) Denkt man sich die Oberfläche der Kugel in sehr kleine z. B. rechteckige Stücke zerlegt, die man bei ihrer Kleinheit als Ebenen betrachten darf (z. B. durch benachbarte Meridiane und Parallelkreise), und verbindet man die Ecken mit dem Kugelmittelpunkt  $M$ , so entstehen zahlreiche kleine Pyramiden. Sind ihre Grundflächen  $G_1, G_2, G_3, \dots$ , so sind, weil  $r$  die Höhe ist, die Inhalte zusammengenommen

$$\begin{aligned} \frac{G_1 r}{3} + \frac{G_2 r}{3} + \frac{G_3 r}{3} + \dots \\ = \frac{r}{3} (G_1 + G_2 + G_3 + \dots). \end{aligned}$$

Die Pyramiden geben zusammen den Kugelinhalt  $I = \frac{4}{3} r^3 \pi$ , die Grundflächen zusammen die Kugeloberfläche  $O$ . Daher ist nach obiger Gleichung

$$I = \frac{r}{3} O \quad \text{oder} \quad O = \frac{3}{r} I = \frac{3}{r} \frac{4}{3} r^3 \pi = 4r^2 \pi.$$

Also: Die Kugeloberfläche ist gleich  $4r^2 \pi$  oder gleich dem Vierfachen von der Fläche des größten Kreises. Die Halbkugelwölbung hat also die doppelte Fläche, wie ihre Basis.

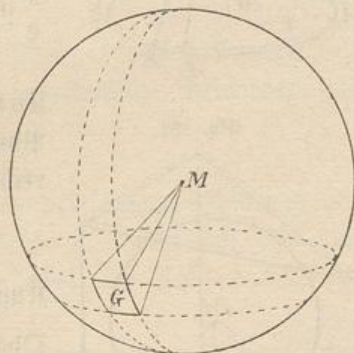
32) **Bemerkungen.** In Fig. 189 sind die Inhalte des Kegels, der Halbkugel und des Zylinders der Reihe nach  $\frac{r^3 \pi}{3}$ ,  $\frac{2r^3 \pi}{3}$ ,  $r^3 \pi = \frac{3r^3 \pi}{3}$ , sie verhalten sich also wie 1:2:3. Dieser Satz wird dem Archimedes zugeschrieben.

Der Inhalt einer Hohlkugel mit den Radien  $r$  und  $r_1$  ist

$$I = \frac{4}{3} r^3 \pi - \frac{4}{3} r_1^3 \pi = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3).$$

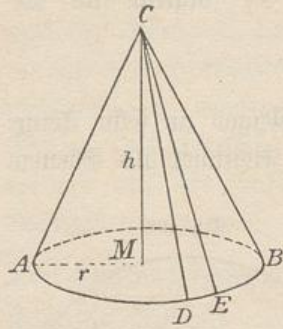
33) Die Linie  $AC$  am senkrechten Kreiskegel (Fig. 191) bezeichnet man als seine Seite. Diese berechnet sich als  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ . Die Mantelfläche des Kegels läßt sich durch aufeinanderfolgende Gerade in sehr schmale Dreiecke wie  $DEC$  zerlegen, die man als eben betrachten

Fig. 190.



darf. Sind  $g_1, g_2, g_3, \dots$  die aufeinanderfolgenden Grundlinien der Dreiecke, so ist die Summe ihrer Flächen

Fig. 191.

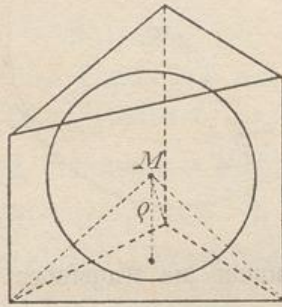


$$\begin{aligned} \frac{g_1 s}{2} + \frac{g_2 s}{2} + \frac{g_3 s}{2} + \dots \\ = \frac{s}{2} (g_1 + g_2 + g_3 + \dots). \end{aligned}$$

Die Summe der  $g$  ist aber der Kreisumfang  $2r\pi$ , also hat der Kegelmantel die Fläche  $\frac{s}{2} 2r\pi = r\pi s$ .

Jeder Kegeltumpf oder Pyramidentumpf ist die Differenz zweier Regel bzw. Pyramiden. Später werden besondere Berechnungsmethoden gelehrt.

Fig. 192.



34) Ist ein ebenflächiger Körper einer Kugel mit Radius  $\rho$  umbeschrieben, und ist seine Oberfläche  $O$ , so ist sein Inhalt  $I = O \cdot \frac{\rho}{3}$ .

**Beweis.** Verbindet man das Kugelzentrum mit den Ecken jeder Fläche, so erhält man Pyramiden von der Höhe  $\rho$ , deren Grundflächen  $G_1, G_2, G_3, \dots$  sein mögen. Die Summe der Inhalte ist

$$G_1 \frac{\rho}{3} + G_2 \frac{\rho}{3} + G_3 \frac{\rho}{3} + \dots = \frac{\rho}{3} (G_1 + G_2 + G_3 + \dots) = \frac{\rho}{3} \cdot O.$$

Diese Formel findet z. B. Anwendung bei der Berechnung des Inhalts regelmäßiger Polyeder.

#### IV. Vermischte Übungsaufgaben.

35) a) Die Erdfugel habe einen Radius 860 Meilen ( $860 \times 7420$  m) Länge. Wie viele Quadratmeilen hat ihre Oberfläche? Wie viele Kubikmeilen beträgt der Inhalt? Gib das Resultat auch in Quadrat- bzw. Kubikkilometern an.

b) Angenommen der Erdradius habe 860 Meilen, der Sonnenradius 100 000 Meilen Länge. Wieviel mal so groß ist der Sonneninhalt im Verhältnis zum Erdinhalt?

**Auflösung.**  $\frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{4}{3} r_1^3 \pi = r^3 : r_1^3$  u. f. w.

[e] Die Astronomen geben aber die Sonnenmasse als das 355 000-fache der Erdmasse an, das mittlere spezifische Gewicht der Erde als 5,6. Wie groß ist danach das mittlere spezifische Gewicht der Sonne?]

d) Eine Eisenkugel soll 1000 kg wiegen. Wie groß ist der Radius zu wählen, wenn das spezifische Gewicht  $\rho' = 7,5$  ist?

e) Die einem Würfel einbeschriebene Kugel habe den Inhalt  $I$ . Wie groß ist die Kante des Würfels?

f) Die einem Würfel umbeschriebene Kugel habe den Inhalt  $I$ . Wie groß ist die Kante des Würfels?

g) Dieselben Aufgaben für die Oberfläche  $O$  dieser Kugeln.

h) Entsprechende Aufgaben für das regelmäßige Tetraeder und Oktaeder.

36) a) Wie groß ist der Inhalt eines dreiseitigen Prismas von regelmäßiger Grundfläche und der Grundkante  $k$ , wenn sich ihm eine Kugel einbeschreiben läßt? Wie groß ist dabei der Radius der umbeschriebenen Kugel?

b) Entsprechende Aufgaben für Prismen, deren Grundflächen regelmäßige Sechsecke, Achtecke u. sind.

c) Einer Kugel soll ein regelmäßiges Prisma von quadratischen Seitenflächen einbeschrieben werden. Wie groß sind die Kanten, wenn die Grundfläche 3-, 4-, 5-, 6-seitig gewählt wird?

d) Einer Kugel soll ein regelmäßiges Prisma umbeschrieben werden. Wie groß werden die Kanten, je nachdem die Grundfläche 3-, 4-, 5-, 6-seitig gewählt wird?

e) Einem Kegel vom Grundradius  $r$  und der Höhe  $h$  soll eine Kugel ein-, bezw. umbeschrieben werden. Wie groß werden die Radien?

f) Einem Kegel von denselben Dimensionen soll ein regelmäßiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen eingezeichnet werden. Wie groß sind die Kanten, je nachdem das Prisma 3-, 4-, 5-, 6-seitig ist?

Zahlreiche Übungsaufgaben zum Konstruieren und Berechnen findet man in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“, besonders auch solche kristallographischer Art. [Man vergleiche auch die beiden ersten Teile seiner vierbändigen Stereometrie (Leipzig bei J. J. Göschen).]

### Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

Es giebt fünf regelmäßige Polyeder.

Von regelmäßigen Dreiecken sind begrenzt: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder. Von Quadraten begrenzt: Würfel. Von regelmäßigen Fünfecken begrenzt: Pentagondodekaeder. — Pyramidentwürfel und Rhombendodekaeder sind wichtigere Kristallformen. — Bei reziproken Körpern hat der eine ebensoviel Ecken, wie der andere Flächen und ebensoviel Flächen wie der andere Ecken, die Anzahl der Kanten aber ist bei beiden dieselbe. Würfel und regelmäßiges Achteck sind reziproke Körper, ebenso regelmäßiges Zwölfeck und Zwanzigseck. Das regelmäßige Viereck ist zu sich selbst reziprok. Dem Würfel lassen sich zwei regelmäßige Tetraeder einbeschreiben, zwei regelmäßige Dodekaeder umbeschreiben. Dem Oktaeder lassen sich zwei regelmäßige Tetraeder umbeschreiben, zwei regelmäßige Ikosaeder einbeschreiben. Dem regelmäßigen Dodekaeder lassen sich fünf Würfel einbeschreiben, dem regelmäßigen Ikosaeder lassen sich fünf regelmäßige Oktaeder umbeschreiben. Dem regelmäßigen Dodekaeder lassen sich fünf regelmäßige Tetraeder einbeschreiben, die keine Ecke gemein haben. Dem regelmäßigen Ikosaeder lassen sich fünf regelmäßige Tetraeder umbeschreiben, die keine Fläche gemein haben. Dies giebt den Stern der fünf regelmäßigen Tetraeder. Oktaeder und Würfel haben denselben Halbstumpf, der reziprok zum Rhombendodekaeder ist. Ikosaeder und Dodekaeder haben denselben Halbstumpf, der reziprok zu einem Rhombendreißigseck ist.

Senkrechte und schiefe Prismen und Zylinder:  $I = Gh$ .

Diagonale des Rechteckkörpers:  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$ .

Für ihre Winkel mit den Kanten ist:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

Dabei ist  $\cos \alpha = \frac{a}{d}$ ,  $\cos \beta = \frac{b}{d}$ ,  $\cos \gamma = \frac{c}{d}$ .

Zylinder:  $I = r^2 \pi h$ ,  $M = 2r \pi h = d \pi h$ .

Satz des Cavalieri: Haben zwei Körper in gleichen Höhen flächengleiche endliche Querschnitte, so sind sie inhaltsgleich.

$$\text{Dachkörper: } I = \frac{Gh}{2}.$$

$$\text{Pyramide und Kegel: } I = \frac{Gh}{3}.$$

$$\text{Kreiskegel: } I = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

$$\text{Senkrechter Kreiskegel: } M = r \pi s.$$

$$\text{Kugel: } I = \frac{4}{3} r^3 \pi, \quad O = 4r^2 \pi, \quad I = \frac{Or}{3}.$$

$$\text{Umbeschriebenes Polyeder: } I = \frac{Oe}{3}$$

Sind einem senkrechten Kreiskegel von der Höhe  $h = 2r$  eine Kugel und ein Kegel einbeschrieben, so verhalten sich die Inhalte der drei Körper wie 3 : 2 : 1.

### Das griechische Alphabet.

Groß	Klein	Benennung in lateinischer Umschrift	Groß	Klein	Benennung in lateinischer Umschrift
Α	α	alpha	Ν	ν	ny
Β	β	bēta	Ξ	ξ	ksī
Γ	γ	gamma	Ο	ο	ōmikron
Δ	δ	delta	Π	π	pī
Ε	ε	ēpsilon	Ρ	ρ	rhō
Ζ	ζ	dsēta (zēta)	Σ	σ	sīgma
Η	η	ēta	Τ	τ	tau
Θ	θ	thēta	Υ	υ	ypsilon
Ι	ι	iōta	Φ	φ	phī
Κ	κ	kappa	Χ	χ	chī
Λ	λ	lam(b)da	Ψ	ψ	psī
Μ	μ	mŷ	Ω	ω	ōmega