# Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig und Berlin, 1904**

Die Funktionen des zweiten Quadranten und ihre Darstellung durch Linien am Kreise. Sinussatz. Kosinussatz. Jnhaltssatz. Die Hauptaufgaben der Dreiecksberechnung. Der Tangentensatz in geometrischer ...

14) Das regelmäßige Vieleck. Sind $r$ und die Seitenzahl $n$ gegeben, so ist der Zentriwinkel für jede Seite $\alpha = \frac{360^0}{n}$; der Winkel an der Basis jedes Einzeldreiecks ist $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ oder $\beta = 90^0 - \frac{180^0}{n}$. Aus $r$ und $\frac{\alpha}{2}$ oder $\beta$ läßt sich die Basis, die Höhe, die Fläche des Einzeldreiecks berechnen, sodaß auch am Vieleck alles berechnet werden kann.

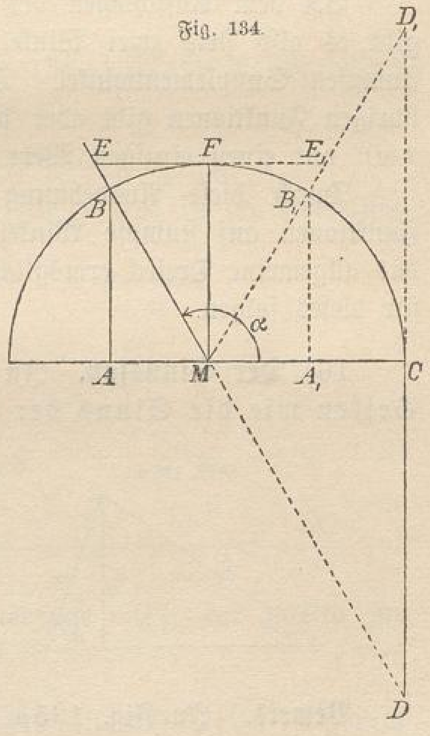
Führe dies durch am 5-Eck, 10-Eck, 15-Eck, am 8-Eck und 16-Eck usw. Neben $n$ kann statt $r$ auch gegeben sein $\varrho$, $a$, $u$, $F$ usw. Auch die übrig bleibenden Segmente des Um-Kreises lassen sich berechnen.

---

## III. Die Funktionen des stumpfen Winkels und das allgemeine Dreieck.

15) In Fig. 134 sei $\alpha$ ein stumpfer Winkel. Fällt man ebenso wie in Fig. 132 von $B$ aus auf den Schenkel $MC$ ein Lot, und ist $MB = 1$, so nennt man naturgemäß die Projektion $MA$ von $MB$ wie vorher die Kosinuslinie. Da diese aber auf die Rückverlängerung des wiederum als positiv aufzufassenden Schenkels $MC$ fällt, so muß man $MA$ als negativ auffassen.*) Aus $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ würde, wenn man das Fortbestehen dieser Formel verlangt, $AB$ als Sinuslinie folgen, denn es ist $AB = \sqrt{1 - MA^2}$, wobei $MA$ auch negativ sein kann. Da aber jetzt die Sinuslinie dieselbe Richtung wie vorher hat, so ist sie wiederum als positiv aufzufassen. — Vergleicht man die Kosinus- und die Sinuslinie des stumpfen Winkels $\alpha$ mit der seines Supplementwinkels $\beta = 180^0 - \alpha$, so erkennt man,

Fig. 134.




*) Vergleiche die geometrische Darstellung positiver und negativer Größen in Figur 129.

daß die entsprechenden Linien für beide Winkel absolut genommen einander gleich sind, also auch die Sinus selbst, und zwar ist

1) $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$, $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$.

Folglich muß sein:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{-\cos(180^0 - \alpha)} \text{ und } \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\cos(180^0 - \alpha)}{\sin(180^0 - \alpha)},$$

d. h.

2) $\tan\alpha = -\tan(180^0 - \alpha)$, $\cot\alpha = -\cot(180^0 - \alpha)$.

Letzteres erkennt man auch an der Figur, denn erstens schneidet die in $C$ berührende Tangente den rückwärts verlängerten Schenkel $MB$ in $D$, sodaß die Tangentenlinie $CD$ jetzt nach unten gerichtet, d. h. negativ ist, ferner ist $CD = - CD_1$. Ebenso ist die nach links gehende, in $F$ berührende Kotangentenlinie $FE$ jetzt negativ und absolut gleich $FE_1$. Man hat also den Satz:

Die Funktionen von Supplementwinkeln sind absolut genommen einander gleich, und es unterscheiden sich nur Kosinus, Tangente und Kotangente solcher Winkel durch das Vorzeichen. (Deshalb sind Tafeln für die stumpfen Winkel überflüssig.)

Bei dem Aufschlagen des Winkels für einen gegebenen Sinus gibt es also stets zwei Winkel, den betreffenden spitzen und seinen stumpfen Supplementwinkel. Das Aufschlagen des Winkels für die übrigen Funktionen gibt aber bei positiven Winkeln zwischen $0^0$ und $180^0$ nur einen einzigen Wert.

Durch diese Ausdehnung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen auf stumpfe Winkel wird der Beweis einiger Sätze für das allgemeine Dreieck ermöglicht, aus denen leichte Berechnungsarten für dieses folgen.

16) **Der Sinussatz.** In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 135 a.

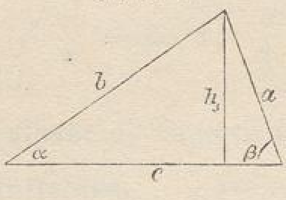
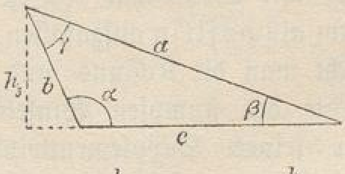



Fig. 135 b.




**Beweis.** In Fig. 135a ist $\sin\alpha = \frac{h_3}{b}$, $\sin\beta = \frac{h_3}{a}$, folglich

$$\sin\alpha : \sin\beta = \frac{h_3}{b} : \frac{h_3}{a} = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = a : b.$$

Allgemein ist also

3) $$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

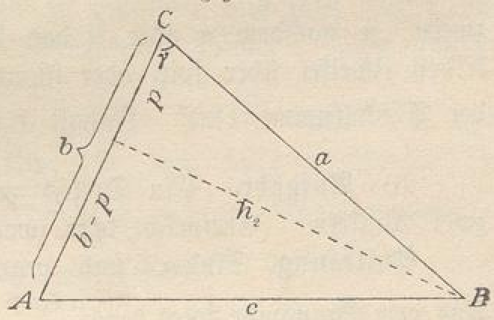
[Beim stumpfwinkligen Dreieck in Fig. 135b ist

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \frac{h_3}{b},$$

sonst alles, wie vorher.]

17) **Der Kosinussatz.** Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Fig. 136 a.




**Beweis.** In der Geometrie ist in Abschnitt 258a und b gezeigt worden, daß in jedem Dreieck

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bp$$

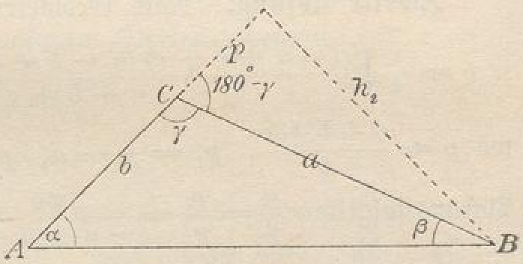
ist, je nachdem der Seite $c$ ein spitzer oder stumpfer Winkel gegenüberliegt.

Im Falle des spitzen Winkels (Fig. 136a) ist nun die Projektion $p = a\cos\gamma$. Einsetzung dieses Wertes gibt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Im Falle des stumpfen Winkels (Fig. 136b) ist die Projektion $p = a\cos(180^0 - \gamma) = -a\cos\gamma$, was, oben eingesetzt, ebenfalls $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ gibt.

Fig. 136 b.




Während also die Geometrie zwei Sätze zu unterscheiden hat, kennt die Trigonometrie nur den einen Satz:

4) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Der Unterschied liegt jetzt in dem Ausdrucke $\cos\gamma$, der positiv für spitze, aber negativ für stumpfe Winkel ist.

18) **Der Inhaltssatz.** Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

**Beweis.** In Fig. 135a und 135b ist $F = \frac{c \cdot h_3}{2}$, also, da $h_3 = b \sin\alpha$ ist, $F = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$.

Allgemein ist:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ca \sin\beta.$$

19) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. (Dem ersten Kongruenzsatze entsprechend.)

**Auflösung.** Sind $a$, $b$ und $\gamma$ gegeben, so gibt der Kosinussatz $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$. Aus dem Sinussatze folgt $\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$. Man wählt zum Rechnen das erste oder das zweite, je nachdem $a$ oder $b$ das kleinere ist, denn dann hat man keinen Zweifel über spitz oder stumpf. Der dritte Winkel folgt aus der Winkelsumme $180^0$. Inhalt $F = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln. (Entspricht dem zweiten Kongruenzsatze.)

**Auflösung.** Sind $a, \beta$ und $\gamma$ gegeben, so folgt $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$. Aus dem Sinussatze folgt $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ und $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $F = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.

21) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Seiten zu berechnen. (Dem dritten Kongruenzsatze entsprechend.)

**Erste Lösung.** Aus dem Kosinussatze folgt $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. ($\gamma$ ist spitz, wenn der Zähler positiv, stumpf, wenn der Zähler negativ ist.) Man fahre wie bei 19) mit dem Sinussatze fort.

**Zweite Lösung.** Nach Geometrie Nr. 262 ist

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}},$$

wo $p = \frac{a+b+c}{2}$, $p_1 = p - a$, $p_2 = p - b$, $p_3 = p - c$ ist.

Daraus folgt $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1} = \frac{2\varrho}{-a+b+c}$, $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2} = \frac{2\varrho}{a-b+c}$. ($\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3} = \frac{2\varrho}{a+b-c}$ kann zur Probe mit der Winkelsumme benutzt werden.) $F = \varrho p = \varrho\frac{a+b+c}{2}$.

**Dritte Lösung.** Aus Geometrie Nr. 262 folgt $F = \sqrt{p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}$, ferner ist $\frac{ah_1}{2} = F$, folglich $h_1 = \frac{2F}{a}$, wobei $a$ als größte Seite angenommen werden mag. Aus den rechtwinkligen Dreiecken folgt dann

$\sin\gamma = \frac{h_1}{b}$ und $\sin\beta = \frac{h_1}{c}$. ($h_1$ liegt innerhalb des Dreiecks, weil $a$ die größte Seite war.)

22) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel. (Dem vierten Kongruenzsatze entsprechend.)

**Auflösung.** Gegeben $a$, $b$, $\alpha$ und $a > b$; dann gibt der Sinussatz den spitzen Winkel $\beta$ aus $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$, $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

23) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel. (Dem fünften Kongruenzsatze entsprechend.)

**Auflösung.** Gegeben $a$, $b$, $\alpha$ und $a < b$. Man hat zwei Lösungen zu berechnen, die eine mit dem spitzen Winkel aus $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$, die andere mit dessen stumpfem Supplementwinkel. Die Werte für $\gamma$, $c$ und $F$ bezw. $\gamma_1$, $c_1$ und $F_1$ werden wie vorher gefunden.

24) **Aufgabe.** Welche Beziehung besteht beim Dreieck zwischen der Seite $a$, dem gegenüberliegenden $\sphericalangle\,\alpha$ und dem Radius $r$ des Um-Kreises?

**Auflösung.** Ist $ABC$ das Dreieck mit $a$, $\alpha$ und $r$, so ziehe man von $B$ aus den Durchmesser $BA_1$ des Um-Kreises und verbinde $A_1$ mit $C$, dann ist $\sphericalangle\,BA_1C = \alpha_1 = \alpha$ (Peripheriewinkel), und $\triangle\,BCA_1$ ist ein rechtwinkliges Dreieck. In diesem ist $\sin\alpha_1 = \frac{a}{2r}$, folglich ist in dem ursprünglichen Dreieck ebenfalls $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$. Ebenso ist $\sin\beta = \frac{b}{2r}$, $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$.

---

**Bemerkung.** Sämtliche Aufgaben, die man als Dreieckskonstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen kann, lassen sich auch als trigonometrische Rechnungsaufgaben ausführen, wobei jedesmal drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sein müssen. Ist z. B. $a$ und $r$ gegeben, so kann $\alpha$ nicht gegeben werden, sondern man hat es aus $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$ zu berechnen; ein drittes Stück, z. B. $h_1$, muß noch als gegebene Größe herangezogen werden.

---

25) **Aufgabe.** Ein Berggipfel $C$ erscheine von einem Punkte $A$ der Meeresfläche aus unter dem Elevationswinkel (Erhöhungswinkel) $\alpha$. Um die Höhe und Lage des Berges zu bestimmen, segelt man um eine meßbare Entfernung $c$ in der Richtung auf den Gipfel vorwärts, worauf er von $B$ aus unter dem größeren Elevationswinkel $\beta$ erscheint. Wie hoch ist der Berg und in welcher Entfernung von $A$ ist sein Gipfel auf der Landkarte festzulegen?

**Auflösung.** Berechne Seite $AC$ im Dreieck $ABC$, sodann die Seiten $C_1C$ und $AC_1$ im rechtwinkligen Dreieck $CC_1A$, wo $C_1$ der Projektionspunkt von $C$ ist. (Die Krümmung der Erde soll vernachlässigt werden.)

26) **Aufgabe.** Ein Berg auf einer Insel sei 3000 m hoch. Wie weit kann man von ihm aus über den Ozean sehen, wenn der Radius des Erdkörpers zu 860 Meilen (860 · 7420 m) angenommen wird, und wie groß ist der Winkel zwischen der berechneten Tangente und der Horizontalen? (Depressionswinkel.)

**Auflösung.** Nach Satz 299 und Aufgabe 300b der Geometrie ist $t^2 = h(h + 2r)$, wo $t$ die zu berechnende Tangente an den Erdkörper, $h$ die Höhe des Berges und $r$ der in demselben Maße gemessene Erdradius ist. Nach Berechnung der Tangente $t$ ist ihr Berührungspunkt auf den senkrechten Radius zu projizieren und der geforderte Winkel zu berechnen.

27) **Aufgabe.** Feldmesser haben eine horizontale Standlinie $AB$ diesseits eines Stromes gemessen und wollen die Entfernungen $AC$ und $BC$ nach einer Marke jenseits derselben bestimmen. Wie groß sind diese, wenn sich beim Visieren die Winkel $CAB = \alpha$ und $CBA = \beta$ ergeben? Darauf soll die Höhe der Marke, z. B. eines Berggipfels, bestimmt werden, wenn $\alpha_1$ der zu $A$ gehörige Elevationswinkel ist.

[28) **Aufgabe.** Die geographischen Breiten des Kaps der guten Hoffnung und der Stadt Berlin sind $33^0 55'$ (südlich) und $52^0 31'$ (nördlich). Beide Orte liegen nahezu auf demselben Meridiane. Lalande bestimmte am 6. Dezember 1751 zu Berlin den Zenitabstand des südlichen Mondrandes im Momente des Meridiandurchgangs zu $41^0 16'$, Lacaille fand am Kap gleichzeitig $46^0 34'$. Es sei nun $A$ das Kap, $B$ Berlin, $C$ die beobachtete Stelle des Mondes. Der Erdradius werde zu 860 Meilen angenommen. Wie berechnet man die Sehne $AB$? Wie groß sind die Winkel des Dreiecks $ABC$? Wie groß sind die Entfernungen $AC$ und $BC$? Wie groß ist der

Durchmesser des Mondes, wenn er von $B$ aus unter einem Winkel von $32'$ erscheint?]

29) **Nachtrag.** In Nr. 19 ist die Aufgabe gelöst worden, das Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen. Werden dabei alle Stücke verlangt, so wendet man besser den Tangentensatz an. Dieser lautet:

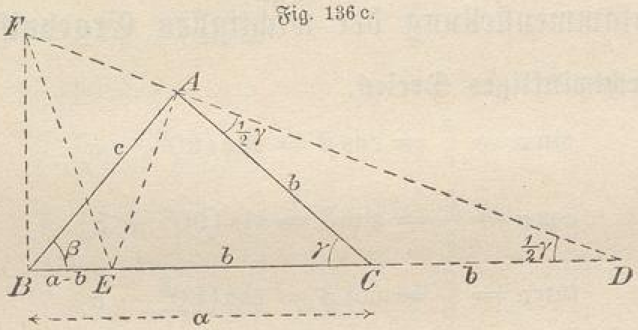
In jedem Dreieck findet für je zwei Winkel $\alpha$ und $\beta$ und für die gegenüberliegenden Seiten folgende Beziehung statt:

$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{a+b}{a-b}.$$

(Suche dies in Worten auszudrücken.)

**Beweis.** Am Dreieck $ABC$ in Fig. 136c sei $CE=b$ und die Verlängerung $CD=b$, also $BE=a-b$ und $BD=a+b$.

Fig. 136c.




Die Verbindungslinie $DA$ ist bis zum Schnitte mit dem Lote $BF$ verlängert. Dabei ist $\sphericalangle CDA=\frac{\gamma}{2}$, folglich, da $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^0$ ist, $\sphericalangle BFD=90^0-\frac{\gamma}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Ferner ist $BEAF$ ein Sehnenviereck, denn seine Winkel bei $A$ und $B$ sind rechte ($\sphericalangle EAD=(90^0-\frac{\gamma}{2})+\frac{\gamma}{2}=90^0$), also ist $\sphericalangle AFE=\sphericalangle\beta$ als Peripheriewinkel über $AE$, folglich $\sphericalangle BFE=\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Nun ist $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{BD}{BF}=\frac{a+b}{BF}$, und $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{BE}{BF}=\frac{a-b}{BF}$.

Durch beiderseitige Division folgt aus den letzten Gleichungen

$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{a+b}{a-b}.$$

**Anwendung.** Um ein Dreieck aus $a$, $b$ und $\gamma$ zu berechnen, bildet man $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$, sodaß $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ bekannt ist. Der Tangentensatz giebt

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Hat man $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$ berechnet, so ergeben die Logarithmentafeln den Wert von $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Aus $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ folgen durch Addition und Subtraktion die Werte für $\alpha$ und $\beta$. (Eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung ergibt sich daraus, daß $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ sein muß.)

Der Wert von $c$ folgt aus dem Sinussatze als $c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

---

## Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

1) **Rechtwinkliges Dreieck.**

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta = \cos(90^0 - \alpha).$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta = \sin(90^0 - \alpha).$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta = \cot(90^0 - \alpha).$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta = \tan(90^0 - \alpha).$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha), \qquad \cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha),$$

$$\tan\alpha = -\cot(180^0 - \alpha), \quad \cot\alpha = -\tan(180^0 - \alpha).$$

2) **Für das allgemeine Dreieck ist**

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{pp_1p_2p_3}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = p\varrho,$$