# Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

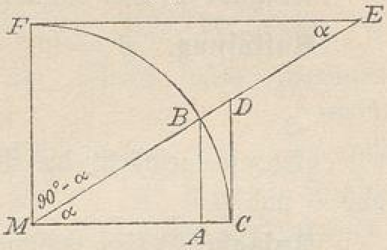
**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig und Berlin, 1904**

II. Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmäßiger Vielecke

9) In Figur 132 sei der Radius $MB = 1$, dann ist $\sin\alpha = \frac{AB}{MB} = \frac{AB}{1} = AB$. Deshalb heißt $AB$ die Sinuslinie für den Winkel $\alpha$. (Die Maßzahl ihrer Länge stimmt überein mit dem Zahlenwerte des Sinus.) Ebenso ist $\cos\alpha = \frac{MA}{MB} = \frac{MA}{1} = MA$, und $MA$ heißt die Kosinuslinie. Diese ist also die Projektion des Schenkels $MB = 1$ auf den Schenkel $MC$. Ferner ist $\tan\alpha = \frac{AB}{MA} = \frac{CD}{MC} = \frac{CD}{1} = CD$, daher heißt $CD$ die Tangentenlinie. (Eigentlich stammt umgekehrt der Name der Funktion $\tan\alpha$ daher, daß $CD$ eine Kreistangente ist.) Endlich ist noch $\cot\alpha = \frac{MA}{AB} = \frac{FE}{MF} = \frac{FE}{1} = FE$; $FE$ heißt die Kotangentenlinie, und ist zugleich die Tangentenlinie für den Komplementwinkel.

Fig. 132.




10) An der Figur erkennt man folgendes:

Wächst der Winkel von $0^0$ bis $90^0$, so wächst der Sinus von 0 bis 1 und die Tangente von 0 bis $\infty$, dagegen nimmt der Kosinus ab von 1 bis 0, die Kotangente nimmt ab von $\infty$ bis 0.

[Weil hier die Funktionen Sinus und Tangente mit dem Winkel wachsen, werden beim Aufschlagen ihrer Logarithmen die sogenannten logarithmischen Differenzen addiert; dagegen werden sie subtrahiert, sobald es sich um Kofunktionen handelt, denn die letzteren nehmen ab, wenn der Winkel wächst.]

## II. Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmäßiger Vielecke.

11) **Aufgabe** a) Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus $a$ und $c$.

**Auflösung.** $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = 90^0 - \alpha$, $b = c\cos\alpha$ (oder $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$), $F = \frac{ab}{2}$. Entsprechend geschieht die Berechnung des Dreiecks aus $b$ und $c$.

**Aufgabe** b) Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus $a$ und $b$.

**Auflösung.** $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = 90^0 - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ (oder $c = \sqrt{a^2 + b^2}$), $F = \frac{ab}{2}$.

**Aufgabe** c) Ein rechtwinkliges Dreieck aus $a$ und $\alpha$ zu berechnen.

**Auflösung.** $\beta = 90^0 - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, $b = \frac{a}{\tan\alpha} = a\cot\alpha$, $F = \frac{ab}{2}$.

(Ebenso geschieht die Berechnung aus $a$ und $\beta$, aus $b$ und $\alpha$, aus $b$ und $\beta$.)

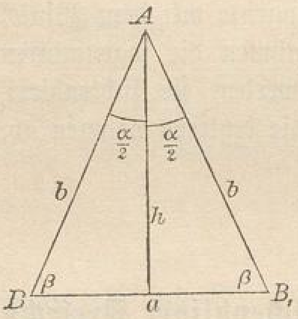
**Aufgabe** d) Ein rechtwinkliges Dreieck aus $c$ und $\alpha$ zu berechnen.

**Auflösung.** $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $\beta = 90^0 - \alpha$, $F = \frac{ab}{2}$.

(Ebenso geschieht die Berechnung aus $c$ und $\beta$.)

12) Versuche Aufgaben wie folgende zu lösen: Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus $a$ und $r$, oder $\alpha$ und $r$, aus $F$ und $\alpha$, $F$ und $a$, $F$ und $c$, $F$ und $\varrho$; aus Umfang $u$ und $\alpha$, aus $u$ und $\varrho$; aus $h$ und $\alpha$, wo $h$ die Höhe auf der Hypotenuse ist, aus $u$ und $h$, $r$ und $h$, $a$ und $\varrho$, $c$ und $\varrho$, $c$ und $\varrho_1$, $c$ und $\varrho_3$. Stelle selbst noch andere Aufgaben auf.

Fig. 133.




13) Das gleichschenklige Dreieck besteht aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, bietet also nichts neues.

**Aufgabe** a) Gegeben Basis $a$ und Seite $b$.

**Auflösung.** $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b}$,

$\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $h = b\cos\frac{\alpha}{2}$, $F = \frac{ah}{2}$.

**Aufgabe** b) Gegeben $a$ und $h$.

**Auflösung.**

$\frac{h}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{2h}{a} = \tan\beta$, $\frac{\alpha}{2} = 90^0 - \beta$, $b = \frac{h}{\sin\beta}$, $F = \frac{ah}{2}$.

**Aufgabe** c) Gegeben $b$ und $\sphericalangle\,\alpha$.

**Auflösung.** $\frac{a}{2} = b\sin\frac{\alpha}{2}$, $h = b\cos\frac{\alpha}{2}$, $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Versuche, wie bei dem rechtwinkligen Dreieck, Aufgaben aufzustellen, bei denen nicht nur Seiten oder Winkel oder $h_1$, sondern auch andere Stücke, wie $h_2$, $F$, $u$, $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $r$ u. s. w. gegeben sind.

14) Das regelmäßige Vieleck. Sind $r$ und die Seitenzahl $n$ gegeben, so ist der Zentriwinkel für jede Seite $\alpha = \frac{360^0}{n}$; der Winkel an der Basis jedes Einzeldreiecks ist $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ oder $\beta = 90^0 - \frac{180^0}{n}$. Aus $r$ und $\frac{\alpha}{2}$ oder $\beta$ läßt sich die Basis, die Höhe, die Fläche des Einzeldreiecks berechnen, sodaß auch am Vieleck alles berechnet werden kann.

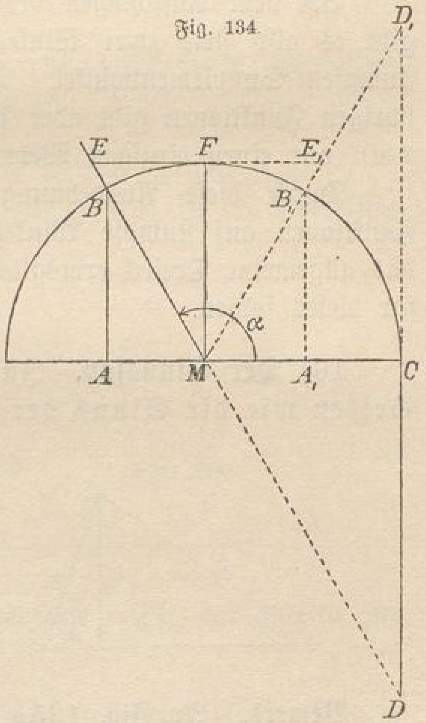
Führe dies durch am 5=Eck, 10=Eck, 15=Eck, am 8=Eck und 16=Eck usw. Neben $n$ kann statt $r$ auch gegeben sein $\varrho$, $a$, $u$, $F$ usw. Auch die übrig bleibenden Segmente des Um=Kreises lassen sich berechnen.

---

## III. Die Funktionen des stumpfen Winkels und das allgemeine Dreieck.

15) In Fig. 134 sei $\alpha$ ein stumpfer Winkel. Fällt man ebenso wie in Fig. 132 von $B$ aus auf den Schenkel $MC$ ein Lot, und ist $MB = 1$, so nennt man naturgemäß die Projektion $MA$ von $MB$ wie vorher die Kosinuslinie. Da diese aber auf die Rückverlängerung des wiederum als positiv aufzufassenden Schenkels $MC$ fällt, so muß man $MA$ als negativ auffassen.*) Aus $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ würde, wenn man das Fortbestehen dieser Formel verlangt, $AB$ als Sinuslinie folgen, denn es ist $AB = \sqrt{1 - MA^2}$, wobei $MA$ auch negativ sein kann. Da aber jetzt die Sinuslinie dieselbe Richtung wie vorher hat, so ist sie wiederum als positiv aufzufassen. — Vergleicht man die Kosinus= und die Sinuslinie des stumpfen Winkels $\alpha$ mit der seines Supplementwinkels $\beta = 180^0 - \alpha$, so erkennt man,

Fig. 134.




---

*) Vergleiche die geometrische Darstellung positiver und negativer Größen in Figur 129.