Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Die vier Hauptfunktionen. Berechnung der Funktionen für gewisse Winkel. Berechnung einfacher rechtwinkliger Dreiecke. Einfache Beziehungen zwischen den Funktionen. Darstellung der Funktionen durch ...

Dritte Abteilung.

Trigonometrie.

Lehraufgabe der Untersekunda.

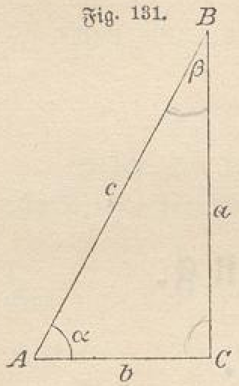
I. Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck.

1) Unter Trigonometrie (Dreiecksmeßkunst) versteht man die Berechnung von Dreiecken aus drei zur Berechnung geeigneten Stücken. Solche Berechnungen fanden schon in der Geometrie statt. Sie beschränkten sich aber auf die Bestimmung von Seiten und Flächen, während Winkel nur insoweit zur Berechnung kamen, als sie, wie die Winkel 60^0, 30^0, 45^0, 36^0 u. s. w. geometrisch konstruiert werden konnten. Auch waren die gegebenen Stücke in der Regel nur Seiten und Flächen, nur ausnahmsweise konstruierbare Winkel. Schon die Landmeßkunst beansprucht volle Befreiung von jenen Einschränkungen. Sie verlangt die Berechnung des Dreiecks mit Hilfe beliebiger Winkel und die Berechnung beliebiger Winkel aus gegebenen Stücken. Das Ziel der Trigonometrie besteht zunächst darin, jene Schranken aufzuheben. Zu diesem Zwecke ist es nötig, zwischen den Seiten und Winkeln bestimmte Beziehungen aufzustellen.

2) Nach der Ähnlichkeitslehre haben rechtwinklige Dreiecke dieselben Winkel, sobald sie in einem Seitenverhältnis übereinstimmen. Aus dem Seitenverhältnis also müssen sich die spitzen Winkel bestimmen lassen; umgekehrt folgen aus den Winkeln die Seitenverhältnisse Ist z. B. in Fig. 131 $\frac{a}{b} = 1$, so ist $\alpha = \beta = 45^0$. Ist $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$,

so ist $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$, denn es handelt sich um die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks, u. s. w.

Fig. 131.



Solcher Seitenverhältnisse sind sechs möglich, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ und ihre Umkehrungen $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{b}{a}$. Nur mit den drei erstgenannten braucht man sich zu beschäftigen, die Einrichtung der Logarithmentafeln macht es aber zweckmäßig, auch $\frac{b}{a}$ heranzuziehen.

Die vier bezeichneten Seitenverhältnisse hat man mit dem Winkel α folgendermaßen in Beziehung gesetzt:

Man bezeichnet $\frac{a}{c}$ als den Sinus des Winkels α, $\frac{b}{c}$ als den Kosinus desselben, $\frac{a}{b}$ als die Tangente desselben, $\frac{b}{a}$ als seine Kotangente.*)

Man schreibt abgekürzt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \tan\alpha = \frac{a}{b},\ \cot\alpha = \frac{b}{a}.$$

In Worten: Im rechtwinkligen Dreieck ist

der Sinus eines Winkels das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse,

der Kosinus eines Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse,

die Tangente eines Winkels das Verhältnis der Gegenkathete zur anliegenden Kathete,

die Kotangente eines Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Gegenkathete.

Weil diese vier Verhältnisse von der Größe der Winkel abhängig sind, bezeichnet man sie als Funktionen der Dreieckswinkel oder als die trigonometrischen oder goniometrischen Funktionen.

*) Die Inder hatten für die halbe Sehne das Wort dschyâ oder dschîva. Die Araber übernahmen es als dschîba. Wurden die Vokale nicht geschrieben, so konnte man lesen dschaib, was Busen, Herz, Tasche bedeutet. Die falsche Lesart bürgerte sich ein, und so wurde die Übersetzung sinus (durch Gerhard von Cremona) herbeigeführt. — Die übrigen Worte werden später gelegentlich erläutert. Die Verhältnisse $\frac{c}{b}$ = Sekante von α, und $\frac{c}{a}$ = Kosekante von α sind für die Schulzwecke überflüssig.

3) **Beispiele.** Für $a = b$ ist $\sphericalangle \alpha = 45^0$, und dabei ist $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, also $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, also:

$$\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{0{,}5} = \cos 45^0;$$

$$\tan 45^0 = \frac{a}{a} = 1, \quad \cot 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$

Im gleichseitigen Dreieck mit Seite a ist die Höhe $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Demnach ist in dem durch diese Höhe abgeschnittenen rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin 60^0 = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = \cos 30^0,$$

$$\cos 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \tfrac{1}{2} = \sin 30^0,$$

$$\tan 60^0 = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} = \cot 30^0,$$

$$\cot 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tan 30^0.$$

Fällt man ferner bei einem konstruierbaren Zentriwinkel vom Zentrum aus das Lot auf die Sehne, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, deren Winkelfunktionen man berechnen kann. Ist z. B. r der Radius des Kreises, so ist die Seite des regelmäßigen Zehnecks $\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, die halbe Seite also $\frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)$, folglich:

$$\cos 72^0 = \frac{\frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \sin 18^0 \text{ usw.}$$

Nach Art von Abschnitt 308 der Geometrie kann man stets rechnend zu den halben Winkeln übergehen.

So erkennt man die Möglichkeit von Tabellen für die Funktionen der Winkel von 0^0 bis 90^0 und von Tabellen der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Das Aufschlagen der Funktionen (bezw. ihrer Logarithmen) zu gegebenen Winkeln ist zu üben, ebenso das Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Funktionswerten (bezw. ihren Logarithmen).

4) **Aufgabe** a) Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Hypotenuse $c = 12$ und die Kathete $a = 7$. Wie groß sind seine Winkel?

Auflösung. $\sin\alpha = \frac{7}{12}$, also $\lg\sin\alpha = \lg\frac{7}{12} = \lg 7 - \lg 12$.

$$\begin{array}{lr} & \lg\ 7 = 0{,}84510 \\ & \lg 12 = 1{,}07918 \\ \hline \lg\sin\alpha = \lg 7 - \lg 12 & = 9{,}76592 - 10^{*)} \end{array}$$

folglich $\sphericalangle\,\alpha = 35^0\,41'\,10''$

$\sphericalangle\,\beta = 54^0\,18'\,50''$.

Aufgabe b) Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Katheten $a = 15$ und $b = 8$. Wie groß sind die Winkel?

Auflösung. $\tan\alpha = \frac{15}{8}$, $\lg\tan\alpha = \lg 15 - \lg 8$.

$$\begin{array}{lr} & \lg 15 = 1{,}17609 \\ & \lg\ 8 = 0{,}90309 \\ \hline \lg\tan\alpha = \lg 15 - \lg 8 & = 0{,}27300 \end{array}$$

folglich $\sphericalangle\,\alpha = 61^0\,55'\,40''$

$\sphericalangle\,\beta = 28^0\ \ 4'\,20''$.

Aufgabe c) Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Hypotenuse 13 und den Winkel $\alpha = 35^0\,20'\,10''$. Wie groß sind die Seiten a und b und der Inhalt F?

Auflösung. $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, folglich $a = c\cdot\sin\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, also $b = c\cos\alpha$ (auch $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$ kann angewandt werden). $F = \frac{ab}{2}$. Also:

$\lg a = \lg c + \lg\sin\alpha$, $\lg b = \lg c + \lg\cos\alpha$, $\lg F = \lg a + \lg b - \lg 2$.

$$\begin{array}{rl} \lg c = 1{,}11394 & \qquad \lg c = 1{,}11394 \\ \lg\sin\alpha = 9{,}76221 - 10 & \qquad \lg\cos\alpha = 9{,}91157 - 10 \\ \hline \lg a = 0{,}87615 & \qquad \lg b = 1{,}02551 \\ a = 7{,}5188 & \qquad b = 10{,}605 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lg a = 0{,}87615 \\ \lg b = 1{,}02551 \\ \hline \lg a + \lg b = 1{,}90166 \\ \lg 2 = 0{,}30103 \\ \hline \lg F = 1{,}60063 \\ F = 39{,}869. \end{array}$$

---

*) In den Tabellen ist statt 0, ... — 1 stets gesetzt 9, ... — 10, statt 0, ... — 2 stets 8, . . . — 10, statt 0, . . . — 3 stets 7, . . . — 10 u. s. w.

Aufgabe d) In einer Stadt, die unter $51^0\,30'$ nördlicher Breite liegt, sucht jemand bei Nacht eine Stellung auf, bei der ihm die Spitze eines Domturms genau den Polarstern verdeckt. Wie hoch ist die Spitze über dem Auge des Beobachters, wenn seine horizontale Entfernung von der Mitte des Turmes 120 m beträgt?

Auflösung. Unter der genannten Breite steht der Polarstern $51^0\,30'$ über dem Horizonte. Es ist also $\frac{h}{120} = \tan 51^0\,30'$, d. h. $h = 120 \tan 51^0\,30'$.

$$\begin{array}{r@{\;=\;}l} \lg e & 2{,}07918 \\ \lg \tan\alpha & 0{,}09939 \\ \hline \lg h & 2{,}17857 \\ h & 150{,}86 \text{ m.} \end{array}$$

Aufgabe e) Wie viele Meilen (bezw. Kilometer) beträgt der Umfang des 50. Parallelkreises der Erdkugel, wenn der Radius der Erde zu 860 Meilen angenommen wird? (Geogr. Meile = 7420,44 km.)

Auflösung. Zieht man von einem Punkte des Parallelkreises aus einen Erdradius r und ein Lot ϱ nach der Erdachse, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel $(90^0 - 50^0)$ bei dem Erdzentrum. Also wird $\varrho = r \sin 40^0 = r \cos 50^0$. Der gesuchte Umfang ist $u = 2\varrho\pi = 2r\pi \cos 50^0$. Also $\lg u = \lg 2 + \lg r + \lg \pi + \lg \cos 50^0$;

$$\begin{array}{r@{\;=\;}l} \lg 2 & 0{,}30103 \\ \lg r & 2{,}93450 \\ \lg \pi & 0{,}49715 \\ \lg \cos 50^0 & 9{,}80807 - 10 \\ \hline \lg u & 3{,}54075 \\ u & 3473{,}4 \text{ Meilen.} \end{array}$$

5) Zwischen den Funktionen bestehen einfache Beziehungen, die sogenannten goniometrischen (der Winkelmessung entspringenden) Beziehungen.

Bildet man die Funktionen der spitzen Winkel α und $\beta = 90^0 - \alpha$ eines rechtwinkligen Dreiecks, so ergibt sich folgendes:

1) $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha, \quad \tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha,$

in Worten: Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Komplementwinkels; die Kotangente eines Winkels ist gleich der Tangente seines Komplementwinkels. Zusammengefaßt: Die Kofunktionen eines Winkels sind gleich den Funktionen des Komplementwinkels. (Kosinus heißt also des **Komplementes Sinus,** sodaß es sich um eine abgekürzte Schreibweise handelt.)

Deshalb haben die Logarithmentafeln nur die Winkel von 0^0 bis 45^0 nötig. —

6) Ferner ist

$$2) \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

denn
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \cot\alpha,$$

woraus noch folgt

$$3) \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

(Folglich ist $\lg\cot\alpha = \lg 1 - \lg\tan\alpha = 0 - \lg\tan\alpha = -\lg\tan\alpha$, was in den Tafeln zu vergleichen ist. So ist z. B. $\lg\tan 18^0 = 9{,}51178 - 10 = -0{,}48822 = -\lg\cot 18^0$. Die Tabelle der Kotangenten ist also leicht aus der der Tangenten abzuleiten, welche ihrerseits aus $\lg\tan\alpha = \lg\sin\alpha - \lg\cos\alpha$ hervorgeht.)

7) Eine weitere Formel ist:

$$4) \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Beweis. $\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$

folglich $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$

Folgerungen daraus sind

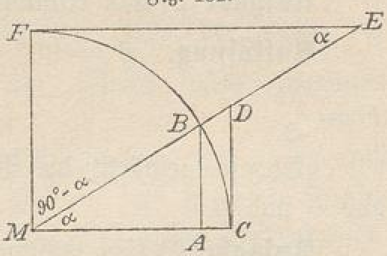
$$5) \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

(Aus $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ergibt sich, wie man aus der logarithmischen Sinustabelle die der Kosinus berechnen kann. Man kennt hiernach und nach obigem sämtliche Funktionen aller Winkel zwischen 0^0 und 90^0, wenn man nur die Sinus von 0^0 bis 45^0 kennt.)

8) Ist im rechtwinkligen Dreieck die Kathete a von der Länge Null, so ist auch $\sphericalangle\,\alpha = 0$, und es ergibt sich $\sin 0^0 = \frac{a}{c} = 0$, und, da b und c aufeinander fallen, $\cos 0^0 = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1$, $\tan 0^0 = \frac{0}{b} = 0$, $\cot 0^0 = \frac{b}{0} = \infty$ (unendlich groß). Für den Komplementwinkel 90^0 folgt: $\sin 90^0 = 1, \quad \cos 90^0 = 0, \quad \tan 90^0 = \infty, \quad \cot 90^0 = 0.$

9) In Figur 132 sei der Radius $MB = 1$, dann ist $\sin\alpha = \frac{AB}{MB} = \frac{AB}{1} = AB$. Deshalb heißt AB die Sinuslinie für den Winkel α. (Die Maßzahl ihrer Länge stimmt überein mit dem Zahlenwerte des Sinus.) Ebenso ist $\cos\alpha = \frac{MA}{MB} = \frac{MA}{1} = MA$, und MA heißt die Kosinuslinie. Diese ist also die Projektion des Schenkels $MB = 1$ auf den Schenkel MC. Ferner ist $\tan\alpha = \frac{AB}{MA} = \frac{CD}{MC} = \frac{CD}{1} = CD$, daher heißt CD die Tangentenlinie. (Eigentlich stammt umgekehrt der Name der Funktion $\tan\alpha$ daher, daß CD eine Kreistangente ist.) Endlich ist noch $\cot\alpha = \frac{MA}{AB} = \frac{FE}{MF} = \frac{FE}{1} = FE$; FE heißt die Kotangentenlinie, und ist zugleich die Tangentenlinie für den Komplementwinkel.

Fig. 132.



10) An der Figur erkennt man folgendes:

Wächst der Winkel von 0^0 bis 90^0, so wächst der Sinus von 0 bis 1 und die Tangente von 0 bis ∞, dagegen nimmt der Kosinus ab von 1 bis 0, die Kotangente nimmt ab von ∞ bis 0.

[Weil hier die Funktionen Sinus und Tangente mit dem Winkel wachsen, werden beim Aufschlagen ihrer Logarithmen die sogenannten logarithmischen Differenzen addiert; dagegen werden sie subtrahiert, sobald es sich um Kofunktionen handelt, denn die letzteren nehmen ab, wenn der Winkel wächst.]

II. Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmäßiger Vielecke.

11) **Aufgabe** a) Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus a und c.

Auflösung. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = 90^0 - \alpha$, $b = c\cos\alpha$ (oder $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$), $F = \frac{ab}{2}$. Entsprechend geschieht die Berechnung des Dreiecks aus b und c.

Aufgabe b) Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus a und b.