Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Erklärung dieser Logarithmen. Andeutungen über die Möglichkeit ihrer Berechnung. Logarithmus eines Produktes, eines Bruches, einer Potenz, einer Wurzel. Rechnungserleichterung durch Logarithmen. ...

III. Die gemeinen oder Briggischen Logarithmen.

105) Aus $a = b^m$ folgt $b = a^{\frac{1}{m}}$. Es fragt sich, ob man aus der ersteren Gleichung nicht nur b, sondern statt dessen auch m berechnen kann. Wir beschränken uns vorläufig auf die Grundzahl 10 und setzen folgendes fest: Ist $10^\alpha = a$, so nennt man α den gemeinen*) oder Briggischen Logarithmus von a, geschrieben $\lg a$; a heißt der Numerus zum Logarithmus α.

Also 1) aus $10^\alpha = a$ folgt $\alpha = \lg a$.

In Worten: Der gemeine Logarithmus einer Zahl a ist der Exponent, mit dem man die Grundzahl 10 potenzieren muß, um jene Zahl zu erhalten.

106) So ist z. B.

$10^0 = 1$,	folglich	$0 = \lg 1$
$10^1 = 10$,	folglich	$1 = \lg 10$
$10^2 = 100$,	folglich	$2 = \lg 100$
$10^3 = 1000$,	folglich	$3 = \lg 1000$
. . .	. . .	. . .

Ebenso

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$	folglich	$-1 = \lg 0{,}1$
$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$,	folglich	$-2 = \lg 0{,}01$
$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$,	folglich	$-3 = \lg 0{,}001$
. . .	. . .	. . .

Die Logarithmen der Potenzen von 10 mit positiven ganzen und negativen ganzen Exponenten sind also leicht zu finden.

107) Man kann auch gewisse andere Logarithmen bezw. Numerus leicht bestimmen. Es ist z. B.

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}1622\cdots,$$

folglich ist

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5 = \lg 3{,}1622\cdots$$

---

*) Logarithmen mit anderen Grundzahlen werden später bekannt gegeben.

Ferner ist

$$10^{\frac{3}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}} = 10 \cdot \sqrt{10} = 31{,}622\cdots,$$

folglich

$$\tfrac{3}{2} = 1{,}5 = \lg 31{,}622\cdots$$

Ebenso:

$$10^{\frac{5}{2}} = 10^{2+\frac{1}{2}} = 100\sqrt{10} = 316{,}22\cdots,$$

folglich

$$\tfrac{5}{2} = 2{,}5 = \lg 316{,}22\cdots.$$

Ähnlich kann man für $10^{\frac{1}{3}}$, $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, $10^{\frac{1}{6}}$, $10^{\frac{5}{6}}$, $10^{\frac{1}{8}}$, $10^{\frac{3}{8}}$, $10^{\frac{5}{8}}$, $10^{\frac{7}{8}}$ u. s. w. und ihre 10-fachen, 100-fachen, 1000-fachen Werte und für die umgekehrten Werte aller dieser Zahlen die logarithmischen Folgerungen ziehen.

Schon so erkennt man die Möglichkeit, für ganze Reihen von Zahlen festzustellen, von welchen anderen Zahlen sie die Logarithmen sind, man erkennt die Möglichkeit logarithmischer Tabellen, der sogenannten Logarithmentafeln, obwohl diese auf anderem Wege berechnet worden sind. Schaltet man die neugefundenen Beziehungen an geeigneter Stelle in die Tabelle unter 106) ein, so erkennt man folgendes:

Die Logarithmen positiver einstelliger Zahlen beginnen mit 0,
" " " zweistelliger " " " 1,
" " " dreistelliger " " " 2,
" " " vierstelliger " " " 3,
. . . .
. . . .
. . . .
" " " n-stelliger " " " $(n-1)$.

Die Logarithmen echter Brüche sind negativ, und zwar gilt folgendes:

Liegt die Zahl zwisch. 0 u. 0,1, so liegt der Logarithmus zwisch. 0 u. — 1,
" " " " 0,1 u. 0,01, " " " " " — 1 u. — 2,
" " " " 0,01 u. 0,001, " " " " " — 2 u. — 3,
usw.

[108) Oben waren zu gewissen Logarithmen die Numerus berechnet; umgekehrt kann gefragt werden, wie man zu einem Numerus den Logarithmus findet. Die Möglichkeit dazu soll an einem Beispiele nachgewiesen werden.

[**Aufgabe.** x aus der Gleichung $10^x = 2$ zu berechnen, d. h. den Logarithmus der Zahl 2 aufzufinden.

Auflösung. 2 liegt zwischen $10^0 = 1$ und $10^1 = 10$, also ist

$$10^0 < (10^x = 2) < 10^1, \text{ folglich ist } 0 < x < 1,$$

daraus folgen (durch wiederholtes Quadrieren des in der Klammer Stehenden) die „Ungleichungen"

$10^0 < (10^{2x} = 4) < 10^1$ folglich $0 < 2x < 1$ und $0 < x < \frac{1}{2}$

$10^1 < (10^{4x} = 16) < 10^2$ folglich $1 < 4x < 2$ und $\frac{1}{4} < x < \frac{2}{4}$

$10^2 < (10^{8x} = 256) < 10^3$ folglich $2 < 8x < 3$ und $\frac{2}{8} < x < \frac{3}{8}$

$10^4 < (10^{16x} = 65536) < 10^5$ folglich $4 < 16x < 5$ und $\frac{4}{16} < x < \frac{5}{16}$.

So fortfahrend kann man x zwischen engere und engere Grenzen einschließen, diese in Dezimalbrüchen darstellen und durch die Vergleichung der zusammengehörigen Werte erkennen, bis auf wie viele Stellen man den Wert von lg 2 gefunden hat. Oben ist erst gezeigt, daß x zwischen 0,25 und 0,312 liegt, und es dauert ziemlich lange, bis man gezeigt hat, daß $\lg 2 = 0{,}3010300$ ist. (Man berechnet jetzt die Logarithmen auf besserem Wege weit schneller mit großer Genauigkeit.)

Sind m und n ganze Zahlen und ist $m > n$, so gibt $10^{\frac{m}{n}}$ nur dann eine ganze Zahl, und zwar eine Potenz von 10 mit ganzem Exponenten, wenn n in m ohne Rest aufgeht. Ist letzteres nicht der Fall, so ist $10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$ eine Irrationalzahl (vgl. Abschnitt 85 und 96). Setzt man also $10^x = a$, und ist a eine ganze Zahl, aber keine Potenz von 10 mit ganzem positiven Exponenten, so muß x irrational sein. (Denn wäre x gebrochen rational, also gleich $\frac{m}{n}$, so wäre $\sqrt[n]{10^m} = a$ irrational.) Folglich sind die gemeinen Logarithmen aller ganzen Zahlen, die nicht Potenzen von 10 mit ganzem positiven Exponenten sind, Irrationalzahlen. Die Bedeutung der Irrationalzahlen wird also durch die Einführung der Logarithmen ganz erheblich gesteigert. Sie bilden auch hier für das praktische Rechnen die Regel, die Rationalzahlen dagegen eine verschwindende Ausnahme.

Ist der Logarithmus einer positiven reellen Zahl weder ganz, noch rational, noch algebraisch irrational, so handelt es sich um eine t r a n s z e n d e n t e I r r a t i o n a l i t ä t, d. h. um eine solche, die über das Gebiet der algebraischen Zahlen hinausgeht und so eine neue Zahlenwelt eröffnet.]

In den meisten Logarithmentafeln befindet sich eine Anweisung zum Aufschlagen des zu einem Numerus gehörigen Logarithmus und des zu einem Logarithmus gehörigen Numerus.

Wir beschränken uns auf die Logarithmen positiver Zahlen. [Die Logarithmen von negativen Zahlen kommen in den oben abgeleiteten Tabellen nicht vor. Der Grund ergibt sich sofort.]

109) Die Grundformeln für das Rechnen mit Logarithmen.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ist} & \alpha = \lg a, & \text{so folgt } 10^\alpha = a \\ \text{ist} & \beta = \lg b, & \text{so folgt } 10^\beta = b \end{array}\right\} \qquad 1)$$

also durch Multiplikation $10^\alpha \cdot 10^\beta = ab$ oder $10^{\alpha+\beta} = ab$ folglich ist $\alpha + \beta = \lg(ab)$ oder $\lg a + \lg b = \lg(ab)$. Merke

$$2) \qquad \lg(ab) = \lg a + \lg b,$$

d. h.: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen*), $\lg(abc\ldots) = \lg a + \lg b + \lg c + \cdots$.

Regel. Man logarithmiert ein Produkt, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert.

Dagegen hätte man durch Division aus den Gleichungen 1) erhalten

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{a}{b}, \quad \text{oder} \quad 10^{\alpha-\beta} = \frac{a}{b}, \quad \text{d. h.} \quad \alpha - \beta = \lg\frac{a}{b}$$

oder

$$\lg a - \lg b = \lg\frac{a}{b}.$$

Man merke:

$$3) \qquad \lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b,$$

d. h.: Der Logarithmus eines Bruches ist der Logarithmus des Zählers vermindert um den des Nenners.

---

*) Um zu sehen, wie es mit den Logarithmen negativer Zahlen steht, wähle man für den Faktor -1 die positive Schreibweise $+i^2$. Da z. B. $(-10) = ii \cdot 10$ ist, so folgt, wenn man das Multiplikationsgesetz gelten läßt, $\lg(-10) = \lg i + \lg i + \lg 10 = 2\lg i + 1$, also $\lg(-10) = 1 + 2\lg i = 1 + 2\lg\sqrt{-1}$. Allgemein: $\lg(-a) = \lg a + 2\lg i$. So erkennt man, daß die Logarithmen negativer reeller Zahlen nur durch die imaginären Zahlen erklärt werden können, worauf wir hier nicht eingehen. Wiederum zeigt sich, daß man die imaginären Größen notwendig einführen muß, wenn man die mathematischen Operationen ganz allgemein auffassen will.

Regel. Man logarithmiert einen Bruch, indem man vom Logarithmus des Zählers den des Nenners subtrahiert.

Ist $\alpha = \lg a$, so folgt $10^\alpha = a$, und, wenn man links und rechts zur n^{ten} Potenz erhebt, $(10^\alpha)^n = a^n$, d. h. $10^{n\alpha} = a^n$, folglich $n\alpha = \lg a^n$ oder $n \lg a = \lg(a^n)$. Man merke:

$$4) \qquad \lg(a^n) = n \lg a,$$

d. h.: Der Logarithmus einer Potenz ist das Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Grundzahl.

Regel. Man logarithmiert eine Potenz, indem man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Exponenten multipliziert.

Ist $\alpha = \lg a$, so folgt $10^\alpha = a$, und, wenn man beiderseits die n^{te} Wurzel auszieht, $\sqrt[n]{10^\alpha} = \sqrt[n]{a}$, oder $10^{\frac{\alpha}{n}} = \sqrt[n]{a}$, also $\frac{\alpha}{n} = \lg \sqrt[n]{a}$ oder $\frac{1}{n} \lg a = \lg \sqrt[n]{a}$. Man merke:

$$5) \qquad \lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a,$$

d. h.: Der Logarithmus einer Wurzel ist der Quotient aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Regel. Man logarithmiert eine Wurzel, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

110) Diese Formeln führen in Verbindung mit den Logarithmentafeln auf ganz außerordentliche Rechenerleichterungen, wozu einige Beispiele gegeben sein mögen (fünfstellige Logarithmen). Besonders das Ausziehen höherer Wurzeln wird ermöglicht bezw. erleichtert; z. B. ist $\lg \sqrt[5]{a} = \frac{1}{5} \lg a = 0{,}2 \lg a$, wozu der Numerus aufzuschlagen ist, wenn man $\sqrt[5]{a}$ erhalten will.

Aufgabe. $\dfrac{51{,}263^2 \cdot 5{,}7821^3}{\sqrt{772{,}45 \cdot 0{,}98216}}$ oder $\dfrac{a^2 \cdot b^3}{\sqrt{c \cdot d}}$.

Auflösung. $\lg \dfrac{a^2 b^3}{\sqrt{c \cdot d}} = [2 \lg a + 3 \lg b] - \left[\frac{1}{2} \lg c + \lg d\right]$.

$\lg a = 1{,}70980$	$2 \lg a = 3{,}41960$
$\lg b = 0{,}76209$	$3 \lg b = 2{,}28627$
lg des Zählers:	$\lg Z = 5{,}70587$

$$\lg c = 2{,}88787 \quad \tfrac{1}{2}\lg c = 1{,}44394$$
$$\lg d = 0{,}99218 - 1$$
$$\text{lg des Nenners:} \quad \lg N = 1{,}43612$$

$$\lg \frac{Z}{N} = \lg Z - \lg N = 4{,}26975$$

$$\frac{Z}{N} = 18610.$$

Bemerkung. Mit Hilfe der Logarithmen verwandelt man das Multiplizieren in Addieren, das Dividieren in Subtrahieren, das Potenzieren in Multiplizieren, das Wurzelausziehen in Dividieren. Dagegen sind die Logarithmen nicht brauchbar für die Vereinfachung der Addition und Subtraktion (man müßte denn durch Absonderung gemeinschaftlicher Faktoren oder durch sonstige Zerlegung in Produkte, z. B. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, Vorteile finden). Die negativen Logarithmen schreibt man positiv, zieht jedoch von dem Dezimalbruch (Mantisse) die ganzzahlige Charakteristik (Kennziffer) ab. So war im vorigen Beispiele $\lg d = 0{,}99218 - 1$, was dasselbe ist wie $-0{,}000782$.

Sind Wurzeln aus echten Brüchen auszuziehen, z. B. $\sqrt[3]{0{,}98216}$, so ist nach obigem der Logarithmus durch den Exponenten zu dividieren, und dabei kann die abzuziehende Kennziffer, die mit zu dividieren ist, eine gebrochene Zahl werden, was nicht mehr in das gebräuchliche Rechenschema paßt. Um dies zu vermeiden, vermehrt man den Logarithmus und die abzuziehende Kennziffer um dieselbe Zahl, und zwar so, daß jene Division aufgeht. So wird im letzten Beispiele geschrieben $\lg d = 2{,}99218 - 3$, sodaß $\frac{1}{3}\lg d = 0{,}99739 - 1$ wird. Demnach ist

$$\sqrt[3]{0{,}98216} = 0{,}99401.$$

111) Aber nicht nur Rechenerleichterungen finden statt, sondern es werden auch ganz neue Gebiete eröffnet, z. B. das der Exponentialgleichungen, bei denen die Unbekannte in einem Exponenten steht.

Aufgabe. x aus der Gleichung $2^x = 3$ zu berechnen.

Auflösung. $\lg(2^x) = \lg 3$, folglich $x \lg 2 = \lg 3$, folglich $x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$ und $\lg x = \lg(\lg 3) - \lg(\lg 2)$. Nun ist:

$$\lg 3 = 0{,}47712, \text{ also } \lg(\lg 3) = 0{,}67863 - 1$$
$$\lg 2 = 0{,}30103, \text{ also } \lg(\lg 2) = 0{,}47861 - 1$$
$$\lg x = \lg(\lg 3) - \lg(\lg 2) = 0{,}20002$$

folglich $x = 1{,}5850$.

Aufgabe. $a^x b^{2x} = c.$

Auflösung. $x \lg a + 2x \lg b = \lg c,\ x(\lg a + 2\lg b) = \lg c,$

$$x = \frac{\lg c}{\lg a + 2\lg b}.$$

Auf der Lösbarkeit der Exponentialgleichungen beruht z. B. die Lösbarkeit gewisser Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung. Jetzt soll nur auf die erstere eingegangen werden.

112) Zinseszinsrechnung.

Es sei c ein bestimmtes Anfangskapital, welches zu einem gewissen Prozentsatz p zinsbar angelegt wird. Da nun 100 Mark jährlich p Mark Zinsen geben, eine Mark also $\frac{p}{100}$ Mark gibt, so geben c Mark $c\frac{p}{100}$ Mark, und nach einem Jahre erhält man durch Zinszuschlag $c + \frac{cp}{100}$ Mark als ein neues Kapital $c_1 = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Das vergrößerte Kapital verwandelt sich im zweiten Jahre in $c_2 = c_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, nach einem weiteren Jahre erhält man $c_3 = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$. Nennt man also das Schlußkapital k, so hat man nach n Jahren, wenn man den Prozentsatz mit dem kaufmännischen Zeichen $\%$ und die Klammer mit q bezeichnet:

1) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n = c \cdot q^n,$$

folglich

2) $$\lg k = \lg c + n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg c + n \lg q,$$

also zur Berechnung des Anfangskapitals bei gegebenem Endkapital

3) $$\lg c = \lg k - n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg k - n \lg q.$$

Zur Berechnung des Prozentsatzes hat man zunächst $n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg k - \lg c$, oder

4) $$\lg q = \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \frac{1}{n}(\lg k - \lg c).$$

Bezeichnet man den Numerus, der zur rechten Seite gehört, als $N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right)$, so ergibt sich $\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right)$, also

4*) $$\% = 100\left[N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right) - 1\right] = 100\,[N - 1].$$

Die Berechnung der Anzahl der Jahre beruht auf der Exponentialgleichung 1) und erfolgt, wie sich aus 2) ergibt, nach der Formel

5) $$n = \frac{\lg k - \lg c}{\lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right)} = \frac{\lg k - \lg c}{\lg q},$$

also

5*) $$\lg n = \lg[\lg k - \lg c] - \lg\lg\left(1 + \tfrac{\%}{100}\right) = \lg[\lg k - \lg c] - \lg\lg q.$$

Diese letzte Lösung gilt nur für ganze Zahlen n, da der Zinszuschlag nicht mitten im Jahre, sondern nur am Jahresschluß erfolgt. Der etwaige Zeitüberschuß würde also eine besondere Vereinbarung nötig machen.

113) Werden die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen, so hat man die doppelte Anzahl der Termine, also bei n Jahren $2n$ Termine, für diese aber den halben Prozentsatz. Dies gibt für n Jahre die Grundformel

6) $$k = \left(1 + \tfrac{\%}{200}\right)^{2n},$$

aus der die anderen durch Logarithmierung usw. abzuleiten sind.

Bei monatlichem Zinszuschlag erhält man ebenso

7) $$k = c\left(1 + \tfrac{\%}{1200}\right)^{12n},$$

also bei jährlich m-maligem Zinszuschlag

8) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{100m}\right)^{mn}.$$

Beispiele zur Zinseszinsrechnung finden sich in den Aufgabensammlungen. Sie beziehen sich auch auf die Zunahme der Bevölkerung von Städten und Staaten, auf die Entwicklung der Verkehrsverhältnisse, z. B. auf die Zunahme der jährlichen Frachtmengen unserer Eisenbahnen, des Holzbestandes von Waldungen u. dgl.

Wird der Prozentsatz als negativ angenommen, geht also die Grundformel über in

$$k = c\left(1 - \tfrac{\%}{100}\right)^n = cq_1^n,$$

so handelt es sich z. B. um eine allmähliche Abnahme des Anfangskapitals, die jedoch niemals ganz zu Ende geht. Man kann $q_1 = \left(1 - \frac{\%}{100}\right)$ als den Verminderungsfaktor bezeichnen.

Die praktisch wichtigste Anwendung der Logarithmenlehre findet für die Schule in dem Gebiete der Trigonometrie statt.
