Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

II. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten gedacht werden können. Die imaginären Zahlen, mit den reellen zusammengesetzt, geben das Gebiet der komplexen Zahlen. Zu ihrer geometrischen Darstellung ist auf der früher besprochenen Geraden, die durch die Rational- und Irrationalzahlen (algebraische und transzendente) stetig erfüllt ist, kein Raum mehr vorhanden. Auf einer höheren Stufe soll gezeigt werden, daß man mit den komplexen Zahlen eine ganze Ebene stetig erfüllen kann. Diese geometrische Darstellungsweise ist für die Entwickelung der Mathematik von außerordentlicher Bedeutung geworden.]

102) Hat man eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

und eine zweite Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

so kann man y aus der zweiten berechnen, den Wert in die erste einsetzen und die so entstehende Gleichung zweiten Grades auflösen, was zwei Werte für x gibt. Jeder von diesen, in die zweite Gleichung eingesetzt, ermöglicht die Berechnung der beiden zugehörigen Werte für y.

Auch xy ist als Ausdruck zweiten Grades zu betrachten.

Handelt es sich um zwei Gleichungen zweiten Grades mit je zwei Unbekannten, so gibt die Entfernung (Elimination) von y im allgemeinen eine Gleichung vom vierten Grade, nur in besonderen Fällen läßt sich die Gleichung auf den zweiten Grad zurückführen.

Übungsmaterial findet sich in den Aufgabensammlungen.

II. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

103) Es ist $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, sobald $m > n$, und $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, sobald $n > m$. Ist $m = n$, so ist $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$, also kann man, da $\frac{a^m}{a^m} = 1$ und $m - m = 0$ ist, schreiben:

1) $$a^0 = 1.$$

Jede Zahl, zur 0^{ten} Potenz erhoben, ist also gleich 1. Dies ist lediglich die Definition der Potenz mit dem Exponenten Null.

Demnach ist $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a^1}$, also, wenn man die frühere Schreibweise beibehält: $\frac{a^0}{a^1} = a^{0-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$, und ebenso findet man allgemein

2) $$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{und} \quad a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten soll demgemäß von jetzt ab bedeuten den umgekehrten Wert von der entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten. Auch dies ist nur eine Definition.

Ist dies festgesetzt, so ergibt sich

$$a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = a^{n-m} = a^{-m+n},$$

d. h. der Satz für die Multiplikation von Potenzen gleicher Grundzahl gilt auch für negative Exponenten.

Ebenso ist

$$\frac{a^{-m}}{a^n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß alle für positive ganze Exponenten bewiesenen Sätze auch für negative Exponenten gelten, z. B.

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m+n}, \; a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n}, \; \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n},$$

$$a^{-m} b^{-m} = (ab)^{-m}, \; \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \; (a^{-m})^n = a^{-mn},$$

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn}, \; (a^{-m})^{-n} = a^{mn}.$$

104) In Abschnitt 95 wurde gezeigt, daß $\sqrt[n]{a^{np}} = a^p$ ist, also, wenn man $np = m$, folglich $p = \frac{m}{n}$ setzt,

1) $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Dort war angenommen, daß $\frac{m}{n}$ ganz war. Jetzt wird festgesetzt, daß auch dann, wenn $\frac{m}{n}$ nicht ganz ist, $a^{\frac{m}{n}}$ die n^{te} Wurzel aus a^m bedeuten soll, sodaß Gleichung 1) auch dann fortbesteht. So ist z. B.

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$. Dann kann der Exponent auch negativ und gebrochen sein, z. B. ist

$$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}}.$$

Die frühere Gleichung (Abschnitt 95, Nr. 7) $\sqrt[qn]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$ läßt sich dann schreiben $a^{\frac{pn}{nq}} = a^{\frac{p}{q}}$, sodaß der gebrochene Exponent erweitert oder gekürzt werden kann, ohne daß der Potenzwert sich ändert.

Auch der Satz über die Multiplikation von Potenzen gleicher Grundzahl bleibt bestehen, denn

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Also gelten, wie früher, die Sätze:

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},$$
$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

usw.,

sodaß sämtliche für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten bewiesenen Sätze auch für negative und gebrochene Exponenten unbeschränkte Geltung haben.