Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

I. Gleichungen zweiten Grades

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}; \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

C. Lehraufgabe der Untersekunda.

I. Gleichungen zweiten Grades.*)

97) Als Normalform der schon behandelten Gleichung zweiten Grades diene jetzt die folgende:

$$1) \qquad x^2 - ax + b = 0.$$

Man kann sie folgendermaßen umformen:

$$x^2 - 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b = 0$$

oder

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]^2 = 0.$$

Nun läßt sich aber die Differenz zweier Quadrate in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen, also ist jetzt

$$\left[x - \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \cdot \left[x - \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] = 0.$$

Soll das Produkt zweier Größen gleich Null sein, so muß entweder der erste Faktor, oder der zweite gleich Null sein. Setzt man die einzelnen Klammern gleich Null, so hat man zwei Gleichungen ersten Grades, aus denen sich die beiden Lösungen ergeben, nämlich

---

*) Dieses Kapitel kann auch an den Schluß der Lehraufgabe der Untersekunda gestellt werden, wenn der Unterrichtsbetrieb der Trigonometrie wegen eine frühere Einführung in die Lehre von den Logarithmen erfordert.

$$2)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - b} = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \\ x_2 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - b} = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. \end{cases}$$

98) An Stelle des früher angewandten Kunstgriffs ist also die Eigenschaft jedes Ausdrucks vom zweiten Grade getreten, sich in zwei Faktoren ersten Grades zerlegen zu lassen [eine Faktorenzerlegung, die in allgemeinerer Gestalt bei allen Gleichungen möglich ist, die x nur in Potenzen mit ganzen positiven Exponenten enthalten].

Addiert man die Werte der Lösungen (die sogenannten Wurzeln der Gleichung), so erhält man

$$3)\qquad x_1 + x_2 = a;$$

multipliziert man die Lösungswerte, so ergibt sich

$$x_1 x_2 = \left[\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \cdot \left[\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b,$$

oder

$$4)\qquad x_1 x_2 = b.$$

Folglich gilt der Satz:

In der Gleichung

$$x^2 - ax + b = 0$$

ist der Koeffizient von $-x$ gleich der Summe der Wurzeln, das Glied ohne x gleich dem Produkte der Wurzeln.

99) Dieser merkwürdige Satz ergibt sich als selbstverständlich auf folgendem Wege:

Die Gleichung $(x - a)(x - b) = 0$ ist offenbar erfüllt für die Werte $x_1 = a$ und $x_2 = b$, denn bei der Einsetzung eines solchen wird der betreffende Faktor gleich Null. Multipliziert man nun die linke Seite aus, so ergibt sich:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

der Koeffizient von $-x$ ist also wirklich die Summe der Wurzeln, das sogenannte absolute Glied (ohne x) gleich dem Produkte der Wurzeln.

100) Man kann also leicht Gleichungen aufstellen, die gegebene Wurzeln haben sollen. Sollen z. B. die Wurzeln einer Gleichung 3 und 8 sein, so lautet sie:

$$(x - 3)(x - 8) = 0,$$

oder $x^2 - (3 + 8)x + 3 \cdot 8 = 0$, oder $x^2 - 11x + 24 = 0$.

Sollen die Wurzeln -3 und $+8$ sein, so lautet die Gleichung:

$x^2 - (-3 + 8)x + (-3)(+8) = 0$, oder $x^2 - 5x - 24 = 0$.

Die gewöhnliche Auflösungsart bestätigt die Richtigkeit.

[101) Bei der Lösung $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ kann nun der Fall eintreten, daß $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist, sodaß unter der Wurzel Negatives steht. Dann nennt man die Lösung der Gleichung eine imaginäre (oder unmögliche). Bisher nämlich sind uns nur Quadratwurzeln aus positiven Zahlen entgegengetreten. Wir wußten z. B., daß $\sqrt{49} = \pm 7$ war, dagegen kannten wir bisher keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert -49 giebt, sodaß $\sqrt{-49}$ vorläufig als etwas Unmögliches, als imaginär zu betrachten ist. Im Gegensatz dazu heißen die bisher behandelten Zahlen reelle Zahlen. Erst in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts wagte man es, diese sogenannten unmöglichen Zahlen eingehender zu untersuchen, wobei sich bald zeigte, daß nur mit ihrer Hilfe eine gewisse Abrundung des mathematischen Lehrgebäudes und ein übersichtlicher Ausbau desselben ermöglicht wurde. Erst jetzt lernte man beweisen, daß jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln haben muß, erst jetzt wurde eine wissenschaftliche Kartographie möglich usw. Man setzt z. B. $\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = \pm 7\sqrt{-1}$ und bezeichnet die Größe $+\sqrt{-1}$ (als die imaginäre Einheit) mit i, sodaß $\sqrt{-49} = \pm 7 \cdot i$ ist, allgemein $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{-1} = \pm a \cdot i$. Ferner ist $(\sqrt{-1})^2 = -1$, also $i^2 = -1$ usw. Zahlen von der Form $a + bi$ werden komplexe Zahlen genannt. Wir gehen auf diesen Gegenstand noch nicht näher ein und erinnern nur an folgendes:

Die Subtraktion zwang zur Einführung der negativen Zahlen.

Die Division zwang zur Einführung der gebrochenen Zahlen.

Bis hierher reichte das Gebiet der rationalen Zahlen.

Die Wurzelausziehung zwang zur Einführung der (zunächst algebraischen) Irrationalzahlen.

Bis hierher reichte das Gebiet der reellen Zahlen.

Die Wurzelausziehung zwingt aber auch zur Einführung der imaginären Zahlen. Denn will man den Begriff des Radizierens ganz allgemein auffassen, so muß unter der Wurzel auch Negatives gedacht werden können. Die imaginären Zahlen, mit den reellen zusammengesetzt, geben das Gebiet der **komplexen Zahlen**. Zu ihrer geometrischen Darstellung ist auf der früher besprochenen Geraden, die durch die Rational- und Irrationalzahlen (algebraische und transzendente) stetig erfüllt ist, kein Raum mehr vorhanden. Auf einer höheren Stufe soll gezeigt werden, daß man mit den komplexen Zahlen eine ganze Ebene stetig erfüllen kann. Diese geometrische Darstellungsweise ist für die Entwickelung der Mathematik von außerordentlicher Bedeutung geworden.]

102) Hat man eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

und eine zweite Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

so kann man y aus der zweiten berechnen, den Wert in die erste einsetzen und die so entstehende Gleichung zweiten Grades auflösen, was zwei Werte für x gibt. Jeder von diesen, in die zweite Gleichung eingesetzt, ermöglicht die Berechnung der beiden zugehörigen Werte für y.

Auch xy ist als Ausdruck zweiten Grades zu betrachten.

Handelt es sich um zwei Gleichungen zweiten Grades mit je zwei Unbekannten, so gibt die Entfernung (Elimination) von y im allgemeinen eine Gleichung vom vierten Grade, nur in besonderen Fällen läßt sich die Gleichung auf den zweiten Grad zurückführen.

Übungsmaterial findet sich in den Aufgabensammlungen.

II. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

103) Es ist $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, sobald $m > n$, und $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, sobald $n > m$. Ist $m = n$, so ist $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$, also kann man, da $\frac{a^m}{a^m} = 1$ und $m - m = 0$ ist, schreiben:

1) $$a^0 = 1.$$

Jede Zahl, zur 0^{ten} Potenz erhoben, ist also gleich 1. Dies ist lediglich die Definition der Potenz mit dem Exponenten Null.