Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

C. Lehraufgaben der Untersekunda.

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}; \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

C. Lehraufgabe der Untersekunda.

I. Gleichungen zweiten Grades.*)

97) Als Normalform der schon behandelten Gleichung zweiten Grades diene jetzt die folgende:

1) $$x^2 - ax + b = 0.$$

Man kann sie folgendermaßen umformen:

$$x^2 - 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b = 0$$

oder

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]^2 = 0.$$

Nun läßt sich aber die Differenz zweier Quadrate in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen, also ist jetzt

$$\left[x - \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \cdot \left[x - \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] = 0.$$

Soll das Produkt zweier Größen gleich Null sein, so muß entweder der erste Faktor, oder der zweite gleich Null sein. Setzt man die einzelnen Klammern gleich Null, so hat man zwei Gleichungen ersten Grades, aus denen sich die beiden Lösungen ergeben, nämlich

---

*) Dieses Kapitel kann auch an den Schluß der Lehraufgabe der Untersekunda gestellt werden, wenn der Unterrichtsbetrieb der Trigonometrie wegen eine frühere Einführung in die Lehre von den Logarithmen erfordert.

$$2)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \\ x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. \end{cases}$$

98) An Stelle des früher angewandten Kunstgriffs ist also die Eigenschaft jedes Ausdrucks vom zweiten Grade getreten, sich in zwei Faktoren ersten Grades zerlegen zu lassen [eine Faktorenzerlegung, die in allgemeinerer Gestalt bei allen Gleichungen möglich ist, die x nur in Potenzen mit ganzen positiven Exponenten enthalten].

Addiert man die Werte der Lösungen (die sogenannten Wurzeln der Gleichung), so erhält man

$$3)\qquad x_1 + x_2 = a;$$

multipliziert man die Lösungswerte, so ergibt sich

$$x_1 x_2 = \left[\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \cdot \left[\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b,$$

oder

$$4)\qquad x_1 x_2 = b.$$

Folglich gilt der Satz:

In der Gleichung

$$x^2 - ax + b = 0$$

ist der Koeffizient von $-x$ gleich der Summe der Wurzeln, das Glied ohne x gleich dem Produkte der Wurzeln.

99) Dieser merkwürdige Satz ergibt sich als selbstverständlich auf folgendem Wege:

Die Gleichung $(x - a)(x - b) = 0$ ist offenbar erfüllt für die Werte $x_1 = a$ und $x_2 = b$, denn bei der Einsetzung eines solchen wird der betreffende Faktor gleich Null. Multipliziert man nun die linke Seite aus, so ergibt sich:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

der Koeffizient von $-x$ ist also wirklich die Summe der Wurzeln, das sogenannte absolute Glied (ohne x) gleich dem Produkte der Wurzeln.

100) Man kann also leicht Gleichungen aufstellen, die gegebene Wurzeln haben sollen. Sollen z. B. die Wurzeln einer Gleichung 3 und 8 sein, so lautet sie:

$$(x - 3)(x - 8) = 0,$$

oder $x^2 - (3 + 8)x + 3 \cdot 8 = 0$, oder $x^2 - 11x + 24 = 0$.
Sollen die Wurzeln -3 und $+8$ sein, so lautet die Gleichung:
$x^2 - (-3 + 8)x + (-3)(+8) = 0$, oder $x^2 - 5x - 24 = 0$.
Die gewöhnliche Auflösungsart bestätigt die Richtigkeit.

[101) Bei der Lösung $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ kann nun der Fall eintreten, daß $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist, sodaß unter der Wurzel Negatives steht. Dann nennt man die Lösung der Gleichung eine imaginäre (oder unmögliche). Bisher nämlich sind uns nur Quadratwurzeln aus positiven Zahlen entgegengetreten. Wir wußten z. B., daß $\sqrt{49} = \pm 7$ war, dagegen kannten wir bisher keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert -49 giebt, sodaß $\sqrt{-49}$ vorläufig als etwas Unmögliches, als imaginär zu betrachten ist. Im Gegensatz dazu heißen die bisher behandelten Zahlen reelle Zahlen. Erst in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts wagte man es, diese sogenannten unmöglichen Zahlen eingehender zu untersuchen, wobei sich bald zeigte, daß nur mit ihrer Hilfe eine gewisse Abrundung des mathematischen Lehrgebäudes und ein übersichtlicher Ausbau desselben ermöglicht wurde. Erst jetzt lernte man beweisen, daß jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln haben muß, erst jetzt wurde eine wissenschaftliche Kartographie möglich usw. Man setzt z. B. $\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = \pm 7\sqrt{-1}$ und bezeichnet die Größe $+\sqrt{-1}$ (als die imaginäre Einheit) mit i, sodaß $\sqrt{-49} = \pm 7 \cdot i$ ist, allgemein $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{-1} = \pm a \cdot i$. Ferner ist $(\sqrt{-1})^2 = -1$, also $i^2 = -1$ usw. Zahlen von der Form $a + bi$ werden komplexe Zahlen genannt. Wir gehen auf diesen Gegenstand noch nicht näher ein und erinnern nur an folgendes:

Die Subtraktion zwang zur Einführung der negativen Zahlen.

Die Division zwang zur Einführung der gebrochenen Zahlen.

Bis hierher reichte das Gebiet der rationalen Zahlen.

Die Wurzelausziehung zwang zur Einführung der (zunächst algebraischen) Irrationalzahlen.

Bis hierher reichte das Gebiet der reellen Zahlen.

Die Wurzelausziehung zwingt aber auch zur Einführung der imaginären Zahlen. Denn will man den Begriff des Radizierens ganz allgemein auffassen, so muß unter der Wurzel auch Negatives gedacht werden können. Die imaginären Zahlen, mit den reellen zusammengesetzt, geben das Gebiet der komplexen Zahlen. Zu ihrer geometrischen Darstellung ist auf der früher besprochenen Geraden, die durch die Rational- und Irrationalzahlen (algebraische und transzendente) stetig erfüllt ist, kein Raum mehr vorhanden. Auf einer höheren Stufe soll gezeigt werden, daß man mit den komplexen Zahlen eine ganze Ebene stetig erfüllen kann. Diese geometrische Darstellungsweise ist für die Entwickelung der Mathematik von außerordentlicher Bedeutung geworden.]

102) Hat man eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

und eine zweite Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

so kann man y aus der zweiten berechnen, den Wert in die erste einsetzen und die so entstehende Gleichung zweiten Grades auflösen, was zwei Werte für x gibt. Jeder von diesen, in die zweite Gleichung eingesetzt, ermöglicht die Berechnung der beiden zugehörigen Werte für y.

Auch xy ist als Ausdruck zweiten Grades zu betrachten.

Handelt es sich um zwei Gleichungen zweiten Grades mit je zwei Unbekannten, so gibt die Entfernung (Elimination) von y im allgemeinen eine Gleichung vom vierten Grade, nur in besonderen Fällen läßt sich die Gleichung auf den zweiten Grad zurückführen.

Übungsmaterial findet sich in den Aufgabensammlungen.

II. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

103) Es ist $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, sobald $m > n$, und $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, sobald $n > m$. Ist $m = n$, so ist $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$, also kann man, da $\frac{a^m}{a^m} = 1$ und $m - m = 0$ ist, schreiben:

1) $$a^0 = 1.$$

Jede Zahl, zur 0^{ten} Potenz erhoben, ist also gleich 1. Dies ist lediglich die Definition der Potenz mit dem Exponenten Null.

Demnach ist $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a^1}$, also, wenn man die frühere Schreibweise beibehält: $\frac{a^0}{a^1} = a^{0-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$, und ebenso findet man allgemein

2) $$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{und} \quad a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten soll demgemäß von jetzt ab bedeuten den umgekehrten Wert von der entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten. Auch dies ist nur eine Definition.

Ist dies festgesetzt, so ergibt sich

$$a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = a^{n-m} = a^{-m+n},$$

d. h. der Satz für die Multiplikation von Potenzen gleicher Grundzahl gilt auch für negative Exponenten.

Ebenso ist

$$\frac{a^{-m}}{a^n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß alle für positive ganze Exponenten bewiesenen Sätze auch für negative Exponenten gelten, z. B.

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m+n}, \; a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n}, \; \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n},$$

$$a^{-m} b^{-m} = (ab)^{-m}, \; \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \; (a^{-m})^n = a^{-mn},$$

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn}, \; (a^{-m})^{-n} = a^{mn}.$$

104) In Abschnitt 95 wurde gezeigt, daß $\sqrt[n]{a^{np}} = a^p$ ist, also, wenn man $np = m$, folglich $p = \frac{m}{n}$ setzt,

1) $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Dort war angenommen, daß $\frac{m}{n}$ ganz war. Jetzt wird festgesetzt, daß auch dann, wenn $\frac{m}{n}$ nicht ganz ist, $a^{\frac{m}{n}}$ die n^{te} Wurzel aus a^m bedeuten soll, sodaß Gleichung 1) auch dann fortbesteht. So ist z. B.

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$. Dann kann der Exponent auch negativ und gebrochen sein, z. B. ist

$$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}}.$$

Die frühere Gleichung (Abschnitt 95, Nr. 7) $\sqrt[qn]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$ läßt sich dann schreiben $a^{\frac{pn}{nq}} = a^{\frac{p}{q}}$, sodaß der gebrochene Exponent erweitert oder gekürzt werden kann, ohne daß der Potenzwert sich ändert.

Auch der Satz über die Multiplikation von Potenzen gleicher Grundzahl bleibt bestehen, denn

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Also gelten, wie früher, die Sätze:

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

usw.,

sodaß sämtliche für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten bewiesenen Sätze auch für negative und gebrochene Exponenten unbeschränkte Geltung haben.

III. Die gemeinen oder Briggischen Logarithmen.

105) Aus $a = b^m$ folgt $b = a^{\frac{1}{m}}$. Es fragt sich, ob man aus der ersteren Gleichung nicht nur b, sondern statt dessen auch m berechnen kann. Wir beschränken uns vorläufig auf die Grundzahl 10 und setzen folgendes fest: Ist $10^\alpha = a$, so nennt man α den gemeinen*) oder Briggischen Logarithmus von a, geschrieben $\lg a$; a heißt der Numerus zum Logarithmus α.

Also 1) aus $10^\alpha = a$ folgt $\alpha = \lg a$.

In Worten: Der gemeine Logarithmus einer Zahl a ist der Exponent, mit dem man die Grundzahl 10 potenzieren muß, um jene Zahl zu erhalten.

106) So ist z. B.

$$\begin{array}{lll} 10^0 = 1, & \text{folglich} & 0 = \lg 1 \\ 10^1 = 10, & \text{folglich} & 1 = \lg 10 \\ 10^2 = 100, & \text{folglich} & 2 = \lg 100 \\ 10^3 = 1000, & \text{folglich} & 3 = \lg 1000 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Ebenso

$$\begin{array}{lll} 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1 & \text{folglich} & -1 = \lg 0{,}1 \\ 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01, & \text{folglich} & -2 = \lg 0{,}01 \\ 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001, & \text{folglich} & -3 = \lg 0{,}001 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Die Logarithmen der Potenzen von 10 mit positiven ganzen und negativen ganzen Exponenten sind also leicht zu finden.

107) Man kann auch gewisse andere Logarithmen bezw. Numerus leicht bestimmen. Es ist z. B.

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}1622\cdots,$$

folglich ist

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5 = \lg 3{,}1622\cdots$$

---

*) Logarithmen mit anderen Grundzahlen werden später bekannt gegeben.

Ferner ist

$$10^{\frac{3}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}} = 10 \cdot \sqrt{10} = 31{,}622 \cdots,$$

folglich

$$\tfrac{3}{2} = 1{,}5 = \lg 31{,}622 \cdots$$

Ebenso:

$$10^{\frac{5}{2}} = 10^{2+\frac{1}{2}} = 100\sqrt{10} = 316{,}22 \cdots,$$

folglich

$$\tfrac{5}{2} = 2{,}5 = \lg 316{,}22 \cdots.$$

Ähnlich kann man für $10^{\frac{1}{3}}$, $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, $10^{\frac{1}{6}}$, $10^{\frac{5}{6}}$, $10^{\frac{1}{8}}$, $10^{\frac{3}{8}}$, $10^{\frac{5}{8}}$, $10^{\frac{7}{8}}$ u. s. w. und ihre 10-fachen, 100-fachen, 1000-fachen Werte und für die umgekehrten Werte aller dieser Zahlen die logarithmischen Folgerungen ziehen.

Schon so erkennt man die Möglichkeit, für ganze Reihen von Zahlen festzustellen, von welchen anderen Zahlen sie die Logarithmen sind, man erkennt die **Möglichkeit logarithmischer Tabellen**, der **sogenannten Logarithmentafeln**, obwohl diese auf anderem Wege berechnet worden sind. Schaltet man die neugefundenen Beziehungen an geeigneter Stelle in die Tabelle unter 106) ein, so erkennt man folgendes:

Die Logarithmen positiver einstelliger Zahlen beginnen mit 0,
" " " zweistelliger " " " 1,
" " " dreistelliger " " " 2,
" " " vierstelliger " " " 3,
. . . .
. . . .
. . . .
" " " n-stelliger " " " $(n-1)$.

Die Logarithmen echter Brüche sind negativ, und zwar gilt folgendes:

Liegt die Zahl zwisch. 0 u. 0,1, so liegt der Logarithmus zwisch. 0 u. -1,
" " " " 0,1 u. 0,01, " " " " " -1 u. -2,
" " " "0,01 u. 0,001, " " " " " -2 u. -3,
usw.

[108) Oben waren zu gewissen Logarithmen die Numerus berechnet; umgekehrt kann gefragt werden, wie man zu einem Numerus den Logarithmus findet. Die Möglichkeit dazu soll an einem Beispiele nachgewiesen werden.

[**Aufgabe.** x aus der Gleichung $10^x = 2$ zu berechnen, d. h. den Logarithmus der Zahl 2 aufzufinden.

Auflösung. 2 liegt zwischen $10^0 = 1$ und $10^1 = 10$, also ist

$$10^0 < (10^x = 2) < 10^1, \quad \text{folglich ist} \quad 0 < x < 1,$$

daraus folgen (durch wiederholtes Quadrieren des in der Klammer Stehenden) die „Ungleichungen"

$10^0 < (10^{2x} = 4) < 10^1$ folglich $0 < 2x < 1$ und $0 < x < \frac{1}{2}$

$10^1 < (10^{4x} = 16) < 10^2$ folglich $1 < 4x < 2$ und $\frac{1}{4} < x < \frac{2}{4}$

$10^2 < (10^{8x} = 256) < 10^3$ folglich $2 < 8x < 3$ und $\frac{2}{8} < x < \frac{3}{8}$

$10^4 < (10^{16x} = 65536) < 10^5$ folglich $4 < 16x < 5$ und $\frac{4}{16} < x < \frac{5}{16}$.

So fortfahrend kann man x zwischen engere und engere Grenzen einschließen, diese in Dezimalbrüchen darstellen und durch die Vergleichung der zusammengehörigen Werte erkennen, bis auf wie viele Stellen man den Wert von lg 2 gefunden hat. Oben ist erst gezeigt, daß x zwischen 0,25 und 0,312 liegt, und es dauert ziemlich lange, bis man gezeigt hat, daß $\lg 2 = 0{,}3010300$ ist. (Man berechnet jetzt die Logarithmen auf besserem Wege weit schneller mit großer Genauigkeit.)

Sind m und n ganze Zahlen und ist $m > n$, so gibt $10^{\frac{m}{n}}$ nur dann eine ganze Zahl, und zwar eine Potenz von 10 mit ganzem Exponenten, wenn n in m ohne Rest aufgeht. Ist letzteres nicht der Fall, so ist $10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$ eine Irrationalzahl (vgl. Abschnitt 85 und 96). Setzt man also $10^x = a$, und ist a eine ganze Zahl, aber keine Potenz von 10 mit ganzem positiven Exponenten, so muß x irrational sein. (Denn wäre x gebrochen rational, also gleich $\frac{m}{n}$, so wäre $\sqrt[n]{10^m} = a$ irrational.) Folglich sind die gemeinen Logarithmen aller ganzen Zahlen, die nicht Potenzen von 10 mit ganzem positiven Exponenten sind, Irrationalzahlen. Die Bedeutung der Irrationalzahlen wird also durch die Einführung der Logarithmen ganz erheblich gesteigert. Sie bilden auch hier für das praktische Rechnen die Regel, die Rationalzahlen dagegen eine verschwindende Ausnahme.

Ist der Logarithmus einer positiven reellen Zahl weder ganz, noch rational, noch algebraisch irrational, so handelt es sich um eine t r a n s z e n d e n t e I r r a t i o n a l i t ä t, d. h. um eine solche, die über das Gebiet der algebraischen Zahlen hinausgeht und so eine neue Zahlenwelt eröffnet.]

In den meisten Logarithmentafeln befindet sich eine Anweisung zum Aufschlagen des zu einem Numerus gehörigen Logarithmus und des zu einem Logarithmus gehörigen Numerus.

Wir beschränken uns auf die Logarithmen positiver Zahlen. [Die Logarithmen von negativen Zahlen kommen in den oben abgeleiteten Tabellen nicht vor. Der Grund ergibt sich sofort.]

109) Die Grundformeln für das Rechnen mit Logarithmen.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ist} & \alpha = \lg a, \quad \text{so folgt} & 10^\alpha = a \\ \text{ist} & \beta = \lg b, \quad \text{so folgt} & 10^\beta = b \end{array}\right\} \qquad 1)$$

also durch Multiplikation $10^\alpha \cdot 10^\beta = ab$ oder $10^{\alpha+\beta} = ab$ folglich ist $\alpha + \beta = \lg(ab)$ oder $\lg a + \lg b = \lg(ab)$. Merke

2) $$\lg(ab) = \lg a + \lg b,$$

d. h.: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen*), $\lg(abc\ldots) = \lg a + \lg b + \lg c + \cdots$.

Regel. Man logarithmiert ein Produkt, indem man die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert.

Dagegen hätte man durch Division aus den Gleichungen 1) erhalten

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{a}{b}, \quad \text{oder} \quad 10^{\alpha-\beta} = \frac{a}{b}, \quad \text{d. h.} \quad \alpha - \beta = \lg\frac{a}{b}$$

oder

$$\lg a - \lg b = \lg\frac{a}{b}.$$

Man merke:

3) $$\lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b,$$

d. h.: Der Logarithmus eines Bruches ist der Logarithmus des Zählers vermindert um den des Nenners.

---

*) Um zu sehen, wie es mit den Logarithmen negativer Zahlen steht, wähle man für den Faktor -1 die positive Schreibweise $+i^2$. Da z. B. $(-10) = ii \cdot 10$ ist, so folgt, wenn man das Multiplikationsgesetz gelten läßt, $\lg(-10) = \lg i + \lg i + \lg 10 = 2\lg i + 1$, also $\lg(-10) = 1 + 2\lg i = 1 + 2\lg\sqrt{-1}$. Allgemein: $\lg(-a) = \lg a + 2\lg i$. So erkennt man, daß die Logarithmen negativer reeller Zahlen nur durch die imaginären Zahlen erklärt werden können, worauf wir hier nicht eingehen. Wiederum zeigt sich, daß man die imaginären Größen notwendig einführen muß, wenn man die mathematischen Operationen ganz allgemein auffassen will.

Regel. Man logarithmiert einen Bruch, indem man vom Logarithmus des Zählers den des Nenners subtrahiert.

Ist $\alpha = \lg a$, so folgt $10^\alpha = a$, und, wenn man links und rechts zur n^{ten} Potenz erhebt, $(10^\alpha)^n = a^n$, d. h. $10^{n\alpha} = a^n$, folglich $n\alpha = \lg a^n$ oder $n \lg a = \lg(a^n)$. Man merke:

$$\lg(a^n) = n \lg a, \tag{4}$$

d. h.: Der Logarithmus einer Potenz ist das Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Grundzahl.

Regel. Man logarithmiert eine Potenz, indem man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Exponenten multipliziert.

Ist $\alpha = \lg a$, so folgt $10^\alpha = a$, und, wenn man beiderseits die n^{te} Wurzel auszieht, $\sqrt[n]{10^\alpha} = \sqrt[n]{a}$, oder $10^{\frac{\alpha}{n}} = \sqrt[n]{a}$, also $\frac{\alpha}{n} = \lg \sqrt[n]{a}$ oder $\frac{1}{n} \lg a = \lg \sqrt[n]{a}$. Man merke:

$$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a, \tag{5}$$

d. h.: Der Logarithmus einer Wurzel ist der Quotient aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Regel. Man logarithmiert eine Wurzel, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

110) Diese Formeln führen in Verbindung mit den Logarithmentafeln auf ganz außerordentliche Rechenerleichterungen, wozu einige Beispiele gegeben sein mögen (fünfstellige Logarithmen). Besonders das Ausziehen höherer Wurzeln wird ermöglicht bezw. erleichtert; z. B. ist $\lg \sqrt[5]{a} = \frac{1}{5} \lg a = 0{,}2 \lg a$, wozu der Numerus aufzuschlagen ist, wenn man $\sqrt[5]{a}$ erhalten will.

Aufgabe. $\dfrac{51{,}263^2 \cdot 5{,}7821^3}{\sqrt{772{,}45 \cdot 0{,}98216}}$ oder $\dfrac{a^2 \cdot b^3}{\sqrt{c \cdot d}}$.

Auflösung. $\lg \dfrac{a^2 b^3}{\sqrt{c \cdot d}} = [2 \lg a + 3 \lg b] - \left[\frac{1}{2} \lg c + \lg d\right]$.

$\lg a = 1{,}70980$	$2 \lg a = 3{,}41960$
$\lg b = 0{,}76209$	$3 \lg b = 2{,}28627$
lg des Zählers:	$\lg Z = 5{,}70587$

$$\lg c = 2{,}88787 \quad \tfrac{1}{2}\lg c = 1{,}44394$$
$$\lg d = 0{,}99218 - 1$$
$$\text{lg des Nenners:} \quad \lg N = 1{,}43612$$

$$\lg \frac{Z}{N} = \lg Z - \lg N = 4{,}26975$$

$$\frac{Z}{N} = 18610.$$

Bemerkung. Mit Hilfe der Logarithmen verwandelt man das Multiplizieren in Addieren, das Dividieren in Subtrahieren, das Potenzieren in Multiplizieren, das Wurzelausziehen in Dividieren. Dagegen sind die Logarithmen nicht brauchbar für die Vereinfachung der Addition und Subtraktion (man müßte denn durch Absonderung gemeinschaftlicher Faktoren oder durch sonstige Zerlegung in Produkte, z. B. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, Vorteile finden). Die negativen Logarithmen schreibt man positiv, zieht jedoch von dem Dezimalbruch (Mantisse) die ganzzahlige Charakteristik (Kennziffer) ab. So war im vorigen Beispiele $\lg d = 0{,}99218 - 1$, was dasselbe ist wie $-0{,}000782$.

Sind Wurzeln aus echten Brüchen auszuziehen, z. B. $\sqrt[3]{0{,}98216}$, so ist nach obigem der Logarithmus durch den Exponenten zu dividieren, und dabei kann die abzuziehende Kennziffer, die mit zu dividieren ist, eine gebrochene Zahl werden, was nicht mehr in das gebräuchliche Rechenschema paßt. Um dies zu vermeiden, vermehrt man den Logarithmus und die abzuziehende Kennziffer um dieselbe Zahl, und zwar so, daß jene Division aufgeht. So wird im letzten Beispiele geschrieben $\lg d = 2{,}99218 - 3$, sodaß $\frac{1}{3}\lg d = 0{,}99739 - 1$ wird. Demnach ist

$$\sqrt[3]{0{,}98216} = 0{,}99401.$$

111) Aber nicht nur Rechenerleichterungen finden statt, sondern es werden auch ganz neue Gebiete eröffnet, z. B. das der Exponentialgleichungen, bei denen die Unbekannte in einem Exponenten steht.

Aufgabe. x aus der Gleichung $2^x = 3$ zu berechnen.

Auflösung. $\lg(2^x) = \lg 3$, folglich $x \lg 2 = \lg 3$, folglich $x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$ und $\lg x = \lg(\lg 3) - \lg(\lg 2)$. Nun ist:

$$\lg 3 = 0{,}47712, \text{ also } \lg(\lg 3) = 0{,}67863 - 1$$
$$\lg 2 = 0{,}30103, \text{ also } \lg(\lg 2) = 0{,}47861 - 1$$
$$\lg x = \lg(\lg 3) - \lg(\lg 2) = 0{,}20002$$

folglich $x = 1{,}5850$.

Aufgabe. $a^x b^{2x} = c.$

Auflösung. $x \lg a + 2x \lg b = \lg c,\ x(\lg a + 2 \lg b) = \lg c,$

$$x = \frac{\lg c}{\lg a + 2 \lg b}.$$

Auf der Lösbarkeit der Exponentialgleichungen beruht z. B. die Lösbarkeit gewisser Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung. Jetzt soll nur auf die erstere eingegangen werden.

112) Zinseszinsrechnung.

Es sei c ein bestimmtes Anfangskapital, welches zu einem gewissen Prozentsatz p zinsbar angelegt wird. Da nun 100 Mark jährlich p Mark Zinsen geben, eine Mark also $\frac{p}{100}$ Mark gibt, so geben c Mark $c\frac{p}{100}$ Mark, und nach einem Jahre erhält man durch Zinszuschlag $c + \frac{cp}{100}$ Mark als ein neues Kapital $c_1 = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Das vergrößerte Kapital verwandelt sich im zweiten Jahre in $c_2 = c_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ $= c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, nach einem weiteren Jahre erhält man $c_3 = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$. Nennt man also das Schlußkapital k, so hat man nach n Jahren, wenn man den Prozentsatz mit dem kaufmännischen Zeichen % und die Klammer mit q bezeichnet:

1) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n = c \cdot q^n,$$

folglich

2) $$\lg k = \lg c + n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg c + n \lg q,$$

also zur Berechnung des Anfangskapitals bei gegebenem Endkapital

3) $$\lg c = \lg k - n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg k - n \lg q.$$

Zur Berechnung des Prozentsatzes hat man zunächst $n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right)$ $= \lg k - \lg c$, oder

4) $$\lg q = \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \frac{1}{n}(\lg k - \lg c).$$

Bezeichnet man den Numerus, der zur rechten Seite gehört, als $N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right)$, so ergibt sich $\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right)$, also

4*) $$\% = 100\left[N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right) - 1\right] = 100\,[N - 1].$$

Die Berechnung der Anzahl der Jahre beruht auf der Exponentialgleichung 1) und erfolgt, wie sich aus 2) ergibt, nach der Formel

5) $$n = \frac{\lg k - \lg c}{\lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right)} = \frac{\lg k - \lg c}{\lg q},$$

also

5*) $$\lg n = \lg[\lg k - \lg c] - \lg\lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg[\lg k - \lg c] - \lg\lg q.$$

Diese letzte Lösung gilt nur für ganze Zahlen n, da der Zinszuschlag nicht mitten im Jahre, sondern nur am Jahresschluß erfolgt. Der etwaige Zeitüberschuß würde also eine besondere Vereinbarung nötig machen.

113) Werden die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen, so hat man die doppelte Anzahl der Termine, also bei n Jahren $2n$ Termine, für diese aber den halben Prozentsatz. Dies gibt für n Jahre die Grundformel

6) $$k = \left(1 + \frac{\%}{200}\right)^{2n},$$

aus der die anderen durch Logarithmierung usw. abzuleiten sind.

Bei monatlichem Zinszuschlag erhält man ebenso

7) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{1200}\right)^{12n},$$

also bei jährlich m-maligem Zinszuschlag

8) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{100m}\right)^{mn}.$$

Beispiele zur Zinseszinsrechnung finden sich in den Aufgabensammlungen. Sie beziehen sich auch auf die Zunahme der Bevölkerung von Städten und Staaten, auf die Entwicklung der Verkehrsverhältnisse, z. B. auf die Zunahme der jährlichen Frachtmengen unserer Eisenbahnen, des Holzbestandes von Waldungen u. dgl.

Wird der Prozentsatz als negativ angenommen, geht also die Grundformel über in

$$k = c\left(1 - \frac{\%}{100}\right)^{n} = cq_1^n,$$

so handelt es sich z. B. um eine allmähliche Abnahme des Anfangskapitals, die jedoch niemals ganz zu Ende geht. Man kann $q_1 = \left(1 - \frac{\%}{100}\right)$ als den Verminderungsfaktor bezeichnen.

Die praktisch wichtigste Anwendung der Logarithmenlehre findet für die Schule in dem Gebiete der Trigonometrie statt.

IV. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

Gleichungen.

Aus $x^2 - ax + b = 0$ folgt

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Dabei ist $x_1 + x_2 = a, \quad x_1 \cdot x_2 = b$. Die Gleichung kann also geschrieben werden:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$

oder

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Potenzen.

Es ist $a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Für negative und gebrochene Exponenten gelten dieselben Gesetze, wie für positive und ganze.

Logarithmen.

Ist $10^\alpha = a$, so ist $\alpha = \lg a$.

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b; \quad \lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b.$$

$$\lg(a^n) = n \lg a; \quad \lg\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\lg a.$$

Zinseszins-Rechnung.

$$k = c\left(1 + \tfrac{\%}{100}\right)^n = cq^n,$$

$$\lg k = \lg c + n \lg\left(1 + \tfrac{\%}{100}\right) = \lg k + n \lg q,$$

$$\lg c = \lg k - n \lg\left(1 + \tfrac{\%}{100}\right) = \lg k - n \lg q,$$

$$\lg q = \left(1 + \tfrac{\%}{100}\right) = \frac{1}{n}(\lg k - \lg c),$$

$$\% = 100\left[N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right) - 1\right] = 100\,[N - 1],$$

$$n = \frac{\lg k - \lg c}{\lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right)} = \frac{\lg k - \lg c}{\lg q},$$

$$\lg n = \lg[\lg k - \lg c] - \lg\lg\left(1 + \tfrac{\%}{100}\right) = \lg[\lg k - \lg c] - \lg\lg q.$$

$$\left[k = c\left(1 + \tfrac{\%}{200}\right)^{2n}, \quad k = c\left(1 + \tfrac{\%}{1200}\right)^{12n}, \quad k = c\left(1 + \tfrac{\%}{100\,m}\right)^{mn},\right.$$

$$\left.k = c\left(1 - \tfrac{\%}{100}\right)^n = cq_1^n.\right]$$