Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Zusammenstellung der wesentlichen Ergebnisse

Später wird gezeigt werden daß, wenn n eine ganze Zahl ist, im ganzen n verschiedene n^{te} Wurzeln aus jeder Zahl existieren, die zu der hier berechneten einen Wurzel in einfacher Beziehung stehen. Dazu ist jedoch die Einführung einer neuen Art von Zahlen erforderlich.

Man kann die 4., 8., 16. Wurzel ausziehen, indem man aus der Quadratwurzel die Quadratwurzel, aus dieser wieder die Quadratwurzel auszieht u. s. w. Die 6. Wurzel zieht man aus, indem man aus der 3. Wurzel die Quadratwurzel auszieht, die 9. Wurzel, indem man aus der Kubikwurzel die Kubikwurzel auszieht usw.

Für die 5., 7., 11. Wurzel u. s. w. könnte man sich die Rechnungsschemata ebenfalls aufstellen, diese werden aber so umständlich, daß man andere, später zu behandelnde Methoden vorzieht.]

Zusammenstellung der wesentlichsten Ergebnisse über Proportionen, Gleichungen, Potenzen und Wurzeln.

Die Proportion $a : b = c : d$ ist eine richtige, wenn $ad = bc$ ist. Aus ihr folgt:

1) $$(a + b) : (c + d) = a : c = b : d,$$

2) $$(a - b) : (c - d) = a : c = b : d,$$

3) $$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Multiplikation der entsprechenden Glieder zweier Proportionen gibt wieder eine richtige Proportion. Dasselbe gilt von der Division.

Aus $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ oder $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$ folgt

$$\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Aus $ax = b$ folgt

$$x = \frac{b}{a}.$$

Aus $ax + by = c$ und $a_1x + b_1y = c_1$ folgt

$$x = \frac{b_1 c - b c_1}{a b_1 - a_1 b} \quad \text{und} \quad y = \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b}.$$

Aus $x^2 + ax = b$ folgt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}; \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

C. Lehraufgabe der Untersekunda.

I. Gleichungen zweiten Grades.*)

97) Als Normalform der schon behandelten Gleichung zweiten Grades diene jetzt die folgende:

1) $$x^2 - ax + b = 0.$$

Man kann sie folgendermaßen umformen:

$$x^2 - 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b = 0$$

oder

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,\right]^2 = 0.$$

Nun läßt sich aber die Differenz zweier Quadrate in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen, also ist jetzt

$$\left[x - \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,\right] \cdot \left[x - \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,\right] = 0.$$

Soll das Produkt zweier Größen gleich Null sein, so muß entweder der erste Faktor, oder der zweite gleich Null sein. Setzt man die einzelnen Klammern gleich Null, so hat man zwei Gleichungen ersten Grades, aus denen sich die beiden Lösungen ergeben, nämlich

---

*) Dieses Kapitel kann auch an den Schluß der Lehraufgabe der Untersekunda gestellt werden, wenn der Unterrichtsbetrieb der Trigonometrie wegen eine frühere Einführung in die Lehre von den Logarithmen erfordert.