Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

IV. Potenzen und Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

Beispiel. $x^2 + x = 12$ gibt, da der Faktor von x gleich 1 ist,

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2},$$

also

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = -\frac{8}{2} = -4.$$

Probe. $3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$, $(-4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$. Die beiden möglichen Lösungen (Wurzeln) sind also gefunden.

Beispiel.

$$x^2 - 5x = -6 \text{ gibt } x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2},$$

also

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Wiederhole an beiden Beispielen den allgemeinen Entwickelungsgang. Beachte auch, daß im ersten Beispiele die Summe der Lösungen $3 + (-4) = -1$, ihr Produkt $3 \cdot (-4) = -12$ ist, d. h. abgesehen vom Vorzeichen den Faktor von x bezw. die rechte Seite gibt, während im zweiten Beispiele $3 + 2 = 5$, $3 \cdot 2 = 6$ ist. Auch bei der allgemeinen Lösung ist $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = -b$. — Eingehendere Besprechung der Gleichung zweiten Grades erfolgt später. Übungsmaterial bieten die Aufgabensammlungen.

IV. Potenzen und Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten.

87) Werden zwei Faktoren a miteinander multipliziert, so bezeichnet man das Produkt mit a^2, bei drei Faktoren a schreibt man a^3, bei vier Faktoren a^4 [lies: a hoch 4 (oder a zur vierten Potenz)], bei n Faktoren a^n, also

1) $$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n.$$

Der Ausdruck a^n heißt die n^{te} Potenz von a, die Zahl a heißt Grundzahl oder Basis der Potenz, n heißt der Potenzexponent.

88) Da $a^2 \cdot a^3 = (aa) \cdot (aaa) = aaaaa = a^5$ ist, so folgt $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$. Allgemein folgt für ganzes m und n

2) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Da $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$ ist, so folgt $\frac{a^5}{a^3} = a^2 = a^{5-3}$. Allgemein ist

3) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

wobei zunächst $m > n$ sein soll.

[Aus 2) konnte man folgern: $a^m = \frac{a^{m+n}}{a^n}$, also $\frac{a^{m+n}}{a^n} = a^{(m+n)-n}$].

Da $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$ ist, also $(a^2)^3 = a^{2\cdot 3}$, so folgt allgemein

4) $$(a^m)^n = a^{m\cdot n}.$$

Aus 2), 3) und 4) folgen für ganzzahlige positive Exponenten folgende Regeln:

a) Potenzen derselben Grundzahl werden miteinander multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

b) Eine Potenz wird durch eine andere derselben Grundzahl dividiert, indem man den Exponenten der letzteren von dem der ersteren abzieht. (Dabei soll vorläufig der Exponent der ersteren Potenz größer als der der zweiten sein.)

c) Eine Potenz wird potenziert, indem man die beiden Exponenten miteinander multipliziert.

Bei a) und c) ist die Reihenfolge gleichgültig, also z. B.

$$a^m a^n a^q = a^{m+n+q} = a^{n+m+q} = a^{q+m+n} \text{ usw.},$$

$$[(a^m)^n]^q = a^{mnq} = a^{qmn} = a^{nqm} \text{ usw.}$$

89) Es ist $\frac{a^3}{a^5} = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$, also $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}}$.

Allgemeiner ist

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}},$$

sobald zunächst $n > m$ ist.

Wird also eine Potenz durch eine andere von derselben Grundzahl dividiert, deren Exponent größer ist, so dividiert man 1 durch die Potenz, deren Exponent die positive Differenz der beiden gegebenen Exponenten ist.

90) Ferner ist

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = aaabbb = a^3b^3,$$

allgemein

5) $$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

Ähnlich ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3},$$

allgemein

6) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Daraus entspringen die Regeln:

d) Man potenziert ein Produkt, indem man die einzelnen Faktoren potenziert.

e) Man potenziert einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner potenziert.

91) Der Ausdruck $x = \sqrt{a}$ gilt als Auflösung der Gleichung $x^2 = a$. Ebenso gilt $x = \sqrt[3]{a}$ (lies: dritte Wurzel aus a) als Auflösung der Gleichung $x^3 = a$. (Von der Möglichkeit, daß mehrere Wurzelwerte existieren können, soll hier abgesehen werden.) Allgemein:

1) $x = \sqrt[n]{a}$ ist die Auflösung der Gleichung $x^n = a$.

Hier heißt $\sqrt[n]{a}$ die n^{te} Wurzel aus a, n der Wurzelexponent, der zunächst eine ganze positive Zahl sein soll, die Zahl a heißt der Radikand (die Zahl, aus der die Wurzel ausgezogen werden soll).

Nach dieser Erklärung ist

2) $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

92) Ist $x = \sqrt[n]{a}$, so folgt $x^n = a$, ist ferner $y = \sqrt[n]{b}$, so folgt $y^n = b$.

Durch Multiplikation ergibt sich aus den neuen Gleichungen $x^n y^n = ab$, oder $(xy)^n = ab$, folglich $xy = \sqrt[n]{ab}$, oder

3) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, allgemeiner: $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c} \cdots = \sqrt[n]{abc \ldots}$

Durch Division dagegen hätte man gefunden $\frac{x^n}{y^n} = \frac{a}{b}$ oder $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}$, d. h. $\frac{x}{y} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, oder

4) $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Folglich gelten die Regeln:

a) Wurzeln mit gleichen Exponenten werden miteinander multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert (und aus dem Produkte die Wurzel auszieht). Und umgekehrt:

b) Die Wurzel wird aus einem Produkte ausgezogen, indem man sie aus den einzelnen Faktoren auszieht (und das Produkt der Einzelwurzeln bildet).

c) Eine Wurzel wird durch eine andere mit demselben Exponenten dividiert, indem man den Radikanden der ersten durch den der zweiten dividiert (und aus dem Bruche die Wurzel auszieht). Und umgekehrt:

d) Ein Bruch wird radiziert, indem man Zähler und Nenner einzeln radiziert (und die erste der entstandenen Wurzeln durch die zweite dividiert).

93) Aus $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\cdots = \sqrt[n]{a\cdot a\cdot a\cdots}$ folgt

5) $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{also:}$$

e) Man potenziert eine Wurzel, indem man den Radikanden potenziert (und aus der entstandenen Potenz die Wurzel auszieht); und umgekehrt:

f) Man zieht die Wurzel aus einer Potenz aus, indem man sie aus der Grundzahl auszieht (und die so entstandene Wurzel zur entsprechenden Potenz erhebt). Oder:

g) Hat man eine Zahl zu potenzieren und zugleich zu radizieren, so ist die Reihenfolge gleichgültig.

94) Ist $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$, so folgt $\sqrt[n]{a} = x^m$, folglich $a = (x^m)^n = x^{mn}$.

Aus $x^{mn} = a$ folgt aber $x = \sqrt[mn]{a}$. Einsetzung in die Anfangsgleichung gibt

6) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

und allgemeiner:

6*) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}.$$

Also: h) Soll eine Zahl mehrfach nacheinander radiziert werden, so kann man sie mit dem Produkte der Exponenten radizieren. Umgekehrt:

i) Man radiziert eine Zahl durch ein Produkt, indem man mit den einzelnen Exponenten nacheinander radiziert. Bei beiden Operationen ist die Reihenfolge gleichgültig.

95) Es war $\sqrt[n]{x^n} = x$. Setzt man a^p für x ein, so erhält man

$$\sqrt[n]{(a^p)^n} = a^p \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{a^{pn}} = a^p.$$

Zieht man beiderseits die q^{te} Wurzel aus, so ergibt sich

7) $$\sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Folglich: k) **Die Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man die beiden Exponenten mit derselben Zahl multipliziert**; dasselbe gilt, wenn man beide Exponenten durch dieselbe Zahl **dividiert**. Vorläufig wird dabei vorausgesetzt, daß diese Division einen ganzzahligen Exponenten gibt.

Übungsbeispiele siehe in den Aufgabensammlungen.

96) **Ausziehung der Kubikwurzel.**

Es ist $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Daraus ergibt sich als Rechenschema:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b \\
 & a^3 \\
\hline
3a^2 & 3a^2b \\
 & 3a^2b \\
\hline
 & 3ab^2 \\
 & 3ab^2 \\
\hline
 & b^3 \\
 & b^3 \\
\hline
\end{array}$$

Beispiel.

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{12167} = 20 + 3. \\
20^3 = & 8000 \\
\hline
3 \cdot 20^2 = 1200 & 4167 \\
3 \cdot 1200 = & 3600 \\
\hline
 & 567 \\
3 \cdot 20 \cdot 3^2 = & 540 \\
\hline
 & 27 \\
3^3 = & 27 \\
\hline
\end{array}$$

Oder abgekürzt geschrieben:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{12|167} = 23 \\
 & 8 \\
\hline
3 \cdot 2^2 = & 12|41 \\
 & 36 \\
\hline
 & 56 \\
3 \cdot 2 \cdot 3^2 = & 54 \\
\hline
 & 27 \\
3^3 = & 27 \\
\hline
\end{array}$$

Ferner ist:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc,$$

was sich folgendermaßen ordnen läßt:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + (3a^2b + 3ab^2 + b^3) + [3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3].$$

Das entsprechende Rechenschema ergibt sich aus folgendem Beispiele:

$$\begin{array}{rr}
 & \sqrt[3]{14348907} = 200 + 40 + 3 \\
a^3 = 200^3 = & \underline{8000000} \\
3a^2 = 120000 \mid & 6348907 \\
3a^2b = & \underline{4800000} \\
 & 1548907 \\
3ab^2 = & \underline{960000} \\
 & 588907 \\
b^3 = & \underline{64000} \\
3(a+b)^2 = 172800 \mid & 524907 \\
3(a+b)^2c = & \underline{518400} \\
 & 6507 \\
3(a+b)c^2 = & \underline{6480} \\
 & 27 \\
 & c^3 = \underline{27}
\end{array}$$

Abgekürzt:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{14|348|907} = 243 \\
a^3 = 2^3 = & \underline{8} \\
3a^2 = 12 \mid & 6\,3 \\
 & \underline{48} \\
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & \underline{5\,824} \\
3(a+b)^2 = 1728 \mid & 524\,9 \\
 & 07 \\
3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = & \underline{524\,907}
\end{array}$$

Hilfsrechnungen und Erläuterung:

$$\begin{array}{rcl}
3a^2b &=& 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48 \\
3ab^2 &=& 3 \cdot 2 \cdot 16 = 96 \\
b^3 &=& 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 &=& 5824
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
3(a+b)^2 = 3\cdot 24^2 = 1728 & \\
3(a+b)^2 c = 1728\cdot 3 = & 5184 \\
3(a+b)c^2 = 3\cdot 24\cdot 9 = & 648 \\
c^3 = 3^3 = & 27 \\
\hline
3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 = & 524907
\end{array}$$

Das Schema geht weiter:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+\cdot\cdot)^3 = a^3 &+ (3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &+ [3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3] \\ &+ [3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3] + \cdots\cdots\end{aligned}$$

Regel. Abgeteilt wird zu dreien von rechts ab, bei Dezimalbrüchen vom Komma ab nach rechts und links zu dreien.

Quadrat- und Kubikwurzeln werden aus geordneten algebraischen Ausdrücken ebenso wie aus Zahlen ausgezogen. Z. B.

$$\sqrt{a^2x^4 + 4abx^2 + 4b^4 + 6ac + \frac{12bc}{x^2} + \frac{9c^2}{x^4}} = ax^2 + 2b + \frac{3c}{x^2}$$

$$\begin{array}{rl}
 & a^2x^4 \\
\hline
2ax^2 & +\,4abx^2 \\
 & +\,4abx^2 \\
\hline
 & 4b^4 \\
 & 4b^4 \\
\hline
2ax^2 + 4b & 6ac + \frac{12bc}{x^2} \\
 & 6ac + \frac{12bc}{x^2} \\
\hline
 & \frac{9c^2}{x^4} \\
 & \frac{9c^2}{x^4} \\
\hline
\end{array}$$

Die geometrische Darstellung von Zahlenwerten wie $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$ usw. ist im allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar.

[In ähnlicher Weise, wie bei den Quadratwurzeln, kann gezeigt werden, daß die Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen, die nicht Kubikzahlen sind, Irrationalzahlen sein müssen. So ist z. B. $\sqrt[3]{10}$, ebenso $\sqrt[3]{100}$ eine Irrationalzahl. Soll bei ganzem positiven n die dritte Wurzel aus 10^n eine ganze Zahl sein, so muß $\frac{n}{3}$ eine ganze Zahl sein. Entsprechendes gilt von den 4^{ten}, 5^{ten}, ... n^{ten} Wurzeln.

Später wird gezeigt werden daß, wenn n eine ganze Zahl ist, im ganzen n verschiedene n^{te} Wurzeln aus jeder Zahl existieren, die zu der hier berechneten einen Wurzel in einfacher Beziehung stehen. Dazu ist jedoch die Einführung einer neuen Art von Zahlen erforderlich.

Man kann die 4., 8., 16. Wurzel ausziehen, indem man aus der Quadratwurzel die Quadratwurzel, aus dieser wieder die Quadratwurzel auszieht u. s. w. Die 6. Wurzel zieht man aus, indem man aus der 3. Wurzel die Quadratwurzel auszieht, die 9. Wurzel, indem man aus der Kubikwurzel die Kubikwurzel auszieht usw.

Für die 5., 7., 11. Wurzel u. s. w. könnte man sich die Rechnungsschemata ebenfalls aufstellen, diese werden aber so umständlich, daß man andere, später zu behandelnde Methoden vorzieht.]

Zusammenstellung der wesentlichsten Ergebnisse über Proportionen, Gleichungen, Potenzen und Wurzeln.

Die Proportion $a : b = c : d$ ist eine richtige, wenn $ad = bc$ ist. Aus ihr folgt:

1) $$(a + b) : (c + d) = a : c = b : d,$$

2) $$(a - b) : (c - d) = a : c = b : d,$$

3) $$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Multiplikation der entsprechenden Glieder zweier Proportionen gibt wieder eine richtige Proportion. Dasselbe gilt von der Division.

Aus $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ oder $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$ folgt

$$\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Aus $ax = b$ folgt

$$x = \frac{b}{a}.$$

Aus $ax + by = c$ und $a_1 x + b_1 y = c_1$ folgt

$$x = \frac{b_1 c - b c_1}{a b_1 - a_1 b} \quad \text{und} \quad y = \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b}.$$

Aus $x^2 + ax = b$ folgt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$