# Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig und Berlin, 1904**

III. Grundform der gemischt quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten

## III. Grundform der gemischt quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten.

86) Zur Lösung gemischt quadratischer Gleichungen vereinige man zunächst alle Glieder mit $x^2$, sodann alle Glieder mit $x$, zuletzt alle Glieder ohne $x$. Die so gewonnene Form $a_1 x^2 + b_1 x = c_1$ bringe man durch beiderseitige Division durch $a_1$ noch auf die Form $x^2 + \frac{b_1}{a_1} x = \frac{c_1}{a_1}$ oder auf die Normalform

$$x^2 + ax = b. \tag{1}$$

Man kann vorläufig den Kunstgriff anwenden, $ax$ als ein doppeltes Produkt $2\frac{a}{2}x$ zu schreiben und dadurch, daß man rechts und links $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ addiert, die linke Seite in ein vollständiges Quadrat zu verwandeln, also:

$$x^2 + 2\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b,$$

wofür man schreiben kann

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b.$$

Beiderseitige Ausziehung der Quadratwurzel gibt, da man die Vorzeichen der beiden Wurzeln auf zweierlei Art kombinieren kann,

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b},$$

also ist die Lösung

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}. \tag{2}$$

[Bezeichnet man in Gleichung 1) $\frac{a}{2}$ als den halben Faktor (von $x$), so kann man als Lösung kurz merken:

$x = -$ halber Faktor $\pm \sqrt{\text{halber Faktor zum Quadrat} + \text{rechte Seite}}$.]

Er giebt also zwei Lösungen:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

und

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

**Beispiel.** $x^2 + x = 12$ gibt, da der Faktor von $x$ gleich 1 ist,

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2},$$

also

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = -\frac{8}{2} = -4.$$

**Probe.** $3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$, $(-4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$. Die beiden möglichen Lösungen (Wurzeln) sind also gefunden.

**Beispiel.**

$$x^2 - 5x = -6 \text{ gibt } x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2},$$

also

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Wiederhole an beiden Beispielen den allgemeinen Entwickelungsgang. Beachte auch, daß im ersten Beispiele die Summe der Lösungen $3 + (-4) = -1$, ihr Produkt $3 \cdot (-4) = -12$ ist, d. h. abgesehen vom Vorzeichen den Faktor von $x$ bezw. die rechte Seite gibt, während im zweiten Beispiele $3 + 2 = 5$, $3 \cdot 2 = 6$ ist. Auch bei der allgemeinen Lösung ist $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = -b$. — Eingehendere Besprechung der Gleichung zweiten Grades erfolgt später. Übungsmaterial bieten die Aufgabensammlungen.

---

## IV. Potenzen und Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten.

87) Werden zwei Faktoren $a$ miteinander multipliziert, so bezeichnet man das Produkt mit $a^2$, bei drei Faktoren $a$ schreibt man $a^3$, bei vier Faktoren $a^4$ [lies: $a$ hoch 4 (oder $a$ zur vierten Potenz)], bei $n$ Faktoren $a^n$, also

1) $$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n.$$

Der Ausdruck $a^n$ heißt die $n^{te}$ Potenz von $a$, die Zahl $a$ heißt Grundzahl oder Basis der Potenz, $n$ heißt der Potenzexponent.

88) Da $a^2 \cdot a^3 = (aa) \cdot (aaa) = aaaaa = a^5$ ist, so folgt $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$. Allgemein folgt für ganzes $m$ und $n$

2) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Da $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$ ist, so folgt $\frac{a^5}{a^3} = a^2 = a^{5-3}$. Allgemein ist