Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

I. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

Bezüglich der Übungsbeispiele wird auf die gebräuchlichen Aufgabensammlungen verwiesen.

B. Lehraufgabe der Obertertia.

I. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.*)

74) Es seien zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten x und y gegeben, die sich auf folgende Normalform bringen lassen:

1) $$ax + by = c,$$

2) $$a_1x + b_1y = c_1,$$

dann sind verschiedene Fälle möglich. Erstens kann die zweite Gleichung die umgeformte erste sein (z. B. bei $a_1 = 2a$, $b_1 = 2b$, $c_1 = 2c$), so daß sie gar nichts neues gibt. Dann hat man zwei Unbekannte, aber nur eine Gleichung. Es gibt demnach unendlich viele Lösungen, denn jedem willkürlichen Werte von x entspricht ein bestimmter Wert von y.

Ein anderer Fall ist der, daß beide Unbekannte sich entfernen lassen und nur richtiges oder falsches übrig bleibt. Ist z. B. gegeben

$$4x + 6y = 12,$$
$$2x + 3y = 7,$$

so ergibt Multiplikation beider Seiten der zweiten Gleichung mit 2 die Gleichung $4x + 6y = 14$. Diese Gleichung kann man durch Subtraktion mit der ersten vereinigen, was $12 = 14$ geben würde. Weil dies falsch ist, widersprechen einander beide Gleichungen.

Der dritte Fall ist der, in dem die Lösung durchführbar ist. Die Lösung kann dann auf verschiedene Arten geschehen.

75) a) Substitutionsmethode (Einsetzungsmethode).

Aus Gleichung 1) folgt $x = \frac{c - by}{a}$. Einsetzung dieses Wertes in die zweite Gleichung, giebt $a_1 \frac{c - by}{a} + b_1y = c_1$. Daraus folgt

---

*) Dieses Kapitel kann im Anschluß an die Lehrpläne auch etwas später behandelt werden.

$\frac{a_1 c - a_1 b y}{a} + b_1 y = c_1$, oder, wenn man beiderseits mit a multipliziert, $a_1 c - a_1 b y + a b_1 y = a c_1$, $y(a b_1 - a_1 b) = a c_1 - a_1 c$, also

3) $$y = \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b}.$$

Einsetzung dieses Wertes in die obige Hilfsgleichung $x = \frac{c - by}{a}$

gibt $x = \frac{c - b\frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b}}{a} = \frac{a b_1 c - a_1 b c - a b c_1 + a_1 b c}{a(a b_1 - a_1 b)}$ oder

4) $$x = \frac{b_1 c - b c_1}{a b_1 - a_1 b}.$$

In 3) und 4) hat man die Auflösung beider Gleichungen.

Bei Zahlengleichungen rechnet man aus 3) erst y fertig aus und benutzt den einfachen Wert zur Berechnung von x. Z. B.

$$5x + 7y = 31$$
$$2x + 3y = 13$$

gibt $y = \frac{a c_1 - a_1 c}{a b_1 - a_1 b} = \frac{5 \cdot 13 - 2 \cdot 31}{5 \cdot 3 - 2 \cdot 7} = \frac{65 - 62}{15 - 14} = \frac{3}{1} = 3$. Einsetzung in $x = \frac{c - by}{a}$ gibt $x = \frac{31 - 7 \cdot 3}{5} = \frac{31 - 21}{5} = \frac{10}{5} = 2$.

Setzt man $x = 2$ und $y = 3$ in die gegebenen Gleichungen ein, so stimmt die Probe.

76) b) Kombinationsmethode (Gleichsetzungsmethode).

Sind die gegebenen Gleichungen die früheren (Abschnitt 74), so berechne man aus beiden x. Dies gibt

$$x = \frac{c - by}{a} \quad \text{und} \quad x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}.$$

Da jetzt die linken Seiten dieser Gleichungen übereinstimmen, sind auch die rechten gleich, d. h. es ist

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}.$$

Hieraus ergibt sich für y derselbe Wert, wie vorher, und x wird entsprechend gefunden.

Das vorige Zahlenbeispiel erledigt sich folgendermaßen: Aus $x = \frac{31 - 7y}{5}$ und $x = \frac{13 - 3y}{2}$ folgt $\frac{31 - 7y}{5} = \frac{13 - 3y}{2}$. Hieraus folgt $y = 3$. Dies ist wie vorher in $x = \frac{31 - 7y}{5}$ einzusetzen und gibt $x = 2$.

77) c) Die Additions- bezw. Subtraktionsmethode.

Man multipliziere, um y zu entfernen, beide Seiten der ersten Gleichung mit b_1, beide der zweiten Gleichung mit b. Dies gibt

$$ab_1x + bb_1y = b_1c,$$
$$a_1bx + bb_1y = bc_1.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$x(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1,$$

woraus für x derselbe Wert wie vorher folgt. Jetzt kann man den Wert von x in eine der gegebenen Gleichungen einsetzen und so y berechnen, oder man gewinnt y, indem man oben mit a_1, unten mit a multipliziert.

Im vorigen Zahlenbeispiele ist zur Entfernung von y die erste Gleichung mit dem Faktor 3, die zweite mit dem Faktor 7 zu erweitern. Aus den entstehenden Gleichungen

$$15x + 21y = 93$$
$$14x + 21y = 91$$

folgt durch Subtraktion $x = 2$. Dies ist in eine der gegebenen Gleichungen einzusetzen und führt auf $y = 3$.

Verlangen es die Vorzeichen, so entfernt man die eine Unbekannte durch Addition, statt durch Subtraktion. —

Sind die Multiplikationen überflüssig, so führt diese Methode am schnellsten zum Ziele. Z. B. aus

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

folgt durch Addition $2x = a + b$, $x = \frac{a+b}{2}$, durch Subtraktion $2y = a - b$, $y = \frac{a-b}{2}$.

[78) Bei drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten x, y und z berechne man zunächst z aus der einen und setze den Wert in die beiden anderen ein, sodaß nur noch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bleiben, deren Behandlung die vorige ist. Neues bietet sich dabei nicht, und so kann auf die Übungsbücher verwiesen werden.]