Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Verschiedene Schreibweisen derselben Proportion. Ableitung neuer Proportionen aus gegebenen. Sätze über Proportionen.

125,21	125,21	
28,345	28,345	
25042	25042	
10017	10016	8
376	375	63
50	50	084
6	6	2605
3549,1	3549,0	7745

Alles rechts vom Strich Stehende ist dabei überflüssige Rechnung.

62) Schema der abgekürzten Division für 5=stelliges Rechnen, erläutert durch Vergleich mit der gewöhnlichen Ausführung:

3549,1 : 125,21 = 28,345.	3549,1 : 125,21 = 28,345 . . .	
25042	25042	
10449	10449	0
10017	10016	8
432	432	20
376	375	63
56	56	570
50	50	084
6	6	4860
	6	2605
		. . . . .

IV. Proportionen.*)

63) Der Quotient $\frac{a}{b}$ wird auch als das **Verhältnis** der Größe a zur Größe b bezeichnet. Sind zwei Verhältnisse einander gleich, so nennt man die entsprechende Gleichung eine Proportion. So sind z. B. die Quotienten $\frac{6}{3}$ und $\frac{8}{4}$ gleich, also ist $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ eine Proportion. Man schreibt dieselbe auch folgendermaßen:

$$6 : 3 = 8 : 4$$

(lies: es verhält sich 6 zu 3 wie 8 zu 4). Hier heißen 6 und 4 die **äußeren** Glieder, 3 und 8 die **inneren**. Im Beispiele ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren.

*) Auf Schulen, die auf Tertia Rechenunterricht haben, kann auch dieses Kapitel dem Rechnen überwiesen werden. Einiges ist bereits in der Geometrie behandelt worden. Vgl. Seite 138.

Allgemein sei

$$a : b = c : d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

eine richtige Proportion; dann folgt aus der letzten Gleichung durch beiderseitige Multiplikation mit bd

$$\frac{a}{b} bd = \frac{c}{d} bd \quad \text{oder} \quad ad = bc.$$

Folglich: Ist eine Proportion richtig, so ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren. (Umkehrung?)

64) **Aufgabe.** Die drei ersten Glieder einer Proportion seien gegeben; das vierte soll berechnet werden.

Auflösung. Aus $a : b = c : x$ folgt $ax = bc$, also, wenn beiderseits durch a dividiert wird,

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Beispiel. $5 : 9 = 4 : x.$

Auflösung. $x = \frac{4 \cdot 9}{5} = \frac{36}{5} = \frac{72}{10} = 7{,}2.$

65) **Aufgabe.** Stelle die Proportion $6 : 3 = 8 : 4$ auf alle möglichen Arten so um, daß sie richtig bleibt, d. h. so, daß das Produkt der inneren Glieder gleich dem der äußeren bleibt; z. B. $6 : 8 = 3 : 4$, wobei die genannte Bedingung erfüllt ist. Im ganzen sind acht verschiedene Schreibweisen möglich, aus denen sich ergibt, welche Umstellungen gestattet sind.

66) Aus jeder Proportion lassen sich andere Proportionen ableiten. Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt nämlich $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ oder $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, oder durch Umstellung der Proportion:

a) $$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}, \quad \text{oder} \quad (a+b):(c+d) = b:d.$$

Ebenso ist $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ oder $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, oder durch Umstellung der Proportion

b) $$\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}, \quad \text{oder} \quad (a-b):(c-d) = b:d.$$

Aus a) und b) folgt, da die rechten Seiten übereinstimmen:

$$(a+b):(c+d) = (a-b):(c-d),$$

oder auch

c) $$(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d).$$

So folgt z. B. aus $9 : 7 = 18 : 14$

$(9 + 7) : (18 + 14) = 9 : 18$, oder $16 : 32 = 9 : 18 = 7 : 14$,
$(9 - 7) : (18 - 14) = 9 : 18$, oder $2 : 4 = 9 : 18 = 7 : 14$,
$(9 + 7) : (9 - 7) = (18 + 14) : (18 - 14)$, oder $16 : 2 = 32 : 4$.

Also: In jeder Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Summe des dritten und vierten Gliedes wie das zweite zum vierten (oder das erste zum dritten). Dasselbe gilt von den entsprechenden Differenzen. Außerdem verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz, wie die Summe der beiden letzten zu ihrer Differenz.

Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$ folgt durch Multiplikation der rechten und linken Seiten:

$$\frac{aa_1}{bb_1} = \frac{cc_1}{dd_1}.$$

Also: Multipliziert man die gleichstelligen Glieder zweier Proportionen miteinander, so entsteht eine neue Proportion.

Sprich das Entsprechende für die Division solcher Glieder aus.

Statt $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ kann man schreiben $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$, denn in letzterem sind folgende Proportionen enthalten:

$$a : b = a_1 : b_1, \quad a : c = a_1 : c_1, \quad b : c = b_1 : c_1,$$

von denen die letzte eine Folge der beiden ersten ist. (Inwiefern?)

[67) Sind drei Verhältnisse einander gleich, z. B. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, und ist jeder Quotient $= n$, so ist $a = na_1$, $b = nb_1$, $c = nc_1$, folglich $a + b + c = na_1 + nb_1 + nc_1 = n(a_1 + b_1 + c_1)$, und $\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = n = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. Folglich: Aus $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ folgt $\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. In Worten: Sind mehrere Brüche (Verhältnisse) einander gleich, so ist das Verhältnis der Summe der Zähler zur Summe der Nenner gleich jedem der gegebenen Brüche (Verhältnisse).

So folgt z. B. aus $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$, daß $\frac{2 + 4 + 10}{3 + 6 + 15} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$ ist.]

Anwendungen der Proportionen bietet die Ähnlichkeitslehre der Geometrie. Dort spielt eine besondere Rolle die stetige Proportion $a : b = b : c$, aus welcher folgt $b^2 = ac$. Hier heißt b die mittlere Proportionale zwischen a und c. (Pythagor. Lehrsatz; goldner Schnitt.)