Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Rechnungsregeln. Verwandeln gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche und der letzteren in die ersteren. Periodische Dezimalbrüche. Nicht periodische von unendlicher Stellenzahl. Irrationalzahlen. ...

Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

Die Reihenfolge der Glieder ist bei der Addition gleichgültig.

$$a + b = b + a; \quad a - b = -b + a.$$

Dasselbe gilt von der Multiplikation; $ab = ba$.

Aus $a + b = c$ folgt $b = c - a$ und $a = c - b$.

Aus $a - b = c$ folgt $-b = c - a$ und $a = b + c$.

$$a + (b - c) = a + b - c; \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

$$(a + b)c = ac + bc; \quad (a - b)c = ac - bc.$$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd.$$

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

$$+ \cdot + = + \qquad + : + = +$$

$$- \cdot + = - \qquad - : + = -$$

$$+ \cdot - = - \qquad + : - = -$$

$$- \cdot - = + \qquad - : - = +$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Aus $\frac{a}{b} = c$ folgt $a = bc$ und $b = \frac{a}{c}$.

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b}c = \frac{c}{b}a; \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$$

III. Dezimalbrüche.*)

49) Es ist $\frac{271}{100} = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100}$, oder in bekannter Schreibweise $= 2{,}71$.

*) Dieses Kapitel, dessen schon in der Geometrie gedacht wurde, ist mög=

Ein Bruch, dessen Nenner 10 oder 100 oder 1000 oder eine andere daraus durch Multiplikation mit 10 entstehende Zahl ist, läßt sich so ordnen, daß erst die Ganzen, dann die Zehntel, Hundertstel u. s. w. geschrieben werden. Man nennt ihn Dezimalbruch. Durch Ansetzen von Nullen hinter dem Komma wird er nicht geändert. (Die ganze Zahl, bei der man hinter das Komma eine Reihe von Nullen setzt, kann auch als Dezimalbruch aufgefaßt werden.)

50) Eine Summe solcher Brüche giebt stets wieder einen Dezimalbruch.

Beispiel. $3 + \frac{4}{1000} + \frac{6}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100}$
$= 3 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} = 3{,}278.$

Additionsschema:	5,98300	oder	5,983
	2,72861		2,72861
	8,71161		8,71161

Man setze Komma unter Komma.

51) Eine Differenz von Dezimalbrüchen ist stets wieder ein Dezimalbruch.

Beispiel. $5{,}4631 - 2{,}132 = 5\frac{4631}{10\,000} - 2\frac{1320}{10\,000} = 3\frac{3311}{10\,000} = 3{,}3311.$

Subtraktionsschema:	5,4631	oder	5,4631
	2,1320		2,132
	3,3311		3,3311

52) Rückt man das Komma eines Dezimalbruchs um eine, zwei, drei Stellen u. s. w. nach rechts, so ist er mit 10, 100, 1000 u. s. w. multipliziert worden; z. B.

$$5296{,}21 = 5{,}29621 \cdot 1000.$$

Rückt man das Komma um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen nach links, so ist der Bruch durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiert worden, z. B.

$$31{,}9826 = 31982{,}6 : 1000$$

53) Die Multiplikation der Dezimalbrüche geschieht wie die der ganzen Zahlen, nur werden zum Schluß von rechts her so viele Stellen durch das Komma abgeschnitten, als beide Brüche zusammen Dezimalstellen hatten. (Denn es ist z. B. $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{100\,000}$, die

lichst dem Rechenunterrichte zuzuweisen; das über die Irrationalzahl Gesagte muß aber in der Arithmetik zur Sprache kommen.

Anzahl der Nullen im Nenner des Produktes ist gleich der Anzahl der Nullen in beiden Faktoren zusammengenommen.)

Multiplikationsschema:		
	0,5388	0,231
	22,3	0,012
	16164	462
	10776	231
	10776	0,002772
	12,01524	

Reicht die Anzahl der Stellen zum Abschneiden nicht aus, so sind Nullen in hinreichender Zahl vorzusetzen.

54) Nicht aufgehende Division ganzer Zahlen durcheinander kann dezimal fortgesetzt werden. Dasselbe gilt von der Division eines Dezimalbruchs durch eine ganze Zahl.

Z. B.		
107 : 4 = 26,75	10,7 : 4 = 2,675	1,07 : 4 = 0,2675.
8	8	0,
27	27	10
24	24	8
30	30	27
28	28	24
20	20	30
20	20	28
		20
		20

55) In derselben Weise wird jeder gewöhnliche Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt.

$\frac{3}{8}$ z. B. giebt 3 : 8 = 0,375.
0
30
24
60
56
40
40

56) Geht die Division jenseits des Kommas nach so häufiger Wiederholung, als verschiedene Reste möglich sind, nicht auf, so wiederholen sich die Reste periodisch. Der Dezimalbruch wird dann endlos und periodisch. (Die Periode kann aber schon früher beginnen.)

Beispiele. $\frac{5}{6}$ giebt $5 : 6 = 0{,}8333\ldots$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 50 \\ 48 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \end{array}$$

$\frac{5}{7}$ giebt $5 : 7 = 0{,}714285\,714285\ldots.$

Ebenso ist:

$$\frac{28733}{99900} = 0{,}28\,761\,761\ldots.$$

Der Dezimalbruch heißt rein periodisch, wenn unmittelbar hinter dem Komma die Periode beginnt. Beginnt sie später, so heißt er unrein periodisch. Die Stellen zwischen dem Komma und der Periode bilden die sogenannte Vorperiode.

57) Einen rein periodischen Dezimalbruch verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man die Periode als Zähler schreibt und als Nenner so oft die Ziffer 9 setzt, als die Periode Stellen hat.*)

Beispiel. $0{,}843\,843\,843\ldots = \frac{843}{999} = \frac{281}{333}$.

Beweis. Den Wert des Bruches setze man gleich x, dann ist im Beispiele

$$\begin{array}{rrl} & 1000\,x = & 843{,}843\,843\ldots \\ & x = & 0{,}843\,843\ldots \\ \hline \text{durch Subtraktion} & 999\,x = & 843{,}000\,000\ldots \end{array}$$

$$\text{d. h. } x = \frac{843}{999} = \frac{281}{333}.$$

58) Einen unrein periodischen Dezimalbruch verwandelt man in einen gewöhnlichen, indem man Vorperiode und Periode als eine Zahl hintereinander schreibt und die Vorperiode abzieht. Dies gibt den Zähler. Als Nenner schreibt man so oft 9, als die Periode Ziffern zählt und schließt so oft Null an, als die Vorperiode Ziffern hat.*)

Beispiel. $0{,}28\,463\,463\,463\ldots$

$$\begin{array}{r} 28\,463 \\ 28 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{28\,435}{99\,900} = \frac{5687}{19\,980}.$$

*) Vgl. Seite 118.

Beweis. Setzt man den Wert des Bruches $= x$, so ist im Beispiele

$$\begin{aligned} 100\,000\,x &= 28\,463{,}463\,463\,\ldots \\ 100\,x &= \quad 28{,}463\,463\,\ldots \\ \hline \text{durch Subtraktion } 99\,900\,x &= 28\,435{,}000\,000\,\ldots \end{aligned}$$

$$\text{also } x = \frac{28\,435}{99\,900} = \frac{5687}{19\,980}.$$

[59) Hat der Dezimalbruch keine Periode, und ist er trotzdem unendlich lang, so läßt er sich nicht in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln. Denn wäre er aus einem gewöhnlichen Bruche entstanden, so müßte er periodisch sein, da die Reste sich schließlich doch wiederholen würden. Betrachtet man ihn als rein periodisch, jedoch mit unendlich langer Periode, so erhält der Zähler unendlich viele Stellen und der Nenner ebenso oft die Zahl 9. Statt dessen kann man ihn, wie es gewöhnlich geschieht, auch als gewöhnlichen Bruch schreiben, dessen Nenner 1 mit unendlich vielen Nullen ist. Einen solchen Bruch nennt man eine Irrationalzahl. Als eine solche ist z. B. $\pi = 3{,}14159265\ldots$ von Lambert nachgewiesen worden (vergl. Geometrie), was nun als $\frac{314159265\ldots}{99999999\ldots}$ oder als $\frac{314159265\ldots}{100000000\ldots}$ aufzufassen ist*), jedoch mit endlosem Zähler und Nenner. Die ganzen Zahlen, die gewöhnlichen Brüche, die endlichen und die endlosen periodischen Dezimalbrüche nennt man Rationalzahlen. Mit ihnen kann man absolut genau rechnen. Beim Rechnen mit Irrationalzahlen dagegen berücksichtigt man nur eine beliebige Anzahl von Stellen. Durch Einführung der Irrationalzahlen wird es erreicht, daß jedem Punkte der geraden Linie eine bestimmte Zahl entspricht und umgekehrt jeder Zahl ein Punkt der Geraden.]

60) Die Division eines Dezimalbruchs durch einen Dezimalbruch kann geschehen, indem man in beiden Zahlen das Komma so lange nach rechts schiebt, bis der Divisor eine ganze Zahl wird.

Beispiel. $\frac{13{,}75}{0{,}125} = \frac{13\,750}{125} = 110.$

$\frac{1{,}51}{0{,}7} = \frac{15{,}1}{7}$, worauf die Division wie gewöhnlich erfolgt.

61) Schema der abgekürzten Multiplikation für 5-stelliges Rechnen, erläutert durch Vergleich mit der gewöhnlichen Ausführung:

---

*) Vgl. Seite 119. Streichen der letzten 9.

125,21	125,21
28,345	28,345
25042	25042 |
10017	10016 | 8
376	375 | 63
50	50 | 084
6	6 | 2605
3549,1	3549,0 | 7745

Alles rechts vom Strich Stehende ist dabei überflüssige Rechnung.

62) Schema der abgekürzten Division für 5=stelliges Rechnen, erläutert durch Vergleich mit der gewöhnlichen Ausführung:

3549,1 : 125,21 = 28,345.	3549,1 : 125,21 = 28,345 . . .
25042	25042 |
10449	10449 | 0
10017	10016 | 8
432	432 | 20
376	375 | 63
56	56 | 570
50	50 | 084
6	6 | 4860
	6 | 2605
	| . . . . .

IV. Proportionen.*)

63) Der Quotient $\frac{a}{b}$ wird auch als das **Verhältnis** der Größe a zur Größe b bezeichnet. Sind zwei Verhältnisse einander gleich, so nennt man die entsprechende Gleichung eine **Proportion**. So sind z. B. die Quotienten $\frac{6}{3}$ und $\frac{8}{4}$ gleich, also ist $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ eine Proportion. Man schreibt dieselbe auch folgendermaßen:

$$6 : 3 = 8 : 4$$

(lies: es verhält sich 6 zu 3 wie 8 zu 4). Hier heißen 6 und 4 die **äußeren Glieder**, 3 und 8 die **inneren**. Im Beispiele ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren.

*) Auf Schulen, die auf Tertia Rechenunterricht haben, kann auch dieses Kapitel dem Rechnen überwiesen werden. Einiges ist bereits in der Geometrie behandelt worden. Vgl. Seite 138.