Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

II. Erweiterung des Zahlengebietes durch Einführung der negativen und gebrochenen Zahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

$$\frac{10ac + 15bc + 14ad + 21bd}{2a + 3b} = \frac{5c(2a + 3b) + 7d(2a + 3b)}{2a + 3b}$$
$$= \frac{(2a + 3b)(5c + 7d)}{2a + 3b} = 5c + 7d.$$
$$\frac{a^2bc^2}{abc} = ac.$$

Übe an einzelnen geeigneten Beispielen schon jetzt das Divisionsschema ein.

Beispiel:
$$\begin{array}{l} (a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \\ \underline{a^2 + ab} \\ \quad ab + b^2 \\ \quad \underline{ab + b^2} \end{array}$$

Beispiel:
$$\begin{array}{l} (ac + bc + ad + bd) : (c + d) = a + b \\ \underline{ac \quad + ad} \\ \quad bc \quad + bd \\ \quad \underline{bc \quad + bd} \end{array}$$

II. Erweiterung des Zahlengebietes durch Einführung der negativen und der gebrochenen Zahlen.

33) Bisher bezeichneten die Buchstaben a, b, c u. s. w. nur solche ganze Zahlen, die sich durch Addition aus der Zahl 1 herstellen lassen. Infolgedessen wurde die Subtraktionsformel $a - b = c$ auf die Fälle beschränkt, wo $b < a$ ist; und die Divisionsformel $\frac{a}{b} = c$ auf die Fälle, wo a ein Vielfaches von b ist. Beide Beschränkungen engten die Wahl der Übungsbeispiele ein, und schon einfache Aufgaben des praktischen Lebens verlangen die Aufhebung dieser Schranken.

34) Jemand besitze 300 Mark und habe einen Geschäftsverlust von 400 Mark. Wie stellt sich sein Vermögen? Es ist $300 - 400 = (300 - 300) - 100 = 0 - 100$, also ergibt sich ein Vermögen von $(0 - 100)$ Mark oder wie man kürzer schreibt, von -100 Mark (lies: „minus hundert Mark"). Es handelt sich also um 100 Mark Schulden, wenn man das „negative" Vermögen als Schuld bezeichnet.

In ähnlicher Weise gibt jede Differenz, deren Subtrahend größer ist, als der Minuend, eine Zahl, die sich als Differenz zwischen 0 und einer anderen herausstellt. So ist

$$5 - 6 = 0 - 1 = -1, \quad 8 - 10 = 0 - 2 = -2,$$
$$3 - 6 = 0 - 3 = -3, \quad 5 - 9 = 0 - 4 = -4.$$

Man nennt jede Differenz, deren Minuend Null und deren Subtrahend größer als Null ist, eine **negative Zahl**, sodaß die Reihe der negativen Zahlen lautet:

$$-1, -2, -3, -4, -5, \text{ u. s. w.}$$

Im Gegensatz dazu nennt man die früher behandelten Zahlen **positive** und bezeichnet sie als $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, u. s. w. Man nennt -5 die **entgegengesetzte Zahl** von $+5$, $-a$ die entgegengesetzte von $+a$.

34) Zur Veranschaulichung der positiven und negativen ganzen Zahlen kann man eine Reihe von Punkten auf gerader Linie markieren, die in gleichen Abständen von einem Punkte 0 aus nach rechts und links aufeinander folgen. Nach rechts mögen sich die positiven Zahlen befinden. Geht man von 5 aus schrittweise nach links, so gelangt man über 4, 3, 2, 1 nach 0, der nächste Schritt führt nach -1, die folgenden nach -2, -3, -4, u. s. w. Schneidet man von 0 aus nach rechts $+3$ ab, dann vom Endpunkte aus -5 (d. h. 5 nach links), so gelangt man an die Stelle -2, und es ist wirklich $3 - 5 = -2$. In dieser Weise läßt sich an der geraden Linie jedes Addieren und Subtrahieren mit den Zahlen des erweiterten Zahlensystems prüfen.*)

Fig. 129.

36) Wie $8 - 13 = -5 = -(13 - 8)$ ist, so ist für $b > a$ allgemein $(a - b) = -(b - a)$.

Dies steht im Einklange mit dem Vertauschungsgesetze der Addition, denn es ist $a - b = -b + a$, wobei letzteres mit $-(b - a)$ übereinstimmt. Aus dem Bestehenbleiben dieses Gesetzes folgt für positives c und die negative Größe $(-c)$ noch folgendes:

$$a + (-c) = a + (0 - c) = (a + 0) - c = a - c,$$
$$a - (-c) = a - (0 - c) = (a - 0) + c = a + c,$$

d. h. **Addition einer negativen Zahl bedeutet dasselbe, wie Subtraktion der entsprechenden positiven; Subtraktion der negativen dasselbe, wie Addition der positiven.** (Prüfe

*) Diese Einteilung der Geraden findet an jedem Quecksilberthermometer praktische Anwendung. Die positiven Zahlen bedeuten dort Wärme, die negativen dagegen Kälte.

dies an den Punkten der gezeichneten Geraden und an dem Beispiele von Vermögen und Schulden.)

Auch alle Gruppierungsgesetze der Addition bleiben für das erweiterte Zahlengebiet bestehen (denn alles Addieren und Subtrahieren negativer Zahlen ist auf das Subtrahieren und Addieren positiver zurückgeführt).

37) Hat Jemand 3 mal, d. h. $(+3)$ mal, den Geschäftsverlust 400 Mark, so verliert er 1200 Mark, oder er gewinnt, was dasselbe ist, -1200 Mark. Es ist also verstandesgemäß

$(-400) \cdot 3 = -1200$, also auch $(-400)(+3) = -1200$

und allgemein

a) $$(-a) \cdot (+b) = -ab$$

zu setzen. Dies steht auch im Einklange mit der früheren Formel $(c-a)(d+b) = cd - ad + cb - ab$, denn setzt man hier $c = 0$ und $d = 0$, so erhält man $(0-a)(0+b) = 0 \cdot 0 - a \cdot 0 + 0 \cdot b - ab = -ab$. Also gilt das Gesetz: Ist der Multiplikand negativ und der Multiplikator positiv, so ist das Produkt negativ.

38) Wird nun verlangt, daß das Vertauschungsgesetz der Multiplikation bestehen bleibt, so muß man setzen $(+3) \cdot (-400) = -1200$ und allgemein:

b) $$(+b) \cdot (-a) = -ab.$$

[Praktisch deuten ließe sich das Multiplizieren von $(+3)$ mit (-400) etwa als ein 400maliges Wegnehmen von $(+3)$, was ein Vermindern um 1200 bedeutet.] Setzt man dies fest, so ist man wieder im Einklange mit der früher nur für positive Faktoren bewiesenen Formel $(d+b)(c-a) = dc + bc - ad - ab$ für $d = 0$ und $c = 0$, und die genannte Festsetzung führt nicht auf Widersprüche. [Das Verlangen, bei der Erweiterung des Multiplikationsbegriffes mit den früheren Festsetzungen nicht in Widerspruch zu geraten, ist allerdings berechtigt, aber an sich durchaus keine logische Notwendigkeit. Es handelt sich bei der Formel b) nicht um einen beweisbaren Satz, sondern um eine zweckmäßige Festsetzung.] Die Formel b) besagt lediglich, daß man unter Multiplikation mit einer negativen Zahl dasselbe verstehen will, wie bei der Multiplikation mit einer positiven, jedoch soll dabei das Produkt das entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie bei der letzteren Operation. Damit ist die Multiplikation mit einer negativen Zahl endgültig erklärt (definiert).

39) Hält man letzteres fest, so muß aus a) folgen:

c) $$(-a)(-b) = +ab.$$

Auch dies steht im Einklange mit der früheren Formel $(c-a)(d-b) = cd - ad - cb + ab$ für $c = 0$ und $d = 0$. [Praktisch ließe sich die Formel c) beispielsweise und zur Not deuten als ein wiederholtes Vermindern oder Wegnehmen von Schulden, was einer Vermehrung des Vermögens gleichkommt. Wer 3 mal seine Schulden um je 400 Mark vermindert, bessert sein Vermögen um + 1200 Mark. **Das eigentliche Wesen** der Multiplikation negativer Größen miteinander wird jedoch durch solche Deutungen nicht hinreichend getroffen, denn diese erläutern auch nur die in der Formel $(-1)(-b) = -(-b) = +b$ liegende Festsetzung.]

40) So ergibt sich für den erweiterten Multiplikationsbegriff folgende Vorzeichentabelle:

$+ \cdot + = +$ (plus mal plus = plus)*),
$- \cdot + = -$ (minus mal plus = minus),
$+ \cdot - = -$ (plus mal minus = minus),
$- \cdot - = +$ (minus mal minus = plus).

41) **Hält man ferner bei der Erweiterung des Multiplikationsbegriffes fest, daß aus** $a \cdot b = c$ **folgen soll** $a = \frac{c}{b}$, so gilt ebenso für die Division die Vorzeichentabelle:

$+ : + = +$ (plus durch plus = plus),
$- : + = -$ (minus durch plus = minus),
$+ : - = -$ (plus durch minus = minus),
$- : - = +$ (minus durch minus = plus).

Demnach ist $\frac{-a}{+b} = \frac{0-a}{+b} = -\frac{a}{b}$; $\frac{+a}{-b} = \frac{+a}{0-b} = -\frac{a}{b}$;

$$\frac{-a}{-b} = \frac{0-a}{0-b} = +\frac{a}{b}.$$

Jetzt ist das Rechnen mit negativen Zahlen auf das Rechnen mit positiven zurückgeführt, ohne daß Widersprüche mit den früheren Gesetzen entstanden sind. Die früheren Formeln behalten also ihre Geltung auch dann, wenn negative Differenzen auftreten oder die Buchstabengrößen selbst negative Zahlen sind. Die Zeichen + und − werden von jetzt ab **Vorzeichen** genannt. Der Zahlenwert heißt, wenn

*) In den Klammern ist absichtlich eine abgekürzte Sprechweise angewandt, die sich dem Gedächtnis besser einprägt. Eigentlich müßte man sagen: Positives mit Positivem multipliziert, giebt Positives u. s. w.

man vom Vorzeichen absieht, der absolute Zahlenwert. Deshalb lautete die Überschrift des Abschnitts I: „Das Gebiet der gewöhnlichen (absoluten und ganzen) Zahlen." Die Sätze der Abschnitte 40 und 41 lassen sich jetzt für je zwei Zahlen folgendermaßen zusammenfassen: Beim Multiplizieren und Dividieren geben gleiche Vorzeichen „plus", ungleiche geben „minus".

42) Wird irgend eine Einheit (sei es eine Münz-, Gewichts- oder Längeneinheit u. dergl.) in 4 gleiche Teile zerlegt, so nennt man jeden Teil $\frac{1}{4}$ der Einheit. Das 4-fache des Teiles gibt die ursprüngliche Einheit wieder, es ist also auch in der reinen Zahlenlehre $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$, und, wenn man festsetzt, daß das Gesetz $ab = ba$ erhalten bleiben soll, $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Teilt man dagegen die Summe 3 Einheiten in 4 gleiche Teile, so bezeichnet man jeden Teil als $\left(\frac{3}{4}\right.$ Einheit$\left.\right)$. Das 4-fache des Teils gibt die ursprünglichen 3 Einheiten wieder. Also ist auch in der reinen Zahlenlehre $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$, und bei Festhaltung des Vertauschungsgesetzes $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. Da aber jetzt das 3-fache der vorigen Einheit geteilt wurde, so muß jeder Teil der neuen Teilung drei mal so groß sein, als jeder der vorigen Teilung, d. h. es ist $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$.

Allgemein: Ist b eine ganze Zahl, und soll die Zahleneinheit 1 in b gleiche Teile zerlegt werden, so bezeichnet man jeden Teil als $\frac{1}{b}$, und es ist $b \frac{1}{b} = 1$. Ist auch a eine ganze Zahl, und soll man diese in b gleiche Teile zerlegen, so bezeichnet man jeden Teil als $\frac{a}{b}$, und es ist $b \cdot \frac{a}{b} = a$ und $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

Dabei darf b größer, kleiner oder gleich a sein, keine von beiden Zahlen braucht ein Vielfaches der anderen zu sein, beide können positiv, beide negativ, beide können verschiedenen Vorzeichens sein.

Man bezeichnet $\frac{1}{b}$ als die umgekehrte Größe von b und ebenso b als die umgekehrte Größe von $\frac{1}{b}$. (Man sagt auch umgekehrter Wert.)

43) Da nun $a \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ist, so bedeutet die Multiplikation mit $\frac{1}{b}$ dasselbe, wie die Division durch b. Da ferner $b \frac{1}{b} = 1$, also $cb \frac{1}{b} = c$ ist, so folgt nach den früheren Formeln $bc = \frac{c}{\left(\frac{1}{b}\right)}$. Ist

aber $\frac{c}{\left(\frac{1}{b}\right)} = c \cdot b$, so ist die Division durch $\frac{1}{b}$ dasselbe, wie die Multiplikation mit b. Ebenso ist die Multiplikation mit $\frac{a}{b}$ dasselbe, wie die Multiplikation mit a und die Division durch b; die Division durch $\frac{a}{b}$ dasselbe, wie die Division durch a und die Multiplikation mit b.

Man nennt $\frac{a}{b}$ eine gebrochene Zahl oder einen Bruch, a seinen Zähler, b seinen Nenner. Das Multiplizieren und Dividieren mit Brüchen bezw. durch Brüche läßt sich nach den obigen Festsetzungen auf das Multiplizieren und Dividieren mit ganzen Zahlen bezw. durch solche zurückführen, also treten keine neuen Formeln auf. Der Bruch ist ein Quotient, nur ist jetzt die frühere Beschränkung weggefallen, daß a ein Vielfaches von b sein soll; auch dürfen negative Zahlen auftreten. Mit Brüchen wird also ebenso gerechnet, wie mit Quotienten, auch kann man sie, wie diese, erweitern und kürzen.

44) Auch das Addieren und Subtrahieren der Quotienten läßt sich auf die Brüche übertragen. Betrachtet man nämlich z. B. $\frac{1}{8}$ als eine neue Einheit, so ist $3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$, ebenso $2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$, sodaß das Vertauschungsgesetz gilt; ebenso folgt aus $5 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{8}$, daß $5 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} = 2 \cdot \frac{1}{8}$ ist. Allgemein: $a\frac{1}{b} + c\frac{1}{b} = (a+c)\frac{1}{b} = c\frac{1}{b} + a\frac{1}{b}$; aus $a\frac{1}{b} - c\frac{1}{b} = (a-c)\frac{1}{b}$ folgt, daß $a\frac{1}{b} - (a-c)\frac{1}{b} = c\frac{1}{b}$.

Haben die Brüche verschiedene Nenner, so muß man, um das Addieren zu ermöglichen, eine neue Einheit suchen, den umgekehrten Wert des Hauptnenners. Dies geschieht, wie bei den früheren Quotienten, mit Hülfe der geeigneten Erweiterung.

So ist z. B.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4+3}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12},$$

allgemein also

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{b} \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{7}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{7 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{14+15}{21} = \frac{29}{21},$$

und allgemein

$$\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{b}{b}\frac{c}{a} + \frac{a}{a}\frac{d}{b} = \frac{bc+ad}{ab}.$$

45) Haben die Nenner gemeinschaftliche Faktoren, so braucht man als gemeinschaftlichen Nenner (als Hauptnenner) für die Addition nicht das Produkt der Einzelnenner zu nehmen, sondern man kann Vereinfachungen einführen. Z. B.

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 6} = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 6} = \frac{3+2}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{5}{36}.$$

Allgemein:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} = \frac{c}{c} \cdot \frac{1}{ab} + \frac{b}{b} \cdot \frac{1}{ac} = \frac{c+b}{abc}$$

oder:

$$\frac{1}{a^2bc} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{ac^3} = \frac{c^2}{c^2}\,\frac{1}{a^2bc} + \frac{ac^2}{ac^2}\,\frac{1}{abc} + \frac{ab}{ab}\,\frac{1}{ac^3}$$

$$= \frac{c^2 + ac^2 + ab}{a^2bc^3}.$$

Der kleinste Hauptnenner wird also gefunden, indem man jeden Nenner in seine Grundfaktoren (bei Zahlen die sogenannten Primfaktoren) zerlegt und jeden der letzteren so oft als Faktor hinschreibt, als er am häufigsten vorkommt. Das Produkt der Zahlen gibt dann den Hauptnenner. [Primzahlen sind solche ganze Zahlen, die durch keine ganze Zahl (von 1 und der Zahl selbst abgesehen) ohne Rest teilbar sind.]

Zahlenbeispiel. $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 18 &= 2 \cdot \underline{3 \cdot 3} \\ 15 &= 3 \cdot \underline{5} \\ 20 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ 8 &= \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \end{aligned}$$

Durch Unterstreichen ist angezeigt, wo der betreffende Primfaktor am häufigsten vorkommt.

Hauptnenner $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360.$

Summe der Brüche $= \frac{30}{12 \cdot 30} + \frac{20}{18 \cdot 20} + \frac{24}{15 \cdot 24} + \frac{18}{18 \cdot 20} + \frac{45}{8 \cdot 45} = \frac{137}{360}.$

Ebenso ist es, wenn die Zähler andere Zahlen, als 1 sind.

46) **Beispiele.**

$$\frac{c}{a+b} + \frac{d}{a-b} = \frac{c(a-b) + d(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{c(a-b) + d(a+b)}{a^2 - b^2};$$

$$\frac{c}{a+b} + \frac{d}{a^2 - b^2} = \frac{c}{a+b} + \frac{d}{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{a-b}{a-b} \cdot \frac{c}{a+b} + \frac{d}{(a+b)(a-b)} = \frac{c(a-b) + d}{a^2 - b^2};$$

$$\frac{c}{a^2+2ab+b^2}+\frac{d}{a^2-b^2}=\frac{c}{(a+b)(a+b)}+\frac{d}{(a+b)(a-b)}$$
$$=\frac{c(a-b)+d(a+b)}{(a+b)(a^2-b^2)}=\frac{c(a-b)+d(a+b)}{a^3+a^2b-ab^2-b^3}.$$

Somit läßt sich das Addieren und Subtrahieren mit Brüchen genau so durchführen, wie bei den früher besprochenen Quotienten. Die Formeln des vorigen Kapitels gelten demnach auch für gebrochene, und, wie vorher gezeigt, auch für negative Zahlen.

[Stelle die für Quotienten gefundenen Rechnungsregeln für Brüche zusammen, und sage statt Dividend und Divisor jetzt Zähler bezw. Nenner.]

47) Divisionsübungen. Das Divisionsschema

$$\begin{array}{l}
2784:12=232\\
24\\
\underline{\;\;38}\\
\;\;36\\
\underline{\;\;\;\;24}\\
\;\;\;\;24
\end{array}$$

ist eigentlich aus folgendem hervorgegangen*):

$$\begin{array}{l}
2\cdot10^3+7\cdot10^2+8\cdot10+4:(10+2)=2\cdot10^2+3\cdot10+2\\
\underline{2\cdot10^3+4\cdot10^2}\\
\qquad\quad 3\cdot10^2+8\cdot10\\
\qquad\quad \underline{3\cdot10^2+6\cdot10}\\
\qquad\qquad\qquad 2\cdot10+4\\
\qquad\qquad\qquad \underline{2\cdot10+4}
\end{array}$$

Setzt man a statt 10, so erhält man als Beispiel für das allgemeinere Schema:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & 2a^3+7a^2+8a+4:(a+2)=2a^2+3a+2\\
& \underline{2a^3+4a^2}\\
& \qquad 3a^2+8a\\
& \qquad \underline{3a^2+6a}\\
& \qquad\qquad 2a+4\\
& \qquad\qquad \underline{2a+4}
\end{array}$$

Führe dieselbe Aufgabe durch in der umgekehrten Anordnung:

$$4+8a+7a^2+2a^3:(2+a).$$

*) Die den Dividendus zusammenfassende Klammer soll von jetzt ab weggelassen werden.

Wesentlich ist dabei die Reihenfolge der Glieder des Dividendus und des Divisors, indem a^3, a^2, a und das Glied ohne a aufeinander folgen, genau so, wie vorher 10^3, 10^2, 10 u. s. w. Bei jeder Aufgabe muß also rechts und links zunächst gleichmäßig geordnet werden. So ist z. B.

b) $8a^3 + 18a^2b + 19ab^2 + 15b^3 : (2a + 3b) = 4a^2 + 3ab + 5b^2.$

$$\begin{array}{l}
8a^3 + 12a^2b \\
\hline
\qquad 6a^2b + 19ab^2 \\
\qquad 6a^2b + 9ab^2 \\
\hline
\qquad\qquad 10ab^2 + 15b^3 \\
\qquad\qquad 10ab^2 + 15b^3
\end{array}$$

Sind Brüche dabei, so folgen z. B. aufeinander a^2, a, Glied ohne a, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ u. s. w., z. B.

$$\frac{2}{9}a^4 - \frac{8}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25b^4} : \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2}{5b^2}\right) = \frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{5b^2}$$

$$\begin{array}{l}
\frac{2}{9}a^4 - \frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2} \\
\hline
\qquad - \frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25b^4} \\
\qquad - \frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25b^4}
\end{array}$$

Divisionen brauchen nicht immer aufzugehen. In den meisten Fällen bleibt ein Rest übrig. So ist z. B. $\frac{12}{7} = 1 + \frac{5}{7}$, d. h. die Division von 12 durch 7 läßt den Rest 5 übrig, der noch besonders durch 7 zu teilen ist, was neben der ganzen Zahl einen echten Bruch gibt.

Ähnlich bleibt in der Arithmetik häufig ein Restglied, z. B.

$$\begin{array}{l}
2a + 3b : (a + b) = 2 + \frac{b}{a+b} \\
2a + 2b \\
\hline
\quad \text{Rest: } b
\end{array}$$

Probe: $2 + \frac{b}{a+b} = \frac{2a + 2b + b}{a + b} = \frac{2a + 3b}{a + b}.$

48) Bemerkung über die Primzahlen.

In Abschnitt 45 wurde von den Primfaktoren gesprochen, d. h. von den Primzahlen*), in deren Produkt sich jede Zahl zerlegen läßt; z. B. $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Man findet die Reihe der Primzahlen beliebig weit durch das sogenannte

*) Dieser Abschnitt ist im Rechenunterrichte zu behandeln, wo solcher auf IIIb gegeben wird.

„Sieb des Eratosthenes". Schreibt man nämlich die Zahlenreihe hin, und streicht man von 2 ab jede zweite Zahl, so erhält man die Primzahlen bis zur Stelle $3 \cdot 3 = 9$. Streicht man darauf von 3 ab die dritten Zahlen, so erhält man die Primzahlen bis zu $5 \cdot 5 = 25$. Streichung der fünften Zahlen giebt die Primzahlen bis $7 \cdot 7 = 49$ u. s. w. Also:

1, 2, 3, (4), 5, (6), 7, (8), (9), (10), 11, (12), 13, (14)
(15), (16), 17, (18), 19, (20), (21), (22), 23, (24), (25), (26)
(27), (28), 29, (30), 31, (32), (33), (34), (35), (36), 37, (38)
(39), (40), 41, (42), 43, (44), (45), (46), 47, (48), (49) usw.

Die hier stehengebliebenen Zahlen sind die absoluten Primzahlen bis 47 (bezw. 49). Viele Zahlen werden dabei mehrfach durchstrichen. Aus der Anzahl der Striche erkennt man die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren, die jede Nicht-Primzahl enthält. Ferner ergibt sich, daß jede Zahl sich nur auf eine Art in Primfaktoren zerlegen läßt.

Unter relativen Primzahlen versteht man solche Zahlen, die, ohne absolute Primzahlen zu sein, keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. So sind z. B. 12 und 35 relative Primzahlen, dagegen sind 12 und 15 keine solchen.

[48b) In jeder ganzen Quadratzahl ist jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorhanden, z. B. $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$.

Ist der Quotient zweier ganzer Quadratzahlen eine ganze Zahl, so ist diese eine Quadratzahl.

Beispiel. $\frac{15^2}{3^2} = \frac{225}{9} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = 5 \cdot 5 = 25.$

Die beim Heben übrig bleibenden Primfaktoren müssen nämlich doppelt oder in gerader Anzahl vorhanden sein.

Ist der Quotient zweier ganzen Quadratzahlen keine ganze Quadratzahl, so ist er nicht eine andere ganze Zahl sondern das Quadrat eines Bruches.

Beispiel. $\frac{100}{36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2.$

Beim Heben bleibt nämlich nur noch ein Quotient relativer Primzahlen, deren jede doppelt oder in gerader Anzahl vorhanden ist. Hiervon wird später eine wichtige Anwendung gemacht.

(Wäre $\frac{100}{36}$ gleich einer ganzen Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, so ließe sich $100 = 36n$ auf zwei verschiedene Arten in Primfaktoren zerlegen, was nach obigem unmöglich ist.)

48c) Um zu erkennen, ob zwei größere Zahlen relative Primzahlen sind, oder ob sie einen größeren gemeinschaftlichen Teiler als 1 haben, könnte man mit allen Primzahlen, die in der kleineren aufgehen, erproben, ob sie auch Teiler der größeren Zahl sind. Schneller kommt man auf folgendem Wege zum Ziele.

Aufgabe. Den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier Zahlen zu finden.

Auflösung an einem Beispiele. Handelt es sich z. B. darum, den Bruch $\frac{2737}{3689}$ sofort mit der größten möglichen Zahl zu kürzen, so verfahre man nach folgendem Divisionsschema:

1) $3689 : 2737 = 1 + \frac{952}{2737}$, also $3689 = 1 \cdot 2737 + 952$,

2) $2737 : 952 = 2 + \frac{833}{952}$, also $2737 = 2 \cdot 952 + 833$,

3) $952 : 833 = 1 + \frac{119}{833}$, also $952 = 1 \cdot 833 + 119$,

4) $833 : \mathbf{119} = 7$, also $833 = 7 \cdot 119$.

Es wird behauptet, der letzte Divisor 119, bei dem kein Rest blieb, sei der größte gemeinschaftliche Teiler.

Beweis am Beispiele. 119 geht in 833 ohne Rest auf, folglich auch in

$$1 \cdot 833 + 119 = 952,$$

folglich auch in

$$2 \cdot 952 + 833 = 2737,$$

folglich auch in

$$1 \cdot 2737 + 952 = 3689.$$

Demnach ist

$$\frac{2737}{3689} = \frac{23}{31}.$$

Bemerkung. Man hat also die größere der beiden gegebenen Zahlen durch die kleinere zu teilen, die letztere durch den dabei bleibenden Rest, diesen durch den Rest der letzteren Division u. s. w. Geht schließlich eine Division ohne Rest auf, so ist der letzte Divisor der gesuchte Teiler. (Er kann auch 1 sein, dann sind die gegebenen Zahlen relative Primzahlen.)

Daß ein größerer Teiler nicht möglich ist, ergibt sich folgendermaßen: Angenommen, die größere Zahl n ginge in 3689 und 2737 auf, so müßte n nach der Folgerung bei 1) auch im Reste 952 aufgehen, folglich nach 2) auch im Reste 833, nach 3) auch im Reste 119. Dies ist aber unmöglich, wenn $n > 119$ ist.]

Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

Die Reihenfolge der Glieder ist bei der Addition gleichgültig.

$$a + b = b + a; \qquad a - b = -b + a.$$

Dasselbe gilt von der Multiplikation; $ab = ba$.

Aus $a + b = c$ folgt $b = c - a$ und $a = c - b$.

Aus $a - b = c$ folgt $-b = c - a$ und $a = b + c$.

$$a + (b - c) = a + b - c; \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

$$(a + b)c = ac + bc; \quad (a - b)c = ac - bc.$$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd.$$

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

$$+ \cdot + = + \qquad + : + = +$$

$$- \cdot + = - \qquad - : + = -$$

$$+ \cdot - = - \qquad + : - = -$$

$$- \cdot - = + \qquad - : - = +$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Aus $\frac{a}{b} = c$ folgt $a = bc$ und $b = \frac{a}{c}\cdot$

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b}c = \frac{c}{b}a; \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$$

III. Dezimalbrüche.*)

49) Es ist $\frac{271}{100} = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100}$, oder in bekannter Schreibweise $= 2{,}71$.

*) Dieses Kapitel, dessen schon in der Geometrie gedacht wurde, ist mög-