Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Die vier Grundrechnungen in gewöhnlichen Zahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

Zweite Abteilung.

Arithmetik.

A. Lehraufgabe der Untertertia.

I. Das Gebiet der gewöhnlichen (absoluten und ganzen) Zahlen.

1) Um angeben zu können, wie oft gleichartige Gegenstände vorhanden sind, erfand der Mensch die Zahl. Durch das Abzählen der Gegenstände entstand die Zahlenreihe. Die Reihenfolge, in der man die Gegenstände zählte, ergab sich als gleichgültig. Das Bedürfnis nach leichter Übersichtlichkeit veranlaßte die Zusammenstellung der Zahlen zu geordneten Gruppen. Wahrscheinlich war der Umstand, daß der Mensch 10 Finger*) hat, an denen er abzuzählen und zu rechnen begann, der Grund dafür, daß die Gruppierung zu je 10, das Dezimalsystem, die Alleinherrschaft eroberte. [Auch andere Systeme waren in Gebrauch und haben auch, wie das Duodezimalsystem, wissenschaftliche Bearbeitung gefunden.]

2) Dieses System erforderte also 10 Zeichen oder Ziffern. Dabei erschien es aber zweckmäßig, auch für das Nichtvorhandensein (kein mal vorhanden) ein Wort und ein entsprechendes Zeichen festzustellen, die Zahl Null oder 0, und so zählte man die erste Gruppe nicht von 1 bis 10, sondern von 0 bis 9. Dies wurden die einstelligen Zahlen. Von 10 bis 99 folgten die zweistelligen Zahlen, von 100 bis 999 die dreistelligen, usw.

Setzte man nun fest, daß die vor die Zahl geschriebene Null die Zahl nicht ändert, so konnte man statt 7 auch 07 oder 007 schreiben, diese Zahl also als ein-, zwei-, dreistellig usw. auffassen, und so

*) Man denke auch an die Zehen (10) an den Füßen des Menschen.

ergab sich, daß man die Anzahl der zweistelligen Zahlen als 100, die der dreistelligen als 1000 usw. betrachten durfte. [Diese Einfachheit war z. B. bei der Schreibweise der römischen Zahlen nicht vorhanden, denn dort erschien XIII als vierstellig, XXI als dreistellig, C als einstellig usw., sodaß ein einfaches Rechenschema gar nicht möglich war und sogar das Lesen größerer Zahlen Schwierigkeiten machte.]

3) Jede Zahl der Zahlenreihe ist größer ($>$), als alle vorhergehenden und kleiner ($<$), als alle folgenden, und zwar ist sie um die **Einheit** 1 größer bezw. kleiner, als die beiden Nachbarzahlen.

Als Einheiten galten zunächst die gezählten gleichartigen Gegenstände. So spricht man z. B. von 10 Bäumen, obwohl unter diesen recht auffallende Verschiedenheiten bemerkt werden können. Besser stimmen schon die aus dem Bedürfnis genaueren Vergleichens und Messens hervorgegangenen **Maßeinheiten** überein. So können z. B. zwei Metermaßstäbe in ihrer Länge oder zwei Kilogrammstücke in ihrem Gewichte so genau übereinstimmen, daß man mit gewöhnlichen Hilfsmitteln keinen Unterschied zwischen ihnen wahrnimmt. Wohl aber werden feinere Meß- bezw. Wägungsmethoden Unterschiede nachweisen. Zeigt doch z. B. die Physik, daß sogar **derselbe** Meterstab bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Länge hat, und daß **dasselbe** Kilogrammstück an verschiedenen Orten und in verschiedenen Höhenlagen verschiedenes Gewicht zeigt. Dazu kommt auch noch die allmähliche Abnutzung der Maßstäbe und Gewichte.

Die angewandte Mathematik sieht von allen Unterschieden zufälliger Art ab und kennt nur **genau übereinstimmende** Maßeinheiten. Die **reine Zahlenlehre** aber beschäftigt sich nicht mit Maßeinheiten dieser oder jener Art, sondern nur mit ihrer **Anzahl**. (Benannte Zahlen, unbenannte Zahlen.) Wie die Zahl überhaupt nur etwas Gedachtes, nicht etwas wirklich Vorhandenes ist, so ist auch die **absolute Einheit** der Zahlenwelt, die **Zahleneinheit**, oder die **unbenannte Zahl Eins**, nur etwas Gedachtes. Jede Zahl, z. B. $3 = 1 + 1 + 1$ bedeutet eine Mehrheit solcher **untereinander absolut gleichen** Zahleneinheiten. Erst durch das vollständige Entfernen aller Unterschiede der gezählten Einheiten entsteht die Möglichkeit, über die Idealwelt der Zahlen bestimmte Aussagen von untrüglicher Sicherheit zu machen.

4) Um gewisse Aussagen nicht nur für einzelne bestimmte Zahlen, sondern für jede beliebige Zahl machen zu können, führt man als neue Zeichen Buchstaben ein, z. B. a, b, c usw., die man als

allgemeine Zahlen betrachtet, da jede besondere Zahl für sie gesetzt werden kann. [Allgemein sind diese Zahlen auch in dem Sinne, als sie neben dem Dezimalsystem auch andere Systeme umfassen können.] Vorläufig beschränken wir uns auf die absoluten Zahlen, die eine Mehrheit von Einheiten darstellen, die also ganze, nicht gebrochene Zahlen und, von 0 und 1 abgesehen, sämtlich größer als 1 sind. Man nennt dieses Zahlengebiet auch das der ganzen, positiven Zahlen. Die Bedeutung der Worte absolut und positiv soll erst später erläutert werden.

5) Das Rechnen mit unbenannten Zahlen wird insoweit als bekannt vorausgesetzt, als es sich um die vier Grundrechnungsarten (vier Spezies) handelt, um das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Über jede dieser Rechnungsarten sollen allgemeine Bemerkungen gemacht und dabei soll das Rechnen mit bestimmten Zahlen auf das Rechnen mit allgemeinen Zahlen übertragen werden.

6) Unter **Addieren** versteht man die Kunst, anzugeben, wie viele Einheiten mehrere Zahlen zusammengenommen enthalten. Dadurch erhält man die Summe der einzelnen Zahlen. Die letzteren heißen Glieder der Summe oder Summanden (d. h. zusammenzuzählende Zahlen).

So ist z. B. $2 + 5 = 7$, und zugleich $5 + 2 = 7$. Allgemein also gilt, wie sich aus der Gleichgültigkeit der Reihenfolge beim Abzählen erklärt, die Formel

$$a + b = b + a,$$

oder bei einer größeren Anzahl von Gliedern:

$$a + b + c + \cdots = a + c + b + \cdots = b + c + a + \cdots \text{ usw.}$$

In Worten: Eine Summe ändert ihren Wert nicht, wenn man ihre Glieder beliebig umstellt.

7) Ist die Anzahl der Glieder eine größere, so kann man zunächst einzelne Gruppen summieren und dann die Summe der Einzelsummen bilden. Deutet man die Gruppen durch Klammern an, so ist z. B.

$$5 + 2 + 9 + 1 = (5 + 2) + (9 + 1) = 7 + 10 = 17.$$

Allgemeiner ist z. B.

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= (a + b) + (c + d + e) \\ &= (a + b + d) + (c + e) = \text{usw.} \end{aligned}$$

Die Gruppierung kann eine ganz beliebige sein. So ist z. B.

$$1521 + 342 + 13 + 2 = 1000 + (500 + 300) + (20 + 40 + 10) + (1 + 2 + 3 + 2) = 1000 + 800 + 70 + 8 = 1878.$$

Hier wurden also die Einer, die Zehner u. s. w. in je einer Gruppe vereinigt. So entstand das gebräuchliche Additionsschema, für unser Beispiel also

$$\begin{array}{r} 1521 \\ 342 \\ 13 \\ 2 \\ \hline 1878 \end{array}$$

[Bei der römischen Schreibweise der Zahlen würde ein so einfaches Schema nicht möglich sein.]

8) Unter **Subtrahieren** versteht man die Kunst, anzugeben wie viele Einheiten übrig bleiben, wenn man von einer zunächst größeren Anzahl von Einheiten eine (kleinere) Anzahl wegnimmt.

So ist z. B. $7 - 5 = 2$. Hier heißt 7 der Minuendus (die Zahl, die verkleinert werden soll), 5 der Subtrahendus (die Zahl, die abgezogen werden soll), 2 heißt der Rest, oder die Differenz (der Unterschied) der beiden Zahlen. Minuend und Subtrahend dürfen nicht umgestellt werden, jedoch können Subtrahend und Differenz ihre Stellen vertauschen. So ist z. B. $7 - 5 = 2$ und zugleich $7 - 2 = 5$. Allgemein:

Aus $a - b = c$ folgt $a - c = b$.

9) Addiert man zur Differenz $(7 - 5)$ den Subtrahend 5, so erhält man die Anfangszahl 7. Also:

Differenz + Subtrahend = Minuend,

oder:

$$(a - b) + b = a.$$

Ebenso ist

$$(a + b) - b = a.$$

Also: Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich gegenseitig auf.

Aus jeder der Gleichungen

$$a + b = c, \quad c - a = b, \quad c - b = a$$

folgen die beiden anderen. Oder:

aus $a + b = c$ folgt $b = c - a$ und $a = c - b$.

10) Hat man von einer Zahl mehrere andere abzuziehen, so kann dies Schritt für Schritt geschehen, man kann aber auch die Summe der abzuziehenden Zahlen bilden und diese Summe von der erstgenannten Zahl abziehen. So ist z. B.

$12 - 5 - 3 = 7 - 3 = 4$, aber auch $= 12 - (5 + 3) = 12 - 8 = 4$.

Folglich ist allgemein:

$$a - b - c = a - (b + c).$$

Umgekehrt ergibt sich der Satz: Man subtrahiert eine Summe von einer Zahl, indem man die einzelnen Glieder subtrahiert.

11) Da das Summieren gruppenweise geschehen kann, so ist auch gruppenweises Abziehen gestattet, z. B.

$$\begin{aligned} 2978 - 1236 &= (2000 + 900 + 70 + 8) - (1000 + 200 + 30 + 6) \\ &= (2000 - 1000) + (900 - 200) + (70 - 30) + (8 - 6) \\ &= 1000 + 700 + 40 + 2 = 1742. \end{aligned}$$

Aus dieser Gruppierung der Einer, Zehner u. s. w. entspringt das bekannte Subtraktionsschema, bei unserem Beispiele also:

$$\begin{array}{r} 2978 \\ \underline{1236} \\ 1742 \end{array}$$

[Auch dieses Schema ist bei der römischen Schreibweise nicht möglich.]

Aus der Willkürlichkeit der Gruppierung folgt:

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Also: Man addiert eine Differenz zu einer Zahl, indem man den Minuendus addiert und den Subtrahendus subtrahiert. Z. B.

$$8 + (5 - 3) = (8 + 5) - 3 = 13 - 3 = 10.$$

12) Dagegen ist $8 - (5 - 3) = 8 - 2 = 6$ und zugleich $8 - (5 - 3) = (8 - 5) + 3 = 3 + 3 = 6$. Soll nämlich von 8 die Differenz $(5 - 3)$ abgezogen werden, und zieht man zunächst 5 ab, so hat man 3 zuviel abgezogen und muß, um das richtige Resultat zu erhalten, 3 addieren. Allgemein folgt:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Also: Man subtrahiert eine Differenz, indem man den Minuendus subtrahiert und den Subtrahendus addiert.

13) Einen zweigliedrigen Ausdruck nennt man ein Binom, einen dreigliedrigen ein Trinom, einen mehrgliedrigen Ausdruck überhaupt ein Polynom. Aus obigem ergibt sich für das Rechnen mit Polynomen folgendes: Es ist

$$a + (b + c - d + e - f - g) = a + b + c - d + e - f - g,$$

dagegen:

$$a - (b + c - d + e - f - g) = a - b - c + d - e + f + g.$$

Demnach kann bei der zu addierenden Klammer das Klammerzeichen einfach weggelassen werden; will man dagegen die abzuziehende Klammer entfernen, so sind alle Additionsglieder der Klammer zu subtrahieren, alle Subtraktionsglieder zu addieren. (Umkehrung der Vorzeichen.)

Dieses Entfernen des Klammerzeichens bezeichnet man als das Auflösen der Klammern.

14) Im Innern der Klammer können statt der Zahlen auch Klammern stehen. Dann giebt man, um Verwechselungen vorzubeugen, den Klammern verschiedene Gestalt, z. B. ( ) oder [ ] oder { }. Beim Auflösen kann man erst die äußeren oder erst die inneren Klammern entfernen. So ist z. B.

$$\begin{aligned} & a - \{b - [c + (d - e) - (f - g - h)] + i\} \\ &= a - \{b - [c + d - e - f + g + h] + i\} \\ &= a - \{b - c - d + e + f - g - h + i\} \\ &= a - b + c + d - e - f + g + h - i, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &= a - b + [c + (d - e) - (f - g - h)] - i \\ &= a - b + c + (d - e) - (f - g - h) - i \\ &= a - b + c + d - e - f + g + h - i. \end{aligned}$$

15) Unter **Multiplizieren** versteht man die Kunst, die Summe mehrerer Summanden von gleicher Größe in einfacher Weise zu finden.

Handelt es sich z. B. um $7 + 7 + 7 + 7 = 28$, so schreibt man einfacher $4 \cdot 7 = 28$. Der mehrfach wiederholte Summand heißt der Multiplikand (die Zahl, welche vervielfältigt werden soll), die Anzahl der gleichen Summanden heißt der Multiplikator (die vervielfältigende Zahl). Das Resultat der Rechnung heißt **Produkt**; Multiplikand und Multiplikator heißen **Faktoren** des Produktes.

Dabei beobachtet man z. B., daß $4 \cdot 3 = 12$ und auch $3 \cdot 4 = 12$ ist.

• • • • In der That ist es gleichgültig, ob man die nebenstehenden
• • • • zwölf Punkte als drei Horizontalreihen zu je 4 oder als
• • • • vier Vertikalreihen zu je 3 betrachtet, was sich wiederum aus der Gleichgültigkeit der Reihenfolge beim Abzählen und Gruppieren erklärt. Allgemein ist also

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

d. h. **Multiplikator und Multiplikand können miteinander vertauscht werden, ohne daß das Produkt sich ändert.**

Auf die Stellung der ersteren soll daher nicht mehr geachtet werden. Während zwischen zwei miteinander zu multiplizierenden Zahlen gewöhnlicher Art ein Punkt als Zeichen der Multiplikation stehen muß, kann er bei Buchstaben entbehrt werden, so daß z. B. ab dasselbe bedeutet wie $a \cdot b$. — Es ist $a \cdot 1 = a$, der Faktor 1 kann also weggelassen werden. Ferner ist $a \cdot 0 = 0$.

16) Sind mehrere Zahlen miteinander zu multiplizieren, so ist die Reihenfolge der Multiplikation gleichgültig, auch kann man dabei Klammern anwenden oder vorhandene Klammern weglassen. So ist z. B.

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = \text{usw.}$$

Allgemein also:

$$abc = (ab)c = a(bc) = acb = bac = bca = cab = cba,$$

d. h. **der Wert eines Produktes ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Man multipliziert ein Produkt mit einer Zahl, indem man einen seiner Faktoren mit ihr multipliziert; man multipliziert mit einem Produkt, indem man mit seinen einzelnen Faktoren multipliziert.**

17) Auch eine Summe kann als Faktor auftreten. Z. B. ist

$$3\,(7 + 2) = (7 + 2) + (7 + 2) + (7 + 2) = 3 \cdot 9 = 27,$$

zugleich aber

$$3\,(7 + 2) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 21 + 6 = 27.$$

Allgemeiner ist

$$\begin{aligned} 3\,(a + b) &= (a + b) + (a + b) + (a + b) \\ &= (a + a + a) + (b + b + b) = 3a + 3b \end{aligned}$$

und ganz allgemein

$$(a + b)c = c(a + b) = ca + cb = ac + bc.$$

Folglich:

a) Man multipliziert eine Summe mit einer Zahl, indem man die einzelnen Glieder mit ihr multipliziert (und die entstandenen Produkte addiert).

b) Man multipliziert eine Zahl mit einer Summe, indem man sie mit den einzelnen Gliedern der Summe multipliziert (und die entstehenden Produkte addiert).

Aus $ac + bc = c(a + b)$ folgt noch:

c) Kommt in einer Summe von Produkten derselbe Faktor in jedem Gliede vor, so kann man ihn absondern; d. h. man befreit jedes Glied von dem Faktor und multipliziert mit diesem die Summe der bleibenden Zahlen. (Absondern des gemeinschaftlichen Faktors.)

Beispiel zu a):

$$\begin{aligned} 2312 \cdot 3 &= (2000 + 300 + 10 + 2)\,3 \\ &= 2000 \cdot 3 + 300 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \\ &= 6000 + 900 + 30 + 6 = 6936. \end{aligned}$$

Darauf beruht das bekannte Multiplikationsschema:

$$\begin{array}{r} 2312 \\ 3 \\ \hline 6936 \end{array}$$

Beispiel zu c):

$$\begin{aligned} 17 \cdot 122 + 17 \cdot 340 + 17 \cdot 538 &= 17\,(122 + 340 + 538) \\ &= 17 \cdot 1000 = 17000. \end{aligned}$$

18) Aber auch beide Faktoren können Summen sein. Dann ist z. B.

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd,$$

oder auch

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

was dasselbe ist. — Ähnlich ist es mit mehrgliedrigen Summen; z. B.

$$\begin{aligned} 123 \cdot 21 &= (100 + 20 + 3)(20 + 1) \\ &= (100 + 20 + 3)\,20 + (100 + 20 + 3)\,1 \\ &= (2000 + 400 + 60) + (100 + 20 + 3), \end{aligned}$$

oder (wenn man die mit gleichviel Nullen behafteten Glieder addiert)

$$= 2000 + 500 + 80 + 3 = 2583.$$

Daher kommt das Multiplikationsschema für dieses Beispiel:

$$\begin{array}{r} 123 \\ 21 \\ \hline 123 \\ 246 \\ \hline 2583 \end{array}$$

19) Ist dagegen ein Faktor des Produktes eine Differenz, so wird z. B. folgendermaßen verfahren:

$$(a - b) \cdot 3 = (a - b) + (a - b) + (a - b)$$
$$= (a + a + a) - (b + b + b) = 3a - 3b.$$

Durch Umstellung folgt ebenso

$$3(a - b) = 3a - 3b.$$

Folglich:

a) Man multipliziert eine Differenz mit einer Zahl, indem man den Minuendus und den Subtrahendus für sich mit ihr multipliziert (und vom ersteren Produkte das letztere abzieht).

b) Man multipliziert eine Zahl mit einer Differenz, indem man die Zahl erst mit dem Minuendus, dann mit dem Subtrahendus multipliziert (und vom ersteren Produkte das letztere abzieht). Z. B.

$(50-38)3 = 50 \cdot 3 - 38 \cdot 3 = 150 - 114 = 36$. Probe: $12 \cdot 3 = 36$.

20) Ist einer der Faktoren eine Summe, der andere eine Differenz, so ist nach 17) und 19)

$$(a + b)(c - d) = (a + b)\,c - (a + b)\,d$$
$$= ac + bc - (ad + bd) = ac + bc - ad - bd.$$

Beispiel. $(5 + 2)(7 - 3) = 5 \cdot 7 + 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 35 + 14 - 15 - 6 = 28$. In der That ist $7 \cdot 4 = 28$.

21) Sind beide Faktoren Differenzen, so wird

$$(a - b)(c - d) = (a - b)\,c - (a - b)\,d = ac - bc - (ad - bd)$$
$$= ac - bc - ad + bd.$$

Beispiel. $(5 - 2)(7 - 3) = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 35 - 14 - 15 + 6 = 12$. In der That ist $3 \cdot 4 = 12$.

22) Einige Sonderfälle:

$$(a+b)(a+b) = aa + ba + ab + bb = aa + 2ab + bb.$$

Abgekürzt schreibt man a^2 statt aa (a^2 lies: „a-Quadrat" oder „a hoch 2"). Dies gibt die Formel:

a) $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

in Worten: Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt aus beiden Zahlen. (Vergl. Geometrie Abschnitt 256a.)

Beispiel. $1004^2 = (1000+4)^2 = 1000^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 4 + 4^2$
$= 1\,000\,000 + 8000 + 16 = 1\,008\,016.$

Ebenso ist

b) $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

in Worten: Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt beider Zahlen. (Vergl. Geometrie Abschnitt 256b.)

Beispiel. $997^2 = (1000-3)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 3 + 3^2$
$= 1\,000\,000 - 6000 + 9 = 994\,009.$

c) $$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Kurz ausgedrückt: Summe mal Differenz gleich der Differenz der Quadrate.

Beispiel. $1003 \cdot 997 = (1000+3)(1000-3) = 1000^2 - 3^2$
$= 1\,000\,000 - 9 = 999\,991.$

Beispiel. $8324^2 - 1676^2 = (8324+1676)(8324-1676)$
$= 10\,000 \cdot 6648 = 66\,480\,000.$

Beispiel.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab,$$

z. B. $1007^2 - 993^2 = (1000+7)^2 - (1000-7)^2$
$= 4 \cdot 1000 \cdot 7 = 28\,000.$

Beispiel.

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + (a^2 - 2ab + b^2) = 2(a^2+b^2),$$

z. B. $821^2 + 779^2 = (800+21)^2 + (800-21)^2 = 2(800^2 + 21^2)$
$= 2(640\,000 + 441) = 2 \cdot 640\,441 = 1\,280\,882.$

Nach a) wird

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

($a^3 = aaa$, lies „a hoch 3", oder „a zur dritten".) Also:

d) $$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

z. B. $1004^3 = (1000+4)^3 = 1000^3 + 3 \cdot 1000^2 \cdot 4 + 3 \cdot 1000 \cdot 4^2 + 4^3$

$$\begin{array}{r} = 1\,000\,000\,000 \\ 12\,000\,000 \\ 48\,000 \\ 64 \\ \hline 1\,012\,048\,064 \end{array}$$

Ebenso ergibt sich

e) $$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

z. B. $996^3 = (1000-4)^3 = 1000^3 - 3 \cdot 1000^2 \cdot 4 + 3 \cdot 1000 \cdot 4^2 - 4^3$
$= 1\,000\,000\,000 - 12\,000\,000 + 48\,000 - 64 = 998\,047\,936.$

Beachte die abwechselnden Vorzeichen.

Beispiel. $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2(a^3 + 3ab^2) = 2(aa^2 + 3ab^2)$
$= 2a(a^2 + 3b^2).$

Beispiel. $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2(3a^2b + b^3) = 2b(3a^2 + b^2).$

Bilde selbst Zahlenbeispiele zu den beiden letzteren Formeln, um die darin liegende Vereinfachung des Rechnens kennen zu lernen.

f) $(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab$
$+ 2ac + 2ad + 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de.$

In Worten: Das Quadrat einer Summe ist gleich der Summe der Einzelquadrate vermehrt um die Summe der möglichen doppelten Produkte.

Wichtig ist noch folgende Anordnung, bei der schrittweise quadriert wird:

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + (2ab + b^2) + [2(a+b)c + c^2]$$
$$+ [2(a+b+c)d + d^2] + [2(a+b+c+d)e + e^2].$$

Auf dieser Schreibweise, die leicht in Worten auszudrücken ist, beruht das später zu lehrende Ausziehen der Quadratwurzel.

Aufgaben. Zeige, daß:

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$
$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc,$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc,$$

$$(a+b-c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - 6abc,$$

$$(a-b-c)^3 = a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 + 6abc,$$

$$(a^2+ab+b^2)(a-b) = a^3 - b^3,$$

$$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b) = a^4 - b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2),$$

$$(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b) = a^5 - b^5,$$

$$(a^2-ab+b^2)(a+b) = a^3 + b^3,$$

$$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b) = a^4 - b^4,$$

$$(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b) = a^5 + b^5.$$

Setze in einzelne dieser Formeln für die Buchstaben größere Zahlen ein, um auch hier die Erleichterung des Rechnens kennen zu lernen. Man kann für jeden Buchstaben auch eine Klammer einsetzen, z. B. $(2\alpha + 3\beta)$ an Stelle von a u. s. w., und zunächst mit der Klammer wie mit einem Buchstaben rechnen. Erst am Schluß, nach Erledigung aller Vereinfachungen, setzt man den Ausdruck für die Klammer ein und vollendet die Rechnung.

Beispiel.

$$[(2\alpha+3\beta)+(3\gamma+4\delta)]^2 - [(2\alpha+3\beta)-(3\gamma+4\delta)]^2$$
$$= [a+b]^2 - [a-b]^2 = 4ab = 4(2\alpha+3\beta)(3\gamma+4\delta) = ?$$

23) Unter **Dividieren** versteht man die Kunst, diejenige Zahl zu finden, die, mit einer gegebenen Zahl multipliziert, eine andere gegebene Zahl gibt.

Beispiel. Welche Zahl gibt mit 3 multipliziert die Zahl 6?

Auflösung. 2, denn $2 \cdot 3 = 6$, oder $\left(\frac{6}{3}\right) \cdot 3 = 6$. Daher schreibt man $6 : 3 = 2$ oder $\frac{6}{3} = 2$ (lies: 6 durch 3 = 2).

Die gefundene Zahl 2 oder $\frac{6}{3}$ gibt an, wie oft 3 in 6 enthalten ist (wie oft 3 in 6 aufgeht). Aus $2 \cdot 3 = 6$ folgt $3 \cdot 2 = 6$, also ist auch $\frac{6}{2} = 3$, sodaß 2 und 3 in bezug auf ihre Stelle vertauscht werden können; 6 enthält die Zahl 2 dreimal als Teil in sich, dagegen die Zahl 3 nur zweimal.

Allgemein: Welche Zahl gibt, mit b multipliziert, die Zahl a?

Auflösung. Die Zahl $\left(\frac{a}{b}\right)$ oder $(a : b)$; denn $\left(\frac{a}{b}\right) b = a$. Hierbei werde zunächst vorausgesetzt, daß a ein Vielfaches von b ist (daß b in a aufgeht). Setzt man $\frac{a}{b} = c$, so ist $c \cdot b = a$, zugleich aber auch $b \cdot c = a$, folglich auch $b = \frac{a}{c}$. Demnach können b und c in bezug auf ihre Stelle vertauscht werden; b ist in a c-mal, c in a b-mal als Teil enthalten.

In $\frac{a}{b} = c$ nennt man a den Dividendus (die Zahl, die geteilt werden soll), b den Divisor (die teilende Zahl), c oder $\frac{a}{b}$ den Quotienten*) der Zahlen a und b (die Zahl, welche angibt, wie oft b in a enthalten ist).

Aus jeder der Gleichungen

$$\frac{a}{b} = c, \quad a = bc, \quad \frac{a}{c} = b$$

folgen die beiden anderen. In Worten lauten sie:

Quotient = Dividend durch Divisor,
Dividend = Divisor mal Quotient,
Divisor = Dividend durch Quotient.

Divisor und Quotient können vertauscht werden, dagegen kann der Dividend nicht mit einer der anderen Größen in eine Vertauschung eintreten.

Aus $a = a \cdot 1$ folgt $\frac{a}{a} = 1$, d. h. jede Zahl ist in sich selbst ein Mal enthalten. Außerdem folgt $\frac{a}{1} = a$, d. h. eine Zahl bleibt bei der Division durch 1 ungeändert der Divisor 1 darf also weggelassen werden.

Aus der obigen Erklärung $\left(\frac{a}{b}\right) b = a$ folgt: Wird eine Zahl durch eine zweite dividiert und dann mit derselben multipliziert (oder umgekehrt), so bleibt sie ungeändert. Also: Multiplikation mit einer Zahl und Division durch dieselbe Zahl heben sich gegenseitig auf. (Dies folgt auch daraus, daß $a \frac{b}{b} = a \cdot 1 = a$ ist.)

24) Es ist $\frac{8}{4} \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$, aber auch $\frac{24}{4} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6$, folglich ist $\frac{8 \cdot 3}{4} = \frac{8}{4} \cdot 3$. Es ist also gleichgültig, ob man 8 erst mit 3

*) Das Wort Bruch für Quotient wird vorläufig vermieden, weil das Aufgehen vorausgesetzt war. Danach richten sich vorläufig auch die Zahlenbeispiele.

multipliziert und dann durch 4 dividiert, oder ob man es erst durch 4 dividiert und dann mit 3 multipliziert. Allgemein ist also

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b}c = c\frac{a}{b}.$$

Dies läßt sich folgendermaßen deuten:

a) Man dividiert ein Produkt durch eine Zahl, indem man einen der Faktoren durch sie dividiert (und den Quotienten mit dem anderen Faktor multipliziert).

b) Man multipliziert einen Quotienten mit einer Zahl, indem man den Dividendus mit ihr multipliziert (und das Produkt durch den Divisor dividiert).

c) Man multipliziert eine Zahl mit einem Quotienten, indem man sie mit dem Dividendus multipliziert und durch den Divisor dividiert.

25) Man kann 30 erst durch 2 und dann noch durch 3 dividieren, also auch unmittelbar durch $2 \cdot 3 = 6$ teilen. Dabei ist

$$\frac{\left(\frac{30}{2}\right)}{3} = \frac{30}{2 \cdot 3} = \frac{\left(\frac{30}{3}\right)}{2} = 5.$$

Allgemeiner: Ist a erst durch b teilbar, und dann noch durch c, so ist

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}.$$

In Worten: a) Man dividiert einen Quotienten durch eine Zahl, indem man den Divisor mit der Zahl multipliziert.

b) Man dividiert eine Zahl durch ein Produkt, indem man sie erst durch den einen Faktor dividiert und dann den Quotienten durch den anderen Faktor teilt. Die Reihenfolge der Divisionen ist dabei gleichgültig.

26) Aus 24b) und 25c) folgt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{bd}c = \frac{ac}{bd}$$

Beispiel. $\frac{24}{4} \cdot \frac{6}{3} = \frac{24 \cdot 6}{4 \cdot 3} = 12.$

In Worten: Man multipliziert einen Quotienten mit einem Quotienten, indem man die beiden Dividenden und ebenso die beiden Divisoren miteinander multipliziert.

27) Besonderer Fall: $\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$, folglich:

a) Multipliziert man den Dividenden und den Divisor mit derselben Zahl, so bleibt der Quotient ungeändert. (Erweitern des Quotienten.)

b) Läßt sich vom Divisor und vom Dividendus derselbe Faktor absondern, so kann dieser bei beiden gestrichen werden, ohne daß der Quotient sich ändert. (Kürzen des Quotienten.)

Beispiel. $\frac{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{30}{10}$; $\frac{90}{30} = \frac{10 \cdot 9}{10 \cdot 3} = \frac{9}{3}$.

28) Es ist $a\frac{bc}{bc} = \left(\frac{ac}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right) = a$. Nun folgt aus $k \cdot l = a$, daß $k = \frac{a}{l}$ ist, folglich ist auch

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}, \quad \text{oder:} \quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a\frac{c}{b}.$$

In Worten: Man dividiert durch einen Quotienten, indem man ihn umkehrt und dann multipliziert, d. h. indem man mit dem Divisor multipliziert und durch den Dividenden dividiert. (Selbstverständlich ist $\frac{b}{c}$ in a c-mal so oft enthalten, als b, welches $\frac{a}{b}$-mal darin aufgeht.)

Z. B. $\frac{18}{\left(\frac{6}{2}\right)} = \frac{18 \cdot 2}{6} = 3 \cdot 2 = 6$.

Folglich ist auch $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Beispiel: $\frac{\left(\frac{120}{12}\right)}{\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{120}{12} \cdot \frac{2}{10} = \frac{240}{120} = 2$.

29) Es ist $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)c = \frac{a}{c}c + \frac{b}{c}c = a + b$. Nun folgt aus $kc = (a + b)$ $k = \frac{a+b}{c}$, setzt man also für k die Klammer $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$, so folgt

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Beispiel: $\frac{8}{4} + \frac{12}{4} = \frac{8+12}{4} = \frac{20}{4} = 5 = 2 + 3$.

In Worten: a) Man dividiert eine Summe durch eine Zahl, indem man jedes einzelne Glied durch sie dividiert.

b) **Quotienten mit demselben Divisor werden addiert, indem man die Dividenden addiert** (und die Summe durch den Divisor dividiert).

Beispiel: $\frac{69}{3}$ oder $\frac{60+9}{3} = \frac{60}{3} + \frac{9}{3} = 20 + 3$. Hierauf beruht das Divisionsschema

$$\begin{array}{l} 69 : 3 = 23 \\ \underline{6|} \\ \;\;9 \\ \;\;\underline{9} \\ \;\;0 \end{array}$$

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

ist, was sich ebenfalls auf zweierlei Art in Worten ausdrücken läßt.

31) Es ist $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$. Folglich gelten die beiden Formeln

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$

in denen die oberen Zeichen (+) und die unteren Zeichen (—) zusammengehören. In Worten: **Zwei Quotienten mit ungleichem Divisor werden addiert, indem man jeden von beiden mit dem Divisor des anderen erweitert und dann die neuen Quotienten gleichen Divisors addiert.** Dasselbe gilt vom Subtrahieren. (Gleichnamig machen. Multiplizieren übers Kreuz.)

Beispiel: $\frac{8}{4} + \frac{12}{3} = \frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \frac{24+48}{12} = \frac{72}{12} = 6$, wie aus $2 + 4$ zu erwarten war.

32) Einige Übungsbeispiele.

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a+b)}{a+b} = a + b.$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a-b)}{a-b} = a - b.$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a - b.$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a + b.$$

$$\frac{ac + bc + ad + bd}{c+d} = \frac{c(a+b) + d(a+b)}{c+d} = \frac{(a+b)(c+d)}{c+d} = a + b.$$

$$\frac{10ac + 15bc + 14ad + 21bd}{2a + 3b} = \frac{5c\,(2a + 3b) + 7d\,(2a + 3b)}{2a + 3b}$$
$$= \frac{(2a + 3b)\,(5c + 7d)}{2a + 3b} = 5c + 7d.$$
$$\frac{a^2bc^2}{abc} = ac.$$

Übe an einzelnen geeigneten Beispielen schon jetzt das Divisionsschema ein.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} (a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \\ \underline{a^2 + \ ab} \\ \quad ab + b^2 \\ \quad \underline{ab + b^2} \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{l} (ac + bc + ad + bd) : (c + d) = a + b \\ \underline{ac \quad + ad} \\ \quad bc \quad + bd \\ \quad \underline{bc \quad + bd} \end{array}$$

II. Erweiterung des Zahlengebietes durch Einführung der negativen und der gebrochenen Zahlen.

33) Bisher bezeichneten die Buchstaben a, b, c u. s. w. nur solche ganze Zahlen, die sich durch Addition aus der Zahl 1 herstellen lassen. Infolgedessen wurde die Subtraktionsformel $a - b = c$ auf die Fälle beschränkt, wo $b < a$ ist; und die Divisionsformel $\frac{a}{b} = c$ auf die Fälle, wo a ein Vielfaches von b ist. Beide Beschränkungen engten die Wahl der Übungsbeispiele ein, und schon einfache Aufgaben des praktischen Lebens verlangen die Aufhebung dieser Schranken.

34) Jemand besitze 300 Mark und habe einen Geschäftsverlust von 400 Mark. Wie stellt sich sein Vermögen? Es ist $300 - 400 = (300 - 300) - 100 = 0 - 100$, also ergibt sich ein Vermögen von $(0 - 100)$ Mark oder wie man kürzer schreibt, von -100 Mark (lies: „minus hundert Mark"). Es handelt sich also um 100 Mark Schulden, wenn man das „negative" Vermögen als Schuld bezeichnet.

In ähnlicher Weise gibt jede Differenz, deren Subtrahend größer ist, als der Minuend, eine Zahl, die sich als Differenz zwischen 0 und einer anderen herausstellt. So ist