Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Deutung einfacher Ausdrücke erster und zweiter Dimension. Konstruktionsaufgaben mit algebraischer Analysis.

b) Bei einem regelmäßigen n-Eck sei der Flächenunterschied des Um- und des In-Kreises gegeben. Wie groß ist die Seite des n-Ecks? (Dieselben Fälle sollen behandelt werden.)

c) Bei einem Kreise sei der Umfangsunterschied des um- und des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks bekannt. Wie groß ist der Radius des Kreises? (Dieselben Fälle.)

d) Bei einem Kreise sei der Flächenunterschied des um- und des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks bekannt. Wie groß ist der Radius des Kreises?

e) Demselben Kreise sei ein regelmäßiges Dreieck und ein Quadrat einbeschrieben. Wie groß ist der Radius des Kreises, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Flächenunterschied dieser Vielecke bekannt ist?

f) Die beiden entsprechenden Aufgaben für andere regelmäßige Vielecksphaare von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen, z. B. $n = 3$, $n_1 = 5, 6, 10, \cdots$; $n = 4$, $n_1 = 5, 6, 10$ usw.

g) Demselben Kreise sei ein regelmäßiges Dreieck und ein Quadrat umbeschrieben. Wie groß ist der Kreisradius, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Flächenunterschied beider Vielecke bekannt ist?

h) Die beiden entsprechenden Aufgaben für andere regelmäßige Vieleckspaare von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen.

i) Demselben Kreise sei ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, ein Quadrat umbeschrieben. Wie groß ist der Kreisradius, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Inhaltsunterschied der beiden Figuren bekannt ist?

k) Dieselben Aufgaben für andere regelmäßige Figuren von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen.

l) Der Umfangsunterschied eines Kreises und des umbeschriebenen Fünfecks sei bekannt. Wie groß ist der Kreisradius und die Fünfecksseite?

m) Der Inhaltsunterschied eines Kreises und des einbeschriebenen Fünfecks sei bekannt. Wie groß ist der Kreisradius und die Fünfecksseite?

n) Dieselben Aufgaben für andere regelmäßige Vielecke zu lösen.

III. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie.

a) Geometrische Deutung und Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

320) In diesem Abschnitte sollen a, b und c stets Geraden von gegebener Länge bedeuten, x die Länge der gesuchten Geraden. Dann gelten folgende Beziehungen:

a) $x = a + b$ bedeutet die Summe, $x = a - b$ die Differenz der Geraden a und b in Bezug auf ihre Länge.

b) Ist n eine ganze oder gebrochene unbenannte Zahl, so bedeutet $x = na$ eine Gerade, welche die n-fache Länge hat, wie a. [Bei einer Irrationalzahl n ist im allgemeinen nur angenäherte Konstruktion möglich, so z. B. bei $a\sqrt[3]{2}$, $a\sqrt[5]{2}$, $\cdots$, was nicht konstruierbare algebraische Irrationalitäten sind, oder bei $a\pi$, wo π eine transzendente Irrationalität ist, die nicht mit Hilfe von Wurzeln aus der Einheit darstellbar ist. Dagegen ist $a\sqrt{2}$, $a\sqrt[4]{2}$, $a\sqrt[8]{2}$ aus der Einheit konstruierbar.

c) $x = a\sqrt{n}$ bedeutet die mittlere Proportionale zwischen a und na, denn aus $a : x = x : na$ folgt $x^2 = na^2$ oder $x = a\sqrt{n}$. Genaue Konstruktion ist stets möglich, wenn na konstruiert werden kann. n ist wieder eine ganze oder gebrochene unbenannte Zahl.

d) $x = \frac{ab}{c}$ bedeutet die vierte Proportionale zu c, a und b, denn aus $c : a = b : x$ folgt $x = \frac{ab}{c}\cdot$ Zugleich ist x die zweite Seite eines Rechtecks, dessen eine Seite gleich c und dessen Inhalt gleich ab ist.

e) $x = \frac{a^2}{b}$ bedeutet die vierte Proportionale in der Proportion $b : a = a : x$ und zugleich die zweite Seite eines Rechtecks, dessen erste Seite gleich b und dessen Inhalt gleich a^2 ist.

f) $x = \sqrt{ab}$ ist die mittlere Proportionale zwischen a und b, denn aus $a : x = x : b$ folgt $x^2 = ab$ oder $x = \sqrt{ab}$.

g) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ bedeutet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b, denn in diesem ist $x^2 = a^2 + b^2$.

h) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ bedeutet die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen erste Kathete gleich b, dessen Hypotenuse gleich a ist.

Bemerkungen. Steht links x, was von der ersten Dimension ist, so muß auch rechts ein Ausdruck erster Dimension stehen. Ist dies scheinbar nicht der Fall, so kann man links oder rechts einen Faktor bezw. Divisor von der Größe 1 anbringen, der die Angelegenheit ordnet. So kann man die scheinbar diesem Gesetze widersprechende Gleichung $x = ab$ dadurch in Ordnung bringen, daß man schreibt $x \cdot 1 = ab$ oder $x = \frac{ab}{1}\cdot$ In beiden Fällen handelt es sich dann um die Proportion $1 : a = b : x$, sodaß x als vierte Proportionale konstruiert werden kann. Dann bedeutet x die Seite eines Rechtecks, dessen andere Seite gleich 1 ist, und dessen Inhalt ebenso groß ist, wie der des Rechtecks aus a und b. Allgemeiner gilt der Satz: **In jeder geometrischen Gleichung müssen beide Seiten von derselben Dimension sein.**

321) **Einige häufiger vorkommende algebraische Ausdrücke erster Dimension**, durch die sich gewisse Lösungen erleichtern lassen, sind folgende, aus den früheren Berechnungen zu entnehmenden.

$x = a\sqrt{2}$ ist die Diagonale eines Quadrates von der Seite a.

$x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist die Seite eines Quadrates von der Diagonale a.

$x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite a.

$x = 2a\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist die Seite eines gleichseitigen Dreiecks von der Höhe a.

$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ist der größere Teil einer stetig geteilten Geraden von der Länge a und zugleich die Seite des regelmäßigen Zehnecks im Kreise mit Radius a.

[$x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$ ist der kleinere Teil einer stetig geteilten Geraden von der Länge a.

$x = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2a(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$ ist der Radius des einem Zehneck von der Seite a umbeschriebenen Kreises. Zugleich ist es die Länge einer stetig geteilten Geraden, deren größerer Teil die Länge a hat, während der kleinere die Länge $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ hat, sodaß das Produkt des Ganzen und des kleineren Teils gleich a^2 ist.

$x = \frac{2a}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2a(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$ ist die Länge einer stetig geteilten Geraden, deren kleinerer Teil die Länge a hat, während der größere die Länge $\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$ hat.*)

$x = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ ist die Seite des regelmäßigen Fünfecks im Kreise mit Radius a.

$x = a\sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}} = a\sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{5})}{25 - 5}} = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$ ist der Radius des einem regelmäßigen Fünfeck von der Seite a umbeschriebenen Kreises.]

---

*) Aus den beiden letzten Angaben folgt: Verlängert man eine stetig geteilte Gerade um den längeren Teil, so ist die gesamte Gerade wieder stetig

322) Einige Ausdrücke zweiter Dimension.

a^2 ist die Fläche eines Quadrates von der Seite a; ab ist die Fläche eines Rechtecks von den Seiten a und b.

na^2, wo n eine beliebige unbenannte Zahl ist, bedeutet die Fläche eines Quadrates von der Seite $a\sqrt{n}$.

$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ bedeutet die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite a.

[$\frac{5a^2}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ bedeutet die Fläche eines regelmäßigen Zehnecks im Kreise vom Radius a.

$\frac{5a^2}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ bedeutet die Fläche eines regelmäßigen Fünfecks im Kreise vom Radius a.]

323) Bisweilen hat man Ausdrücke zu konstruieren, die aus Proportionen wie $x : c = a^2 : b^2$ hervorgehen, also $x = \frac{ca^2}{b^2}$. Auch solche sind erster Dimension. Man schreibe sie zur Konstruktion in der Form $x = \frac{\left(\frac{ca}{b}\right)a}{b}$, konstruiere zunächst die Hilfsgröße $y = \frac{ca}{b}$ und dann $x = \frac{ya}{b}$.

Ebenso ist es mit $x : c = a^3 : b^3$ oder $x = \frac{ca^3}{b^3} = \frac{\left(\frac{ca^2}{b^2}\right)a}{b}$. Hier ist erst die Hilfsgröße $y = \frac{ca^2}{b^2}$ nach vorigem Beispiel zu konstruieren usw.

Ebenso folgt aus $x : c = a^3 : b^2 d$ $x = \frac{ca^3}{b^2 d} = \frac{\left(\frac{ca^2}{b^2}\right)a}{d}$.

Handelt es sich um $x : c = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ oder $x = c\sqrt{\frac{a}{b}}$, so schreibe man $x = \sqrt{\frac{ac^2}{b}} = \sqrt{\left(\frac{ac}{b}\right)c}$, d. h. man konstruiere die Hilfsgröße $y = \frac{ac}{b}$ und dann $x = \sqrt{yc}$, d. h. die mittlere Proportionale zwischen y und c.

324) Beziehungen solcher Art erleichtern oft die Lösung von Konstruktionsaufgaben. Geschieht die Analysis einer Konstruktionsaufgabe auf rechnendem Wege, so nennt man sie eine **algebraische Analysis**. Ein Beispiel möge dies aufklären.

---

geteilt. Zieht man vom größeren Teile einer stetig geteilten Geraden den kleineren Teil ab, so ist der größere Teil wieder stetig geteilt.

Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Fläche dreimal so groß sein soll, wie die eines gegebenen Quadrates.

Algebraische Analysis. Wird die Seite des gesuchten Dreiecks gleich x gesetzt, so ergibt sich die Höhe nach Pythagoras aus $h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}x^2$ als $h = \frac{x}{2}\sqrt{3}$, die Dreiecksfläche als $F = \frac{xh}{2} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$. Ist a^2 die Fläche des gegebenen Quadrates, so ist die des Dreiecks dreimal so groß, also $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 3a^2$, also $x^2 = 12a^2\sqrt{\frac{1}{3}} = 4a^2\sqrt{3}$, also $x = \sqrt{4a \cdot a\sqrt{3}}$, d. h. gleich der mittleren Proportionale aus $4a$ und $a\sqrt{3}$. Von den Größen ist $4a$ leicht zu konstruieren, $a\sqrt{3}$ aber ist die größere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks von der Hypotenuse $2a$ und der kleineren Kathete a.

Die Ausführung und die Beschreibung der Konstruktion bleibe dem Schüler überlassen.

325) Die algebraische Analysis einer Aufgabe klärt auch häufig darüber auf, wie man auf den Weg zu irgend einer Konstruktion, die vorher den Eindruck eines bloßen Kunstgriffes machte, überhaupt gelangt ist. Als Beispiel diene die früher gelöste Aufgabe: Eine gegebene Gerade a stetig zu teilen.

Algebraische Analysis. Ist die gegebene Gerade gleich a, so setze man z. B. den größeren der gesuchten Teile gleich x, den kleineren also gleich $a - x$. Die stetige Proportion ist dann

$$(a - x) : x = x : a,$$

was die Gleichung

$$x^2 = a(a - x) = a^2 - ax$$

oder

$$x^2 + ax = a^2$$

gibt. Die Auflösung dieser Gleichung gibt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Der Wert mit positivem Wurzelzeichen ist

$$x_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$$

Die Konstruktion dieses Ausdrucks ist die eine der in Nr. 302 durchgeführten. Der Ausdruck läßt sich einfacher schreiben in der Form $x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. (Der kleinere Teil ist $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$. Ihn würde man erhalten haben, wenn man den kleineren Teil gleich x gesetzt hätte.)

Die Analysis hat aber noch eine zweite Lösung $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = -\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$ gegeben. Schneidet man diesen Teil in entgegengesetzter Richtung ab, so verlängert man die Gerade a um die Länge $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. Dann ist die verlängerte Gerade von der Länge $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+3)$. Sie ist ebenfalls stetig geteilt, der größere Teil ist $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$, der kleinere ist a, wie leicht zu zeigen ist.

Die algebraische Analysis hat also nicht nur den Konstruktionsweg der früheren Lösung gegeben, sondern außerdem neben der inneren stetigen Teilung noch eine äußere stetige Teilung gezeigt.

Bemerkung. Hätte man den kleineren Teil gleich x gesetzt, so wäre der größere gleich $(a-x)$ gewesen. Die Proportion

$$x : (a-x) = (a-x) : a$$

hätte dann die Gleichung

$$ax = a^2 - 2ax + x^2$$

oder

$$x^2 - 3ax = -a^2$$

gegeben. Ihre Lösung ist

$$x = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{4} - a^2} = \frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{5}).$$

$x_1 = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$ ist der vorher berechnete kleinere Teil, $x_2 = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}$ gibt die Länge der vorher verlängerten Geraden. —

326) Man versuche eine Reihe früher gelöster Aufgaben mit Hilfe einer algebraischen Analysis neu zu lösen, z. B.:

a) Einem gleichschenkligen Dreiecke ein auf der Basis stehendes Quadrat einzuzeichnen, von dem zwei Ecken in den Schenkeln liegen.

b) Einem Halbkreise ein Quadrat in entsprechender Weise einzuzeichnen.

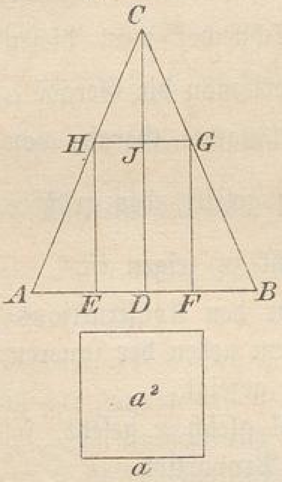
c) Dieselben Aufgaben für den Fall zu lösen, daß die Grundlinie des Rechtecks die Hälfte der Höhe sei.

327) Als Beispiel einer Flächenaufgabe sei folgende durchgeführt:

Jn ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck ein Rechteck einzustellen, dessen Jnhalt gleich dem eines gegebenen Quadrates ist.

Algebraische Analysis. ABC sei das gegebene gleichschenklige Dreieck von der Höhe h und der Basis b, a sei die Seite des gegebenen Quadrates. Setzt man die Grundlinie des gesuchten Rechtecks gleich x, die Höhe gleich y, so wird zunächst verlangt, daß

Fig. 128.



$$(1) \qquad xy = a^2$$

sei. Ferner ist $\triangle ABC \sim \triangle HGC$, folglich ist

$$AB : HG = DC : JC$$

oder

$$b : x = h : (h - y),$$

also

$$bh - by = xh.$$

Daraus folgt

$$(2) \qquad y = \frac{bh - xh}{b} = \frac{h(b - x)}{b}.$$

Setzt man den Wert von y in Gleichung (1) ein, so hat man

$$\frac{xh(b - x)}{b} = a^2.$$

Dies formt sich um zu

$$x(b - x) = \frac{a^2 b}{h}$$

oder

$$x^2 - bx = -\frac{a^2 b}{h}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2 b}{h}} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{b}{h}\right) a}\right)^2},$$

oder auch

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{b\left[\frac{b}{4} - \frac{a^2}{h}\right]}.$$

Die Konstruktion der beiden Werte von x nach einem dieser Ausdrücke sei dem Schüler überlassen. — Da der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ werden darf, weil sonst der Wurzelwert imaginär sein würde, muß $\frac{a^2}{h} < \frac{b}{4}$ oder $a^2 < \frac{bh}{4}$ sein, d. h. das gegebene Quadrat darf höchstens halb so groß sein wie die Fläche des Dreiecks; oder das größte Rechteck, welches einem gleichschenkligen Dreieck einbeschrieben werden kann, ist das von halber Höhe. (Ist der Wurzelwert gleich Null, so wird in der Tat $x = \frac{b}{2}$.)

328) Einige andere Beispiele von Aufgaben.

a) Einem Halbkreise ein Rechteck gegebenen Umfangs einzubeschreiben.

b) Einem Halbkreise ein Rechteck von gegebener Fläche einzubeschreiben (welche letztere in Form eines Quadrates gegeben ist).

c) Gegeben sei ein Kreissegment, zu dem der Zentriwinkel 120^0 gehört. Dem Segmente soll 1) ein Rechteck gegebenen Umfangs, 2) ein Rechteck gegebenen Inhalts einbeschrieben werden.

d) Dieselbe Aufgabe für ein Segment vom Zentriwinkel 90^0 zu lösen.

e) In einen gegebenen Kreissektor vom Zentriwinkel 90^0 ein Rechteck gegebenen Umfangs oder gegebenen Inhalts so einzuzeichnen, daß zwei Ecken auf dem Kreisbogen, zwei auf den Grenzradien liegen.

329) Als letztes Beispiel soll eine schwierigere Aufgabe gelöst werden.

Übungsaufgabe. Ein gewöhnliches Tangentenviereck zu konstruieren aus den Seiten a, b, c und dem Radius ϱ des In-Kreises.

Algebraische Analysis. Die vierte Seite d ergibt sich als $d = a + c - b$. Die vom Mittelpunkte μ des In-Kreises nach A, B, C, D gezogenen Geraden seien, wie in Fig. 113, q_1, q_2, q_3, q_4, die Tangentenlängen t_1, t_2, t_3, t_4, sodaß $AB = a = t_1 + t_2$ ist, usw. Nach den früher ausgeführten Betrachtungen (vgl. Nr. 297) ist $\frac{q_3^2}{q_1^2} = \frac{bc}{ad}$, zugleich ist $q_1^2 = \varrho^2 + t_1^2$, $q_3^2 = \varrho^2 + t_3^2$. Aus $t_1 + t_2 = a$ und $t_2 + t_3 = b$ folgt $t_3 = t_1 - a + b$.

Statt $\varrho^2 + t_3^2 = q_3^2$ ist also zu schreiben

$$(1) \qquad \varrho^2 + (t_1 - a + b)^2 = (\varrho^2 + t_1^2)\frac{bc}{ad}.$$

Um t_1 zu berechnen, bringe man die Gleichung auf die Form

$$t_1^2 \frac{ad - bc}{ad} - 2t_1(a - b) = \varrho^2 \frac{bc - ad}{ad} - (a - b)^2$$

oder

$$(1)^*) \qquad t_1^2 - 2t_1 \frac{(a - b)ad}{ad - bc} = -\varrho^2 - \frac{(a - b)^2 ad}{ad - bc}.$$

Der Nenner $ad - bc$ geht, wenn man $d = a + c - b$ setzt, über in $(a - b)(a + c)$. Setzt man dies ein, so gibt die Kürzung mit dem Faktor $(a - b)$ der Gleichung die Form

$$(2) \qquad t_1^2 - 2t_1 \frac{ad}{a + c} = -\varrho^2 - \frac{(a - b)ad}{a + c}.$$

Der Ausdruck $\frac{ad}{a+c}$ oder $\frac{ad}{b+d}$ hat eine bestimmte Bedeutung. Teilt man nämlich die Seite a von A aus im Verhältnis $b:d$, und bezeichnet man den Teilpunkt mit K, so ist $AK = \frac{ad}{b+d} = \frac{ad}{a+c}$. Die Gleichung geht also über in

(2)*) $$t_1^2 - 2t_1 \cdot AK - \varrho^2 - (a-b)AK,$$

und ihre Lösung ist

(3) $$t_1 = AK \pm \sqrt{AK^2 - (a-b)AK - \varrho^2}.$$

Ist nun E der Berührungspunkt für die Seite a, so ist $t_1 = AE = AK \pm KE$. Folglich muß EK absolut gleich dem Werte der Wurzel sein. Diese erhält für den Fall $BK < BE$ das positive, sonst das negative Zeichen. Ersteres werde hier angenommen. Dann ist

(3)*) $$t_1 = AK + \sqrt{AK(AK - a + b) - \varrho^2} = AK + \sqrt{e^2 - \varrho^2},$$

wobei e die Länge der Verbindungslinie $K\mu$ ist. Demnach ist

(4) $$e^2 = \frac{ad}{a+c}\left[\frac{ad}{a+c} - a + b\right]$$
$$= \frac{ad}{(a+c)^2}[a(a+c-b) - a^2 - ac + ab + bc] = \frac{abcd}{(a+c)^2}.$$

Denkt man sich also das Tangentenviereck als Gelenkviereck mit veränderlichen Winkeln, so ist e unveränderlich. Mit anderen Worten: Ist bei einem Gelenkviereck $a + c = b + d$, hält man a fest und bewegt man die übrigen Seiten, so läßt sich ihm stets ein Kreis einbeschreiben, der Mittelpunkt dieses Kreises aber bewegt sich auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf a liegt und diese Seite im Verhältnis $d:b$ teilt und dessen Radius die Länge $e = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$ hat.

Konstruktion. Man konstruiere $d = a + c - b$. Man teile die Seite $AB = a$ so, daß $AK : KB = d : b$ wird. Man konstruiere e mit Hilfe der Proportion

$$(a+c) : \sqrt{ab} = \sqrt{cd} : e,$$

(wobei die Wurzeln mittlere Proportionalen zu a und b bezw. c und d sind). Um den Teilpunkt K schlage man mit e einen Halbkreis. Jetzt ziehe man zu a eine Parallele in der Entfernung ϱ. Schneidet diese den Kreis in zwei Punkten μ, so wähle man einen dieser Punkte als Mittelpunkt des In-Kreises mit Radius ϱ und zeichne diesen Kreis. Von B aus ziehe man an ihn eine Berührende, der man die Länge $BC = b$ gebe, von A aus eine zweite Berührende, der man die

Länge $AD = d$ gebe. Die Verbindungslinie CD vollendet das gesuchte Viereck $ABCD$.

Der Beweis sei dem Schüler überlassen. Ebenso die Determination, bei der Grundbedingung ist, daß $a + c - b$ positiv (also mindestens Null) ist. Je nachdem $e = \varrho$ oder $e > \varrho$ ausfällt, ist eine, oder sind zwei Lösungen möglich.

Bemerkungen. a) Ist a die größte Seite, also c die kleinste, so kann man das Viereck so weit bewegen, daß Winkel D oder Winkel C gleich 180^0 wird. Dadurch entstehen Dreiecke mit den Seiten a, b und $(c + d)$ bezw. mit a, $(b + c)$ und d als Sonderfälle des Vierecks. Denkt man sich diese Dreiecke gezeichnet und die Mittelpunkte μ_1 und μ_2 der In-Kreise konstruiert, so gibt die Mittelsenkrechte $\mu_1 \mu_2$ auf a den Teilpunkt K, und $K\mu_1 = K\mu_2$ ist der Radius des Kreises, der der geometrische Ort für μ ist.

b) Der Inhalt des Vierecks, $J = (a + c)\varrho$ oder $J = (b + d)\varrho$ ist proportional zu ϱ. Der größte Wert, den ϱ annehmen kann, ist $\varrho = e$. Der Höchstwert des Inhalts ist also $J_{\max} = (a + c)\dfrac{\sqrt{abcd}}{a + c}$ $= \sqrt{abcd}$. In diesem Falle gibt es nur ein einziges μ. Die beiden unter a) besprochenen Dreiecke sind für konvexe Tangentenvierecke Grenzfälle, von denen jeder ein Minimum des Inhalts gibt. Die betreffenden Radien sind $\varrho_1 = \sqrt{\dfrac{cd(a-d)}{a+c}}$ und $\varrho_2 = \sqrt{\dfrac{(d-c)bc}{a+c}}$, sodaß $J_1 = \dfrac{a+b+c+d}{2}\sqrt{\dfrac{cd(a-d)}{a+c}}$ und $J_2 = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ $\times \sqrt{\dfrac{(d-c)bc}{a+c}}$ ist. Dies folgt leicht aus den Heronischen Dreiecksformeln. und daraus $K\mu = \dfrac{\sqrt{abcd}}{a+c}$.

c) Für gewöhnliche Tangentenvierecke gilt also folgender Satz: Teilt man die Seiten im Verhältnis der anliegenden Seiten, so liegen die Teilpunkte auf einem zum In-Kreise konzentrischen Kreise. ($BK_1 = a\dfrac{b}{b+d} = b\dfrac{a}{a+c} = BK_2$, $BE_1 = BE_2 = t_2$, folglich $E_1K_1 = E_2K_2$, folglich $\triangle K_1\mu E_1 \cong \triangle K_2\mu E_2$, also $K_1\mu = K_2\mu$ und ebenso $= K_3\mu = K_4\mu = e$.) Der Radius e hängt nur von den Seiten ab. Ist also das Viereck ein Gelenkviereck, so bleibt es in sich beweglich, wenn man μ gelenkig mit K_1, K_2, K_3, K_4 verbindet. $K_1K_2K_3K_4$ ist ein Sehnenviereck: E_1E_2 und E_3E_4 schneiden einander auf der Diagonale AC im äußeren Ähnlichkeitspunkte der um A und C mit AK_1 und CK_3 geschlagenen Kreise. Entsprechendes gilt von E_2E_3 und E_4E_1.

d) **Einfachste Analysis.** $\measuredangle A\mu B = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}$, $\measuredangle B\mu C = \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2}$ usw. Man mache $\measuredangle A\mu K_1 = \frac{\gamma}{2}$, also $\measuredangle B\mu K_1 = \frac{\delta}{2}$ und zerlege durch μK_2 usw. die folgenden Winkel entsprechend. Dabei wird $\mu K_1 = \mu K_2 = \mu K_3 = \mu K_4 = e$. Ferner wird $\triangle A\mu K_1 \sim \triangle \mu C K_3$, also $AK_1 : e = e : CK_3$ und $e^2 = AK_1 \cdot CK_3 = BK_2 \cdot CK_4$ usw. Folglich $\frac{AK_1}{BK_2} + 1 = \frac{DK_4}{CK_3} + 1$ oder $\frac{AK_1 + BK_1}{BK_2} = \frac{DK_3 + CK_3}{CK_2}$ oder $\frac{a}{BK_2} = \frac{c}{CK_2}$ oder $\frac{BK_2}{CK_2} = \frac{a}{c}$, d. h. Seite b ist im Verhältnis der anliegenden Seiten geteilt, ebenso die übrigen. Also ist $AK_1 = a\frac{d}{b+d} = \frac{ad}{a+c}$, $CK_3 = c\frac{b}{b+d} = \frac{bc}{a+c}$, folglich $e^2 = \frac{abcd}{(a+c)^2}$. —

Leicht sind nun t_1, $q_1 \ldots$ zu berechnen und die Rechnungen des § 297 einfacher durchzuführen.*)

e) Für den Fall des Maximalvierecks fällt μK_1 auf μE_1, sodaß $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel werden, also $\alpha + \gamma = 180^0$. Dann ist also das Tangentenviereck $ABCD$ zugleich ein Sehnenviereck (bizentrisches Viereck.)

f) Tangentenvierecke lassen sich auch konstruieren und berechnen aus a, b, c, J; a, b, ϱ, J; a, b, u, J; a, b, c, t_1; a, b, c, q_1; $a, b, c, (t_1 + t_3)$; t_1, t_2, t_3, t_4; q_1, q_2, q_3, q_4; q_1, q_2, a, c.

Schlußbemerkung. Eine große Anzahl von Berechnungs- und Konstruktionsaufgaben, die hierher gehören, findet man in Band II 2. Aufl. dieses Lehrbuchs, Seite 1—33. Einige der dortigen Aufgaben sind in diesen Band einbezogen worden. Sie lehnen sich zum Teil an gewisse Sätze an: Satz des Ptolemäus vom Sehnenviereck, Satz des Brahmagupta vom Sehnenviereck, einige Konstruktionen nach Mascheroni; Formeln und Dreieckskonstruktionen, die mit $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ zusammenhängen. Formeln und Dreieckskonstruktionen, die mit r und den ϱ zusammenhängen. Eulersche Gerade und Feuerbachscher Kreis. Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden des Dreiecks. Die verschiedenen Konstruktionsmethoden werden dort im Zusammenhange in einem besonderen Kapitel besprochen.

---

*) Das Beispiel zeigt, daß man sich mit dem Gelingen einer algebraischen Analysis nicht beruhigen soll. Man hat noch nach der einfachsten Herleitung der gefundenen Beziehungen zu suchen.