Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Sehnen und Sekanten durch einen Punkt. Kreisbüschel und orthogonale Kreisschar. Anwendung auf Kartographie. Goldener Schnitt. Regelmäßiges Zehneck, Fünfeck, Fünfzehneck. Heronische Formeln, mit Hilfe ...

II. Proportionen und Ähnlichkeitsbeziehungen am Kreise, die stetige Teilung und ihre Anwendung; Berechnungen am Kreise.

298) **Satz.** Zieht man durch einen Punkt innerhalb des Kreises beliebig viele Sehnen, so ist das Produkt (Rechteck) aus den Abschnitten jeder Sehne gleich dem Quadrate über der Hälfte der kleinsten Sehne, die durch den Punkt gelegt werden kann.

Beweis. AB in Fig. 114 ist die kleinste mögliche Sehne durch P, wenn sie senkrecht auf dem durch P gelegten Durchmesser steht. (Warum?) Dabei ist $AP = BP$. Aus $\alpha = \gamma$ und $\delta = \beta$ (Peripherie-

Fig. 115.

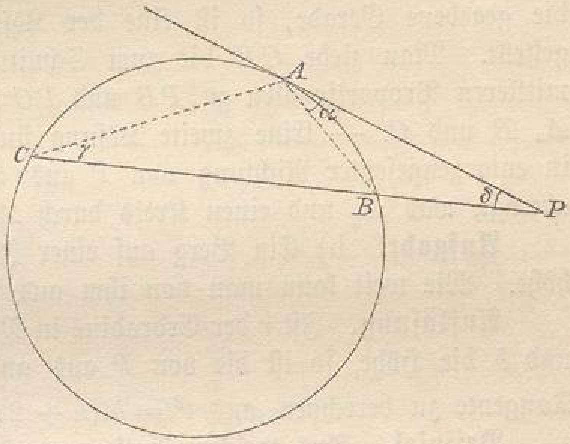
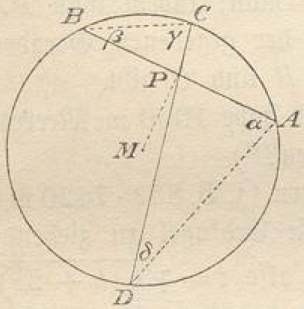


Fig. 114.



winkel über gleichen Bogen) folgt, daß $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ ist. Folglich ist $DP : AP = BP : CP$ oder $DP : AP = AP : CP$, folglich: $DP \cdot CP = AP^2$. (AP ist also mittlere Proportionale zu CP und DP.)

299) **Satz.** Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises beliebig viele Sekanten, so ist das Produkt (Rechteck) aus jeder Sekante und ihrem äußeren Abschnitte gleich dem Quadrate der von dem Punkte aus an den Kreis gelegten Tangente.

Beweis. Verbindet man in Fig. 115 A mit B und C, so ist $\triangle PAB \sim \triangle PCA$, denn δ ist gemeinschaftlicher Winkel und $\alpha = \gamma$ nach dem Satze vom Tangenten-Sehnenwinkel. Folglich ist $PB : PA = PA : PC$ und $PB \cdot PC = PA^2$. (Die Tangente ist also mittlere Proportionale zu PB und PC.)

Bemerkung. Versuche die Sätze 298) und 299) in einen zusammenzufassen. Der in beiden auftretende konstante Ausdruck PA^2 kann dabei als Potenz des Punktes P in bezug auf den Kreis bezeichnet werden. (Jedoch pflegt man nach Steiner PA^2 nur dann zu schreiben, wenn P außerhalb liegt, und $-PA^2$, wenn P innerhalb liegt, weil dann die Stücke PA und PB nach entgegengesetzten Richtungen gehen. Ist $PA^2 = \pm 1$, so wird das eine Mal $CP = -\frac{1}{DP}$, das andere Mal $CP = \frac{1}{BP}$, d. h. diese Längen werden reziproke.) Einige der früher ausgeführten Berührungskonstruktionen lassen sich von hier aus übersichtlicher als früher durchführen.

[300) **Aufgabe.** a) Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Auflösung. Sind B und C die gegebenen Punkte und AP die gegebene Gerade, so ist eine der Lösungen durch Fig. 115 dargestellt. Man ziehe CB bis zum Schnitte P, mache PA gleich der mittleren Proportionalen zu PB und PC und lege einen Kreis durch A, B und C. — Eine zweite Lösung findet man, indem man PA in entgegengesetzter Richtung von P aus auf der gegebenen Geraden abträgt, was A_1 und einen Kreis durch A_1, B und C gibt.

Aufgabe. b) Ein Berg auf einer Insel habe 1000 m Meereshöhe. Wie weit kann man von ihm aus sehen?*)

Auflösung. Ist r der Erdradius in Metern (z. B. $859 \cdot 7420$ m), und h die Höhe, so ist die von P aus an die Erdkugel zu ziehende Tangente zu berechnen aus $t^2 = h(h + 2r)$, also $t = \sqrt{h(h + 2r)}$.

Beispiel. Aus welcher Entfernung kann von dem 30 m hohen Maste eines Schiffes das Feuer eines (auf einem Berge stehenden) Leuchtturmes von 100 m Meereshöhe gesehen werden?

Die Gerade PA ist soweit zu verlängern, bis der neue Endpunkt 30 m von der Erdkugel entfernt ist. Es wird $e = t_1 + t_2 = \sqrt{h_1(h_1 + 2r)} + \sqrt{h_2(h_2 + 2r)}$.

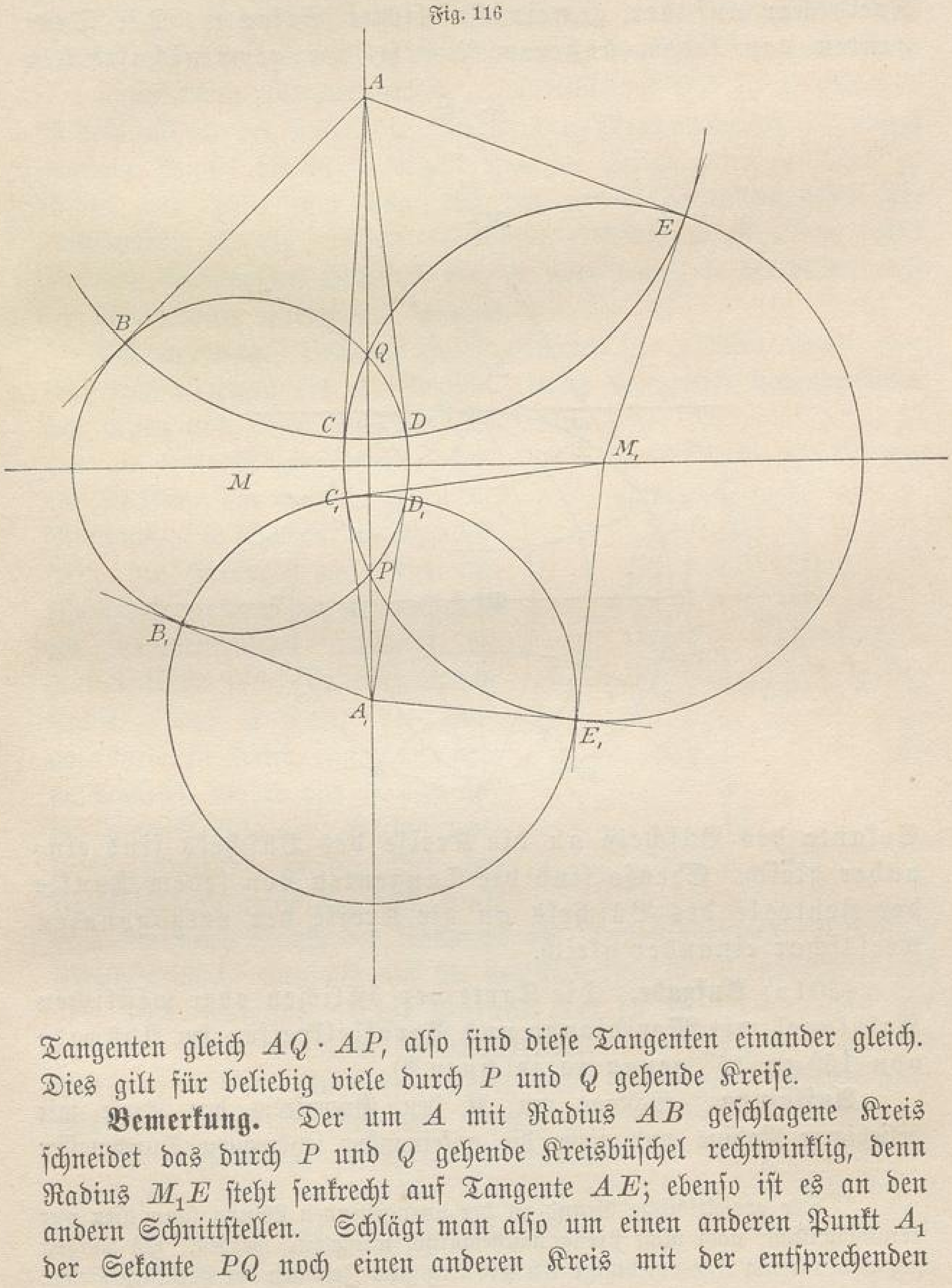
301) **Satz.** Gehen durch zwei Punkte beliebig viele Kreise, so sind die von jedem äußeren Punkte der gemein-

*) Auf manchen Land- oder Seekarten sind die Grenzen für die Sichtbarkeit von Leuchtfeuern durch Kreise angegeben. — Wenn h klein gegen $2r$ ist, kann man sich bei Aufgabe b) auf $t = \sqrt{2rh}$ beschränken. Dann ist die Entfernung (nahezu) proportional der Quadratwurzel aus der Höhe. Bei der folgenden Aufgabe wird dann $e = \sqrt{2rh_1} + \sqrt{2rh_2}$. Man erprobe den Einfluß der Vernachlässigung an den beiden Beispielen.

schaftlichen Sekante aus an die Kreise gezogenen Tangenten einander gleich.

Beweis. In Fig. 116 gehen die Kreise M und M_1 durch P und Q. Vom Punkte A der Sekante PQ aus sind an die beiden Kreise vier Tangenten gelegt. Dabei ist das Quadrat jeder dieser

Fig. 116



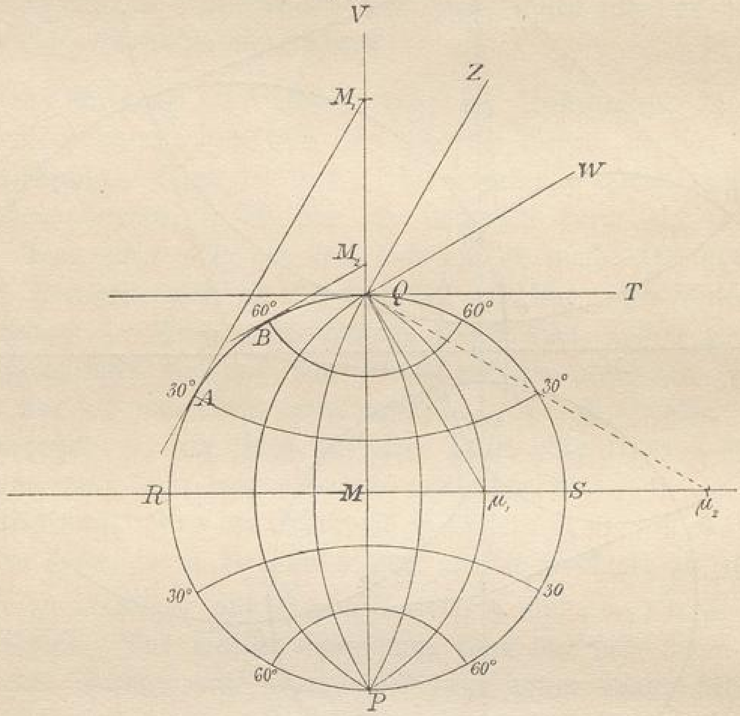
Tangenten gleich $AQ \cdot AP$, also sind diese Tangenten einander gleich. Dies gilt für beliebig viele durch P und Q gehende Kreise.

Bemerkung. Der um A mit Radius AB geschlagene Kreis schneidet das durch P und Q gehende Kreisbüschel rechtwinklig, denn Radius M_1E steht senkrecht auf Tangente AE; ebenso ist es an den andern Schnittstellen. Schlägt man also um einen anderen Punkt A_1 der Sekante PQ noch einen anderen Kreis mit der entsprechenden

Tangentenlänge A_1B_1 als Radius, so schneidet auch dieser die durch P und Q gehenden Kreise rechtwinklig. Folglich sind auch die Tangenten M_1E, M_1C, M_1C_1 und M_1E_1 einander gleich. Folglich lautet der vervollständigte Satz:

Legt man durch zwei Punkte ein Kreisbüschel, so liegen die Mittelpunkte der das Büschel senkrecht schneidenden Kreisschar auf der gemeinschaftlichen Sekante. Die Tangenten von jedem äußeren Punkte der gemeinschaftlichen

Fig. 117.



Sekante des Büschels an die Kreise des Büschels sind einander gleich. Ebenso sind die Tangenten von jedem Punkte der Zentrale des Büschels an die Kreise der orthogonalen Kreisschar einander gleich.

[301a) **Aufgabe.** Die Karte der östlichen oder westlichen Halbkugel mit Meridianen und Parallelkreisen im Abstande von 15^0 zu 15^0 genau zu zeichnen.*)

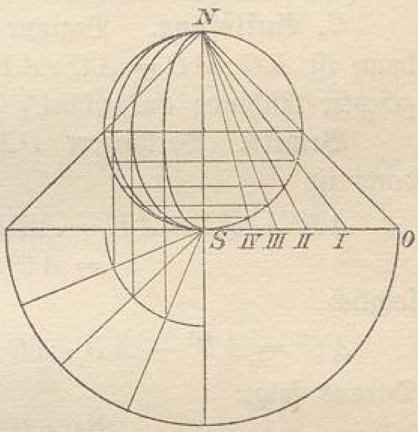
Auflösung. Schlage um M den Grenzkreis der Karte mit beliebigem Radius und ziehe die aufeinander senkrechten Durchmesser

*) Der projektivische Grund zu der anzugebenden Lösung kann hier nur veranschaulicht, noch nicht streng mathematisch mitgeteilt werden. Es handelt sich also nur um eine vorläufige Anleitung zum Zeichnen der Halbkugelkarten.

PQ und RS, die beide zu verlängern sind. In Fig. 117 ist der Viertelkreis RQ in drei Bogen von je 30^0 geteilt, was die Punkte A und B gibt. Die Tangenten in A und B geben die Mittelpunkte M_1 und M_2 für die Parallelkreise 30^0 und 60^0. Entsprechend sind die Parallelkreise 15^0, 45^0, 75^0 zu konstruieren. — Durch Q lege man eine Tangente QT, sodaß $\sphericalangle TQV = 90^0$ ist. Durch QW und QZ werde dieser Winkel in Winkel von je 30^0 eingeteilt. Das Lot auf QW in Q gibt den Mittelpunkt μ_1 des den Grenzkreis unter 30^0 schneidenden Meridiankreises. Das Lot auf QZ in Q gibt den Mittelpunkt μ_2 des unter 60^0 schneidenden Meridiankreises. Halbiert man die Winkel bei Q, so erhält man die Teilung von $\sphericalangle TQV$ in Winkel von 15^0. Die Lote auf den neuen Teillinien geben die Mittelpunkte für die anderen Meridiane. (Diese Konstruktion rührt von dem Astronomen Hipparch her, sie wird jedoch in der Regel nach dem Geographen Ptolemäus benannt.)

[**Bemerkung.** Auch die Halbkugelkarten der größten Land- oder Wassermasse zeigen ein Kreisbüschel (durch exzentrisch liegende Pole von denen nur einer gezeichnet ist) und die senkrecht schneidende Schar von Kreisen. Die ersteren stellen die Meridiane, die letzteren die Parallelkreise der Erdkugel dar. Bei der Polarkarte ist statt des Kreisbüschels ein Strahlenbüschel gegeben, die Parallelkreise sind also konzentrische Kreise. Das Entstehen der Südpolarkarte ist durch Fig. 118 veranschaulicht, wobei von N aus auf die gegenüberliegende Berührungsebene projiziert wird. Bei der Halbkugelkarte nach Fig. 117 denke man sich einen Punkt des Äquators als Projektionspunkt. Die Projektion geschieht ebenfalls auf die gegenüberliegende Berührungsebene.]

Fig. 118.

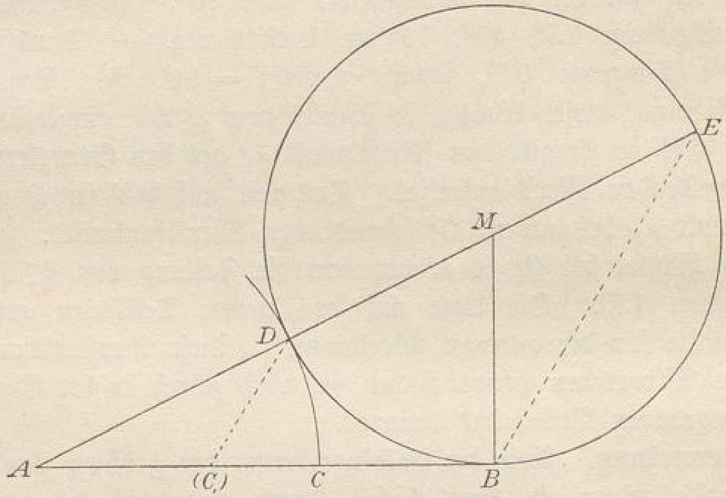


302) **Aufgabe.** Eine Gerade AB so zu teilen, daß der größere Teil mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleineren Teile ist. (Stetige Teilung oder goldener Schnitt, oder nach Kepler: sectio divina.)

1. Auflösung. Errichte im Endpunkte B der gegebenen Geraden AB (Fig. 119) ein Lot $BM = \frac{1}{2} AB$, schlage mit BM um M einen Kreis und lege durch M die Sekante AE. Durch D ziehe eine Parallele zu EB, die in C_1 schneidet, dann ist C_1 der gesuchte Teilpunkt.

Beweis. Nach Nr. 299 ist $AD : AB = AB : AE$, hier ist aber $AB = DE$, folglich $AD : DE = DE : AE$, also ist zunächst AE

Fig. 119.



in D stetig geteilt. Da nun $DC_1 \parallel EB$, so ist auch $AC_1 : C_1B = C_1B : AB$ (warum?).

2. Auflösung. Beginne wie vorher und mache $AC = AD$, dann ist $BC : AC = AC : AB$. (Die Teilung ist jetzt in entgegengesetzter Richtung ausgeführt.)

Beweis. Verlängere DM bis zum Punkte E der Peripherie, dann ist

$$AB^2 = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AC(AC + AB)$$
$$= AC^2 + AB \cdot AC,$$

folglich

$$AC^2 = AB^2 - AB \cdot AC = AB(AB - AC) = AB \cdot BC.$$

Daraus folgt:

$$BC : CA = CA : BA.$$

[Anderer **Beweis.** $AE : AB = AB : AD$, folglich $(AE - AB) : (AB - AD) = AB : AD$ oder $AC : BC = AB : AC$, also auch

$$BC : AC = AC : AB.$$]

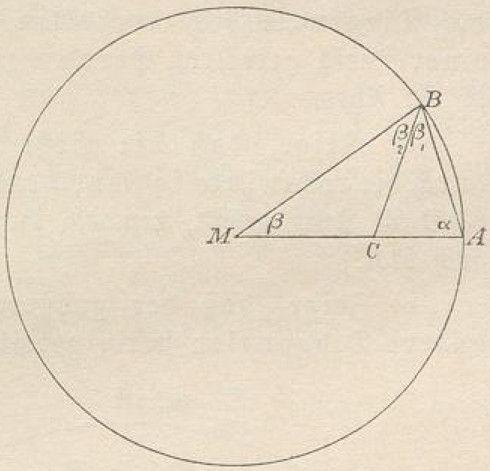
Bemerkung. Aus der Figur folgt, daß $BC_1 = AD$, $AC_1 = DE - AD$, daß also das Abschneiden des kleineren Teils vom größeren ebenfalls eine stetige Teilung gibt. Dasselbe gilt vom Ansetzen des größeren Teils an die ganze Linie.

303) **Aufgabe.** Jn einen Kreis ein regelmäßiges Zehneck einzuzeichnen.

Auflösung. Teile den Radius nach dem goldenen Schnitt, dann ist der größere Teil die Seite des regelmäßigen Zehnecks.

Beweis. Ist MA in C stetig geteilt, und ist $AB = MC$ (Fig. 120), so ist $AC : CM = CM : AM$ oder $AC : AB = AB : AM$, außerdem ist $\sphericalangle\, \alpha$ den Dreiecken ABC und BAM gemein, folglich ist $\triangle ABC \sim \triangle BAM$ (erster Ähnlichkeitssatz), und da AMB gleichschenklig ist, so ist auch ABC gleichschenklig, folglich auch $MC = BC$. Daraus folgt $\sphericalangle\, \beta = \beta_2$. Aus der bewiesenen Ähnlichkeit der Dreiecke folgt $\beta = \beta_1$, also ist $\sphericalangle\, MBA = 2\beta$ und auch der andere Basiswinkel $\alpha = 2\beta$. So hat man im Dreieck MAB fünfmal den Winkel β. Folglich ist $5\beta = 180^0$, also $\beta = 36^0 = \frac{360^0}{10}$. Demnach läßt sich AB zehnmal auf der Peripherie abtragen.

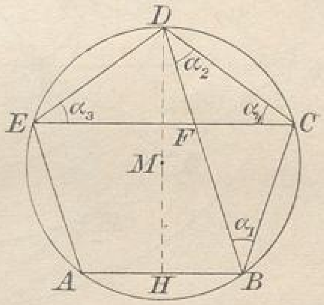
Fig. 120.



304) **Aufgabe.** Ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis einzuzeichnen.

Auflösung. Man teile den Kreis, wie vorher, in 10 gleiche Teile ein und überschlage beim Ziehen der Sehnen jedesmal einen Punkt. Der Zentriwinkel wird gleich 72^0, ist also der des regelmäßigen Fünfecks.

Fig. 121.



305) **Übungsaufgaben.*)** a) Berechne alle beim regelmäßigen Fünfeck und seinen Diagonalen vorkommenden Winkel.

b) Zeige, daß im regelmäßigen Fünfeck je zwei Diagonalen einander stetig teilen.

(Die gleichschenkligen Dreiecke BCD und CDE sind kongruent, folglich die Winkel α_1, α_2, α_3, α_4 einander

---

*) Die hier genannten stetigen Teilungen geben Aufschluß über die in §§ 99 bis 103 und 151 bis 156 des Vorkursus behandelten Modelle. Es handelt sich also um Vorübungen für einen wichtigen Abschnitt der Stereometrie.

gleich, also ist auch $\triangle\, CDF$ gleichschenklig und ähnlich $\triangle\, CED$. Daraus folgt $CF:CD = ED:CE$, also da $EF = AB = DE = DC$ ist, auch

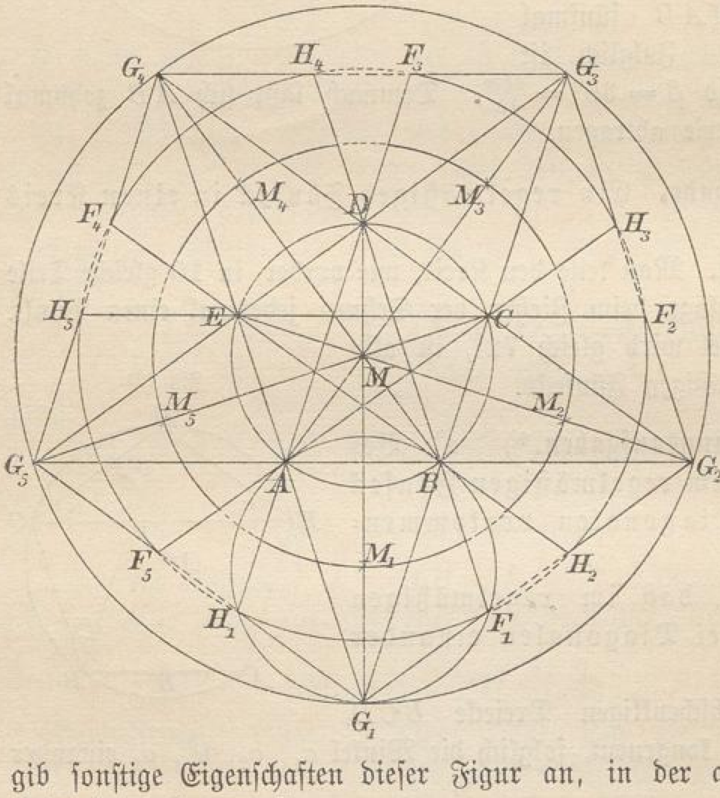
$$CF:EF = EF:CE.)$$

c) Zeige, daß im regelmäßigen Fünfeck die Seite und die Diagonale sich verhalten, wie der größere Abschnitt einer stetig geteilten Geraden zur ganzen Geraden. ($ABFE$ ist ein Rhombus.)

d) Zeige, daß die Höhe des regelmäßigen Fünfecks durch die rechtwinkelig schneidende Diagonale stetig geteilt ist. (BD ist stetig geteilt, demnach durch die Parallelen FE und HB auch DH.)

e) Zeige, daß der größere Teil der Höhe durch zwei andere Diagonalen stetig geteilt ist (z. B. durch EB und AC. Ist K der Teilpunkt, so ist $DEKC$ ein Rhombus, also ist vom größeren Teile der Höhe der kleinere Teil der vorigen Höhenteilung abgeschnitten.)

Fig. 122.



[f) Suche stetige Teilungen an Fig. 122 auf, die nach dem Vorkursus die Hälfte vom Netz des regelmäßigen Zwölfflachs darstellt und gib sonstige Eigenschaften dieser Figur an, in der auch regelmäßige Zehnecke vorkommen.]

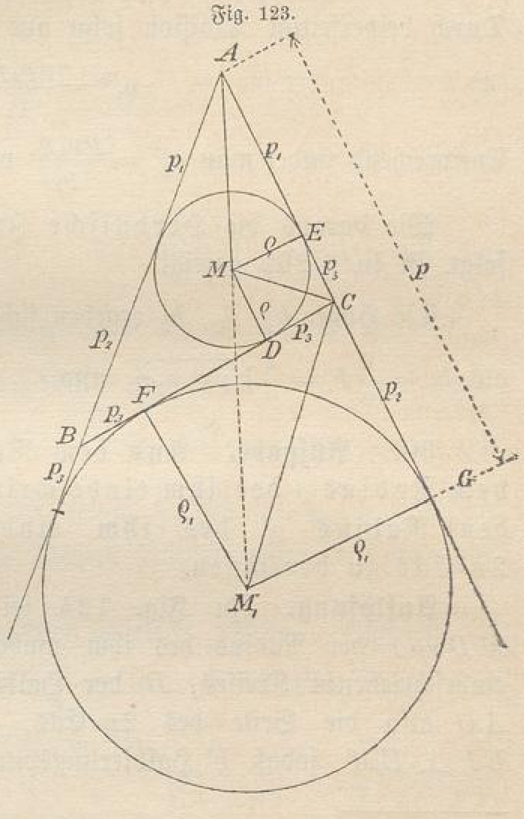
g) Suche stetige Teilungen am regelmäßigen Zehneck auf und berechne die bei ihm und seinen Diagonalen vorkommenden Winkel.

306) **Aufgabe.** Das regelmäßige Fünfzehneck zu konstruieren.

Auflösung. Die Sechseckskonstruktion gibt den Zentriwinkel 60^0, die Zehneckskonstruktion gibt den Winkel 36^0, die Differenz beider Winkel ist $24^0 = \frac{360^0}{15}$. Schneidet man also vom Sechseckbogen den Zehneckbogen ab, so hat man den Bogen des regelmäßigen Fünfzehnecks. (Kürzer: $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$.)

Bemerkung. Man kann jetzt folgende regelmäßigen Vielecke genau konstruieren: 5-Eck, 10-Eck, 20-Eck, 40-Eck usw., 15-Eck, 30-Eck, 60-Eck usw. Zu den genau zu konstruierenden Winkeln sind also noch gekommen: 72^0, 36^0, 18^0, 9^0, $4\frac{1}{2}$ usw., 24^0, 12^0, 6^0, 3^0, $1\frac{1}{2}^0$, $\frac{3}{4}^0$ usw. Vgl. Nr. 116 bis 119. Eigentümlich muß es erscheinen, daß es unmöglich ist, den Winkel 1 Grad mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, und daß man ihn trotzdem zur Grundlage der Gradteilung gemacht hat. Diese Einteilung ist eine durchaus künstliche und wird wohl in der Chronologie der alten Babylonier ihren Grund haben, die das Jahr zu 360 Tagen annahmen. Beiläufig sei bemerkt, daß es unmöglich ist, mit Zirkel und Lineal das regelmäßige 7-Eck, 9-Eck, 11-Eck, 13-Eck, 19-Eck usw. zu konstruieren, während die Konstruktion des 17-Ecks, des 257-Ecks und ihrer Ableitungen möglich ist. Vgl. Bd. III.]

Fig. 123.



307) Ableitung der Beziehungen zwischen den Seiten, den Radien der Berührungskreise des Dreiecks und den betreffenden Tangenten mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre.

In der schon behandelten Fig. 123*) ist $\triangle MCD \sim \triangle M_1CF$ (warum?), daraus folgt

*) Vgl. Fig. 65 und 66 und die dazu gegebenen Bemerkungen, außerdem die Entwickelungen in Nr. 262d, e, f, die zur Heronischen Formel führten. Die

oder
$$p_3 : \varrho = \varrho_1 : p_2$$

(1) $$\varrho \varrho_1 = p_2 p_3.$$

Ferner ist $\triangle AME \sim \triangle AM_1G$, folglich
$$p_1 : p = \varrho : \varrho_1$$
oder

(2) $$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{p_1}{p}.$$

Durch beiderseitige Multiplikation folgt aus Gleichung (1) und (2), da sich ϱ_1 dabei weghebt,
$$\varrho^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{p}$$
oder

(3) $$\varrho = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

Durch beiderseitige Division folgt aus (1) und (2)

(4) $$\varrho_1{}^2 = \frac{p p_2 p_3}{p_1}.$$

Entsprechend findet man $\varrho_2{}^2 = \frac{p p_1 p_3}{p_2}$ und $\varrho_3{}^2 = \frac{p p_1 p_2}{p_3}$.

Wie daraus die Heronische Inhaltsformel $F = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}$ folgt, ist in § 262 gezeigt.

Die Höhen h_1, h_2, h_3 ergeben sich hier einfach aus $\frac{a h_1}{2} = F$ usw. als $h_1 = \frac{2}{a} F = \frac{2}{a}\sqrt{p p_1 p_2 p_3}$ usw.

308) **Aufgabe.** Aus dem Radius r eines Kreises und dem Radius ϱ des ihm einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks den Radius ϱ' des ihm einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks zu berechnen.

Auflösung. In Fig. 124 sei AB die Seite des n-Ecks, $MD = r$ der Radius des ihm umbeschriebenen, MC der des ihm einbeschriebenen Kreises, D der Halbierungspunkt des Bogens AB, AD also die Seite des $2n$-Ecks, ME der gesuchte Radius ϱ', $EF \perp EM$, sodaß F Halbierungspunkt von CD ist. Aus letzterem

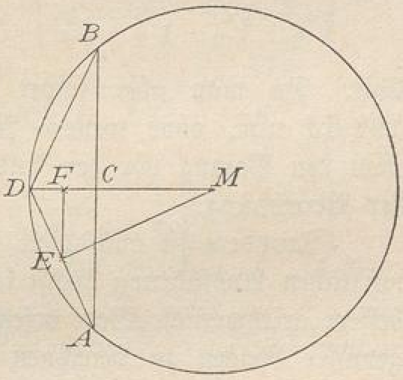
---

dortigen Bezeichnungen sind in Fig. 123 festgehalten, sodaß z. B. $AG = p$, $AE = p_1$, $CF = CG = p_2$, $CD = CE = p_3$ ist, wobei $p = \frac{a+b+c}{2}$, $p_1 = \frac{-a+b+c}{2}$, $p_2 = \frac{a-b+c}{2}$, $p_3 = \frac{a+b-c}{2}$ war.

folgt $MF = \frac{r+\varrho}{2}$. Nach Pythagoras ist aber $ME^2 = MF \cdot MD$, also $\varrho'^2 = \frac{r+\varrho}{2} \cdot r$, d. h. ϱ' mittlere Proportionale zu MF und MD. Demnach ist

(1) $$\varrho' = \sqrt{\frac{(r+\varrho)r}{2}}.$$

Fig. 124.



Für $r = 1$ vereinfacht sich die Formel zu

(2) $$\varrho' = \sqrt{\frac{1+\varrho}{2}}.$$

Bemerkungen. Für das Sechseck ist im letzteren Falle $\varrho_6 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, für das Zwölfeck also $\varrho_{12} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Es folgen

$$\varrho_{24} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$\varrho_{48} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

usw., sodaß bei $6 \cdot 2^n$ die Zahl 2 im Ganzen n-mal unter den Wurzeln erscheint.

Die zugehörigen Vielecksseiten sind allgemein von der Länge $s_n = 2\sqrt{r^2 - \varrho_n^2} = 2\sqrt{1-\varrho_n^2}$. Demnach ist z. B. $s_6 = 1$, $s_{12} = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})}$ $= \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $s_{24} = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}[2+\sqrt{2+\sqrt{3}}]} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $s_{48} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ usw., sodaß s_{12} sich von ϱ_{12} nur um ein Vorzeichen und das Wegfallen des Faktors $\frac{1}{2}$ unterscheidet und von dort ab stets dasselbe stattfindet.

Die Seiten der umbeschriebenen Vielecke werden allgemein im Verhältnis $\frac{r}{\varrho}$, hier im Verhältnis $\frac{1}{\varrho}$ größer. Dies gibt, wenn man sie als Berührende mit t bezeichnet, z. B.

$$t_6 = s_6 \cdot \frac{1}{\varrho_6} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad t_{12} = s_{12} \cdot \frac{1}{\varrho_{12}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}},$$

$$t_{24} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}, \quad t_{48} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \text{ usw.}$$

Für die beiden 48-Ecke folgt, daß π zwischen den Werten

$$\frac{u}{2} = 24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \text{ und } \frac{u'}{2} = 48\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$= \frac{u}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

liegt. Da man aber sofort die Näherungswerte für das 96-Eck, 192-Eck usw. ohne weitere Rechnung hinschreiben kann, so erkennt man den Vorzug vor der früher behandelten Pythagoreischen Methode der Berechnung.

(Trotzdem ist auch diese Methode zur Berechnung von π in der wirklichen Ausführung höchst langwierig und erst in neuerer Zeit durch bessere arithmetische Wege ersetzt worden, bei denen nur wenige Glieder gewisser Reihen zu berechnen sind, um eine Genauigkeit bis z. B. 7 Stellen zu erhalten.)

309). **Aufgabe.** Die Werte $\varrho_4, \varrho_8, \varrho_{16}, \ldots, s_4, s_8, s_{16}, \ldots, t_4, t_8, t_{16}, \ldots, F_4, F_8, F_{16}, \ldots$ in derselben Weise wie in der vorigen Bemerkung die von dem Sechseck ausgehenden zu berechnen.

Man beginne mit $\varrho_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $s_4 = \sqrt{2}$, $t_4 = 2$.

310) **Aufgabe.** Die Werte $\varrho_{10}, \varrho_{20}, \varrho_{40}, \ldots s_{10}, s_{20}, s_{40}, \ldots, t_{10}, t_{20}, t_{40}, \ldots, F_{10}, F_{20}, F_{40}, \ldots$ vom Zehneck aus zu berechnen.*)

Man beginne mit der stetigen Teilung des Radius 1, indem man den größeren Teil, die Seite des Zehnecks, mit x, den Rest mit $(1-x)$ bezeichne. Dann ist

$$(1-x) : x = x : 1,$$

oder $x^2 = 1 - x$, d. h.

$$x^2 + x = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Von diesen Werten ist der mit dem negativen Wurzelzeichen zu verwerfen, da er eine hier nicht verlangte äußere Teilung der Geraden 1 bedeutet. Demnach ist

*) Bei nicht hinreichender Übung im Wurzelrechnen können die über das Zehneck, Fünfeck und Fünfzehneck gestellten Aufgaben einer der oberen Klassen überwiesen werden. Sie bieten interessantes Übungsmaterial zum Umformen der Wurzelausdrücke. F soll die Fläche des Vielecks bedeuten.

$$s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

von wo aus ϱ_{10} und t_{10} leicht mittels der Gleichungen $s_{10} = 2\sqrt{1-\varrho_{10}^2}$ oder $\varrho_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_{10}^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ und $t_{10} = \frac{s_{10}}{\varrho_{10}}$ zu gewinnen sind.

$$t_{10} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}} = \sqrt{\frac{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}} = \sqrt{2\frac{6-2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = 2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}.$$

$$F_{10} = \frac{10}{2} \cdot s_{10} \cdot \varrho_{10} = \frac{10}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

In dieser Weise ist fortzufahren.

311) **Aufgabe.** Die Werte ϱ_5, s_5, t_5 zu berechnen.

Man kann damit beginnen, die zu AC gehörige Höhe des Dreiecks ABC in (Fig. 120) zu berechnen, welche die Hälfte von s_5 ist. Es ergibt sich

$h^2 = AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2$. Dabei ist $AC = 1 - x = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, womit der kleinere Teil der stetig geteilten Geraden 1 gefunden ist. Einsetzung der Werte von AB und AC ergibt

$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{4(5+1-2\sqrt{5}) - (9+5-6\sqrt{5})}{16}$$

$$= \frac{24 - 8\sqrt{5} - 14 + 6\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

Demnach ist

$$s_5 = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Damit ist fortzufahren, wie beim Zehneck, also $\varrho_5 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$,

$$t_5 = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = 2\sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

$$J_5 = \frac{5}{2} \cdot s_5 \cdot \varrho_5 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

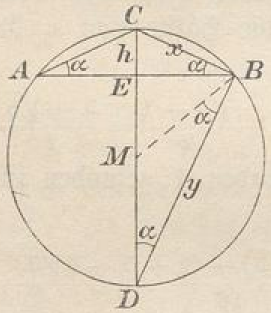
312) **Aufgabe.** Die Werte ϱ_{15}, s_{15}, t_{15}, F_{15} zu berechnen. Die Lösung findet sich in Band II.

Bemerkung. Nach obigem können vorläufig folgende regelmäßige Vielecke schon jetzt berechnet werden: Die 2^n-Ecke, die $3 \cdot 2^n$-Ecke, die $5 \cdot 2^n$-Ecke, die $3 \cdot 5 \cdot 2^n$-Ecke. (Später wird sich zeigen, daß auch die $17 \cdot 2^n$-Ecke, $3 \cdot 17 \cdot 2^n$-Ecke, $3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 2^n$-Ecke und gewisse andere sich konstruieren und berechnen lassen, nicht aber das 7-Eck, 9-Eck, 11-Eck, 13-Eck, 19-Eck, 23-Eck, 25-Eck ... und deren Ableitungen.)

313) **Aufgabe.** Die Seite s_{2n} unmittelbar aus s_n abzuleiten.

Aufl. 1) Arithmetische Lösung. Oben war $\varrho_{2n} = \sqrt{\frac{1+\varrho_n}{2}}$, $s_{2n} = 2\sqrt{1-\varrho_{2n}^2} = 2\sqrt{1-\frac{1+\varrho_n}{2}} = 2\sqrt{\frac{1-\varrho_n}{2}}$. Ferner war $s_n = 2\sqrt{1-\varrho_n^2}$, also $\varrho_n = \sqrt{1-\frac{s_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-s_n^2}$. Demnach ist $s_{2n} = 2\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{4-s_n^2}}{2}}$ oder $s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}$.

Fig. 125.



2) Geometrische Lösung. In Fig. 125 sei $AB = s_n$, $BC = x = s_{2n}$, $MB = r = 1$, dann ist $CE \cdot DE = BC^2$ oder $h(2r-h) = \frac{s_n^2}{4}$. Aus dieser Gleichung folgt zunächst $h = 1 \pm \sqrt{1-\frac{s_n^2}{4}}$. Nur das negative Zeichen ist brauchbar, denn das positive führt auf den größeren Sehnenabschnitt $h_1 = DE$. Demnach ist

$$x = \sqrt{\frac{s_n^2}{4} + h^2} = \sqrt{\left(\frac{s_n}{4}\right)^2 + \left(1-\sqrt{1-\frac{s_n^2}{4}}\right)^2} \text{ oder}$$

$$s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}.$$

Eine einfachere geometrische Lösung ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BMD, die den Winkel α je zweimal enthalten. Daraus folgt $1 : y = x : s_n$. Aus

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{und} \quad 2xy = 2s_n$$

folgt durch beiderseitige Addition

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4 + 2s_n \quad \text{oder} \quad x + y = \sqrt{4+2s_n};$$

durch beiderseitige Subtraktion folgt

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4 - 2s_n \quad \text{oder} \quad x - y = \sqrt{4 - 2s_n}.$$

Ist nun $y > x$, wie in der Figur (was bei $n > 2$ stets der Fall ist), so ist in der letzten Formel das negative Wurzelzeichen zu wählen, in der vorletzten für positives x und y das positive. Durch beiderseitige Subtraktion und Halbierung folgt dann für $x = s_{2n}$

$$s_{2n} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{4 + 2s_n} - \sqrt{4 - 2s_n}\right] = \sqrt{1 + \frac{s_n}{2}} - \sqrt{1 - \frac{s_n}{2}}.$$

Jetzt ist s_{2n} durch zwei einfache Wurzeln dargestellt, bildet man aber oben und hier das Quadrat, so erkennt man die Übereinstimmung der Werte.

314) **Einige Aufgaben.** a) Den Flächeninhalt des regelmäßigen Zehnecks für den Radius 1 des einbeschriebenen Kreises zu berechnen.

b) Den Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfecks für den Radius 1 des einbeschriebenen Kreises zu berechnen.

c) Den Flächeninhalt des regelm. Fünfzehnecks für den Radius 1 des einbeschriebenen Kreises zu berechnen.

d) Dieselben Aufgaben für das regelm. 5-, 10-, 15-Eck von der Seite a zu lösen.

e) Dieselben Aufgaben für beliebige regelm. n-Ecke zu lösen, wo n von der Form 2^ν, $3 \cdot 2^\nu$, $5 \cdot 2^\nu$, $15 \cdot 2^\nu$ ist.

315) **Aufgabe.** Die Kreisfläche zu berechnen.

Auflösung. Der Kreis läßt sich, wie schon im Vorkursus § 141 gezeigt wurde, als regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten. Die Fläche des regelmäßigen Vielecks war $F = \varrho \frac{u}{2}$, wenn u der Umfang, ϱ der Radius des einbeschriebenen Kreises war. Für unendlich viele Seiten streben aber ϱ und r derselben Grenze zu, sodaß man beide vertauschen kann. Der Kreisumfang aber ist beim Radius 1 von der Länge 2π, beim Radius r von der Länge $u = 2r\pi$, also ist der Kreisinhalt $F = r\pi \frac{2r}{2} = \pi r^2$, wo π der schon mehrfach angegebene Wert ist.

316) Berechnung von Kreisbogen und Teilen der Kreisfläche.

a) Der Kreisbogen vom Zentriwinkel α^0 ist, wie schon in Nr. 56 gezeigt wurde, von der Länge

$$\widehat{a} = 2\pi r \frac{\alpha^0}{360^0} = \pi r \frac{\alpha^0}{180^0}.$$

b) Der zugehörige **Kreissektor** hat die Fläche

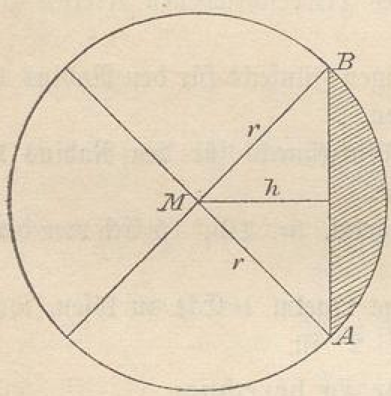
$$F = \pi r^2 \frac{\alpha^0}{360^0},$$

denn auf jeden Grad kommt der 360^{te} Teil der Kreisfläche. Alle zu gleichen Zentriwinkeln verschiedener Kreise gehörigen Sektoren sind einander ähnlich.

c) Das zugehörige **Kreissegment** hat als Fläche den Unterschied des zugehörigen Sektors und des von der Sehne und den Grenzradien gebildeten Dreiecks. Alle zu gleichen Zentriwinkeln gehörigen Segmente verschiedener Kreise sind einander ähnlich.

Bemerkung. Manche Segmente lassen sich leicht berechnen. So handelt es sich in Fig. 126 um das zum Winkel 90^0 gehörige Segment. Dabei ist der Sektor $ABM = \pi r^2 \cdot \frac{90}{360} = \frac{\pi r^2}{4}$. Das Dreieck MAB würde allgemein aus der Grundlinie AB und der Höhe h zu berechnen sein, hier aber ist es bequemer, die Grundlinie r und die Höhe r zu nehmen, also $r \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{2}$. Folglich ist:

Fig. 126.



$$\text{Segment} = \text{Sektor} - \text{Dreieck}$$

$$= \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = ?.]^{*})$$

Das große Segment hat die Fläche

$$\pi r^2 - \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = \frac{3}{4}\pi r^2 + \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{4}[3\pi + 2].$$

Kann man eine Kreisteilung mit Zirkel und Lineal durchführen, so lassen sich auch die entsprechenden Segmente leicht nach den obigen Methoden berechnen.

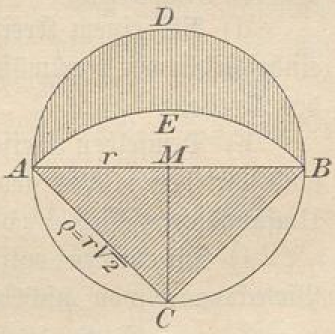
317) **Aufgabe.** In Fig. 127 sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, dem ein Kreis umbeschrieben ist; außerdem ist um C ein Kreisbogen mit dem Radius CA gelegt, der ein (schraffiertes) Kreisbogenzweieck, die sog. **Lunula des Hippokrates**, abgeschnitten hat. Es soll be-

*) Die Klammer kann mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden, je nachdem man $\pi = 3,14$ oder gleich 3,14156 oder gleich den angegebenen Näherungswerten $\frac{22}{7}$ oder $\frac{355}{113}$ macht.

wiesen werden, daß diese mondförmige Figur denselben Inhalt hat wie das Dreieck.

Die drei unschraffierten Kreissegmente gehören zum Zentriwinkel 90^0, sind demnach ähnlich, das über AB stehende ist also nach Pythagoras die Summe der beiden anderen. Zieht man also das größere von dem oberen Halbkreise ab, die beiden anderen von dem unteren, so müssen die übrigbleibenden Reste gleich groß sein. Demnach ist die Lunula von derselben Fläche wie das Dreieck.

Fig. 127.



Bemerkung. Mit Hilfe dieses Satzes hoffte man der „Quadratur des Zirkels" näher zu kommen, d. h. der Konstruktion eines Quadrates, welches dieselbe Fläche haben soll, wie der Kreis. Prüft man aber den Satz durch Rechnung, so erkennt man, wie haltlos diese Hoffnung war. Setzt man nämlich $MA = r$, $CA = \varrho = r\sqrt{2}$, so ist der Halbkreis von der Fläche $F = \frac{r^2\pi}{2}$, das Segment AEB nach vorigem Beispiele von der Fläche $F_1 = \frac{\varrho^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = \frac{2r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = \left(\frac{r^2\pi}{2} - r^2\right)$. Demnach ist $F - F_1 = \frac{r^2\pi}{2} - \left(\frac{r^2\pi}{2} - r^2\right) = r^2$, d. h. gleich dem Inhalte des Dreiecks ABC, und gerade der den Faktor π enthaltende Teil ist weggefallen.

[Erst in neuester Zeit ist durch Lindemann bewiesen worden, daß die Konstruktion der Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal unmöglich ist.]

318) **Aufgabe.** Setzt man den Kreis AEB nach unten fort, so entsteht eine neue größere Lunula, deren Berechnung ausgeführt und zu den Restsegmenten des kleineren Kreises in Beziehung gesetzt werden soll. —

319) **Einige Übungsaufgaben.** Bei den nachstehenden Aufgaben ist zu raten, zunächst die umgekehrte Aufgabe durch Rechnung zu lösen. Aus dem Resultate ist dann die Lösung der gestellten Aufgabe leicht abzuleiten.

a) Bei einem regelmäßigen n-Eck sei der Umfangsunterschied d des Um- und des In-Kreises gegeben. Wie groß ist die Seite des n-Ecks? (Die Fälle $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, \cdots$ sollen durchgeführt werden.)

b) Bei einem regelmäßigen n-Eck sei der Flächenunterschied des Um- und des In-Kreises gegeben. Wie groß ist die Seite des n-Ecks? (Dieselben Fälle sollen behandelt werden.)

c) Bei einem Kreise sei der Umfangsunterschied des um- und des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks bekannt. Wie groß ist der Radius des Kreises? (Dieselben Fälle.)

d) Bei einem Kreise sei der Flächenunterschied des um- und des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks bekannt. Wie groß ist der Radius des Kreises?

e) Demselben Kreise sei ein regelmäßiges Dreieck und ein Quadrat einbeschrieben. Wie groß ist der Radius des Kreises, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Flächenunterschied dieser Vielecke bekannt ist?

f) Die beiden entsprechenden Aufgaben für andere regelmäßige Vieleckspaare von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen, z. B. $n = 3$, $n_1 = 5, 6, 10, \cdots$; $n = 4$, $n_1 = 5, 6, 10$ usw.

g) Demselben Kreise sei ein regelmäßiges Dreieck und ein Quadrat umbeschrieben. Wie groß ist der Kreisradius, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Flächenunterschied beider Vielecke bekannt ist?

h) Die beiden entsprechenden Aufgaben für andere regelmäßige Vieleckspaare von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen.

i) Demselben Kreise sei ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, ein Quadrat umbeschrieben. Wie groß ist der Kreisradius, wenn a) der Umfangsunterschied, b) der Inhaltsunterschied der beiden Figuren bekannt ist?

k) Dieselben Aufgaben für andere regelmäßige Figuren von nicht übereinstimmender Seitenzahl zu lösen.

l) Der Umfangsunterschied eines Kreises und des umbeschriebenen Fünfecks sei bekannt. Wie groß ist der Kreisradius und die Fünfecksseite?

m) Der Inhaltsunterschied eines Kreises und des einbeschriebenen Fünfecks sei bekannt. Wie groß ist der Kreisradius und die Fünfecksseite?

n) Dieselben Aufgaben für andere regelmäßige Vielecke zu lösen.

III. Anwendungen der Algebra auf die Geometrie.

a) Geometrische Deutung und Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

320) In diesem Abschnitte sollen a, b und c stets Geraden von gegebener Länge bedeuten, x die Länge der gesuchten Geraden. Dann gelten folgende Beziehungen: