# Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig und Berlin, 1904**

Sachliche und genetische Definitionen. Grundsätze und Axiome. Schema für die Behandlung der Lehrsätze. Direkter und indirekter Beweis. Bemerkungen über Konstruktionen und Berechnungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

## f) Schlußbemerkungen zur planimetrischen Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

a) Ein wesentlicher Bestandteil der Planimetrie liegt in den Erklärungen (Definitionen) der in ihr zu behandelnden Begriffe.

Diese Begriffe sind entweder Grundbegriffe oder zusammengesetzte Begriffe.

Grundbegriffe sind z. B. Punkt, Linie, Fläche.

Zusammengesetzte Begriffe sind z. B. rechtwinkliges Dreieck, Parallelogramm.

Eine Erklärung soll alles Notwendige enthalten, aber nur das Notwendige. Sie ist entweder eine sachliche Erklärung (Realerklärung) oder eine Entstehungserklärung (genetische Erklärung). So kann man z. B. die Gerade folgendermaßen erklären: Die Gerade ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten. Man kann aber auch sagen: Die Gerade entsteht durch die Bewegung eines stets in derselben Richtung wandernden Punktes.

Aus der Erklärung eines planimetrischen Gebildes müssen sich dessen wesentliche Eigenschaften ableiten lassen. Die Ableitung der Eigenschaften der Gebilde ist eine Hauptaufgabe der Mathematik. Sie muß in streng logischer Weise erfolgen. (Die Logik ist die Wissenschaft, die sich mit den Denkformen, besonders mit den Schlußfolgerungen beschäftigt.)

b) Dasjenige, was über einen planimetrischen (allgemeiner einen mathematischen) Begriff ausgesagt wird, nennt man einen Satz. Ein solcher Satz kann eine allgemein anerkannte Grundwahrheit (ein Axiom) sein oder ein des Beweises bedürftiger Lehrsatz.

$\alpha$) Als allgemeine Grundsätze werden in der Regel folgende angegeben.*)

1) Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie untereinander gleich. Ist $a = c$ und $b = c$, so ist $a = b$.
2) Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a + b = a_1 + b_1$.
3) Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a - b = a_1 - b_1$.
4) Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a \cdot b = a_1 \cdot b_1$.

*) Als erster Grundsatz wird häufig folgender angegeben: „Jede Größe ist sich selbst gleich.“ Da jedoch zur Gleichheit mindestens zwei Größen gehören, wird er besser übergangen.

5) Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

Jedem dieser Gleichheitssätze kann ein Ungleichheitssatz zur Seite gestellt werden, z. B. Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches. Ist z. B. $a = a_1$, aber $b > b_1$, so ist $a + b > a_1 + b_1$; ist $a = a_1$, aber $b < b_1$, so ist $a + b < a_1 + b_1$.

Dem ersten Grundsatze wird häufig folgender Ungleichheitssatz zur Seite gestellt:

6) Ist von zwei gleichen Größen die eine größer (bezw. kleiner) als eine dritte, so ist auch die andere größer (bezw. kleiner) als die dritte.

Im Bereiche der positiven Größen gilt noch folgender Grundsatz:

7) Der Teil ist kleiner als das Ganze, oder das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

Diese Grundsätze sind teils schon zur Anwendung gekommen, teils werden sie noch Anwendung finden.

Jeder der ersten sechs Sätze enthält eine Bedingung, unter der das Ausgesagte richtig ist. Die Bedingung nennt man die Voraussetzung, die Aussage heißt die Behauptung. Auf einen Beweis der letzteren wird, wie schon gesagt, verzichtet, weil es sich um allgemein als richtig anerkannte Denkformen (Schlußfolgerungen) handelt.

β) Neben den allgemeinen Grundsätzen gibt es planimetrische Grundsätze (planimetrische Axiome), bei denen auch auf einen Beweis verzichtet wird. So sagt man z. B.: „In der Ebene lassen sich durch jeden Punkt unendlich viele gerade Linien legen."

[Bei manchen Sätzen solcher Art können Zweifel herrschen, ob sie zu den Grundsätzen oder zu den eines Beweises bedürftigen Lehrsätzen gehören.*) Gerade in neuerer Zeit sind in dieser Beziehung über die Grundlagen der Geometrie umfangreiche Untersuchungen scharfsinnigster Art gemacht worden. Zu allgemeiner Einigung ist man noch nicht gelangt. Die Schule kann auf diese kritischen Streitfragen nicht eingehen. Sie nimmt daher manche Sätze als planimetrische Axiome an, die vielleicht später von der strengen Systematik nicht als solche anerkannt werden.

Unter diesen Axiomen hat das sogenannte elfte Axiom des Euklid eine hervorragende Rolle gespielt. Es handelt sich um

*) Die eingeklammerten Bemerkungen können vorläufig überschlagen werden, müssen aber dann später besprochen werden.

den bekannten Satz, daß, wenn bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden korrespondierende Winkel gleich sind, die letzteren Geraden einander nicht schneiden können, wie weit man sie auch verlängere. Zweitausend Jahre lang haben auch bedeutende Mathematiker den Satz streng zu beweisen versucht. Erst Gauß und einige seiner Zeitgenossen haben erkannt, daß ein strenger Beweis des Satzes unmöglich ist, daß also jener scharfsinnige Grieche ihn mit vollem Rechte als Axiom hingestellt hat. (Nimmt man diesen Satz nicht als richtig an, so kommt man auf die verschiedenen Formen nichteuklidischer Geometrien.) Der Satz kann übrigens durch den Satz ersetzt werden, daß die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten sei. Geschieht dies, so ist dieser Satz als Axiom zu betrachten.

Im allgemeinen wird anerkannt, daß die Schule eine größere Anzahl von Axiomen nötig hat als die Wissenschaft.

$\gamma$) Bei einem Lehrsatze dagegen handelt es sich um Voraussetzung, Behauptung und Beweis.

Soll z. B. bewiesen werden, daß gleichen Seiten eines Dreiecks gleiche Winkel gegenüberliegen, so wird z. B. vorausgesetzt, daß $ABC$ ein Dreieck und daß $AC = BC$ ist. Behauptet wird, daß $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \alpha$ sei. Um den Beweis zu liefern, hat man im vorliegenden Falle eine Hilfskonstruktion nötig. Entweder fällt man von $C$ aus auf die Gegenseite ein Lot oder man verbindet $C$ mit der Mitte der Gegenseite oder man halbiert den Winkel bei $C$. Dann beweist man, daß durch die Hilfslinie das Dreieck in zwei kongruente Teile zerlegt wird. Daraus folgt die Gleichheit der homologen Winkel $\beta$ und $\alpha$.

So ergibt sich für jeden Lehrsatz ein bestimmtes Schema: 1) Der Lehrsatz selbst, 2) die Voraussetzung, 3) die Behauptung, 4) die etwa nötige Hilfskonstruktion, 5) der Beweis.

Zur Übung im streng logischen Denken ist es durchaus erforderlich, dieses Schema an vielen Beispielen durchzuführen. Auch ist alles, was im Beweise gesagt wird, zu begründen, sei es durch Verweisung auf den entsprechenden Grundsatz oder durch Angabe eines bereits bewiesenen Lehrsatzes. Im obigen Beispiele ist z. B. der angewandte Kongruenzsatz zu nennen. Nur der Kürze halber ist in diesem Buche das angegebene Schema nicht durchgängig angewandt.

Der Beweis ist entweder ein unmittelbarer, d. h. ein direkter Beweis, oder ein mittelbarer, d. h. ein indirekter Beweis. Bei dem ersteren wird der Nachweis der Richtigkeit wirk-