



Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- und Realschulen neu bearbeitet

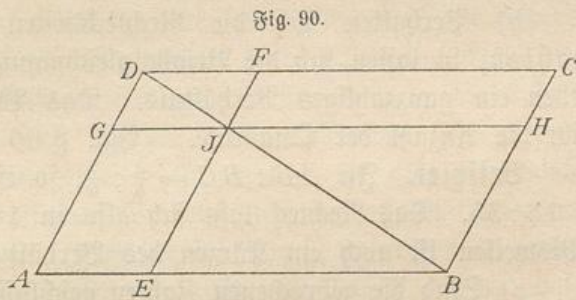
Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

Berechnungen am Rechteck und Dreiecke. Heronische Flächenformel. Mittlere Proportionale. Trapez. Tangentenviereck. Pythagoreische Zahlen. Kreis als regelmäßiges Vieleck.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-94706](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-94706)

Dreiecke ziehe man $\triangle BEJ$, von dem anderen das gleiche Dreieck BHJ ab, sodann von dem ersten noch $\triangle DGJ$, vom anderen das gleiche Dreieck DEJ , dann müssen von jedem der großen Dreiecke flächengleiche Stücke übrig bleiben, sodaß $\square AEJG = \square JHCF$ ist. [Man nennt die beiden Parallelogramme Ergänzungsparallelogramme, weil sie nötig sind, um die beiden von der Diagonale geschnittenen Parallelogramme zum ganzen Parallelogramm $ABCD$ zu ergänzen.]



Bemerkung. Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so erhält man flächengleiche Ergänzungsrechtecke; ist es ein Rhombus, so werden die Ergänzungsparallelogramme kongruent; ist es ein Quadrat, so werden die Ergänzungsrechtecke kongruent.

Der Satz führt zur Lösung folgender

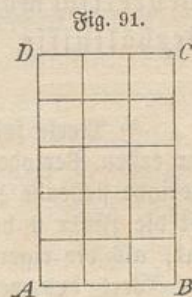
Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein flächengleiches mit denselben Winkeln zu verwandeln, von dem eine Seite gegeben ist.

Man betrachte das gegebene Parallelogramm als das Ergänzungsparallelogramm der Fig. 90 und JH oder JF als die gegebene Seite des gesuchten. Die Figur ist leicht zu vervollständigen, jedoch braucht man nicht alle Linien zu zeichnen.

e) Längen- und Flächenberechnungen an geradlinigen Gebilden.

260) Zerlegung des Rechtecks in gleiche Quadrate und Formel für die Rechtecksfläche.

a) Hat ein Rechteck Seiten, die sich verhalten wie zwei ganze Zahlen m und n , so läßt es sich insoweit Quadrate zerlegen, wie das Produkt der Zahlen angibt, also in $m \cdot n$ Quadrate. (Vgl. § 63 des Vorkurses.) Man nehme dabei an, daß m und n keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Das Auffuchen des größten gemeinschaftlichen Teilers gehört in die Arithmetik.



Beispiel. Ist $AB:BC = 3:5$, so handelt es sich um $3 \cdot 5 = 15$

Quadrate. Dasselbe gilt für die Verhältnisse $6 : 10$, $9 : 15$ usw. Man verlangt stets die möglichst kleine Anzahl von Quadraten. (Fig. 91.)

Es fragt sich jedoch, ob die Einteilung in Quadrate auch für nicht ganze Zahlen möglich ist.

b) Verhalten sich die Rechtecksseiten wie zwei gebrochene Zahlen, so lassen sich die Brüche gleichnamig machen, und die Zähler geben ein ganzzahliges Verhältnis. Das Produkt der neuen Zahlen gibt die Anzahl der Quadrate. (Vgl. § 66 des Vorkurses.)

Beispiel. Ist $AB : BC = \frac{3}{5} : \frac{7}{6}$, so ist auch $AB : BC = \frac{18}{30} : \frac{35}{30} = 18 : 35$. Das Rechteck läßt sich also in $18 \cdot 35$ Quadrate einteilen. (Bisweilen ist noch ein Kürzen des Verhältnisses möglich.)

c) Sind die gebrochenen Zahlen geschlossene Dezimalbrüche, so ist das ganzzahlige Verhältnis leicht zu finden; z. B. $AB : BC = 1,23 : 2,156$ gibt $1230 : 2156$. Es kann noch in $615 : 1078$ gekürzt werden. Die Anzahl der Quadrate ist $615 \cdot 1078$.

d) Verhalten sich die Rechtecksseiten so, daß im Verhältnisse ein oder zwei endlose periodische Dezimalbrüche vorkommen, so verwandelt man diese in gewöhnliche Brüche und verfährt wie vorher.

Beispiel. Das Verhältnis sei $2 : 5,23815481548154 \dots$

Man setze den Dezimalbruch gleich x , sodaß

$$1\,000\,000x = 5\,238\,154,81548154 \dots, \text{ und}$$

$$100x = 523,81548154 \dots, \text{ also durch}$$

beiderseitige Subtraktion

$$999\,900x = 5\,237\,631,00000000 \dots, \text{ und demnach}$$

der Dezimalbruch $x = \frac{5\,237\,631}{999\,900}$ ist.*) Jetzt ist das Verhältnis der Rechtecksseiten $2 : \frac{5\,237\,631}{999\,900}$, oder $1\,999\,800 : 5\,237\,631$. Die Anzahl der Quadrate ist demnach das Produkt der beiden letzten Zahlen. Dabei sei vorausgesetzt, daß Kürzungen nicht mehr möglich sind.

In allen diesen Fällen war das Verhältnis in ein ganzzahliges zu verwandeln, und die Quadratteilung war theoretisch möglich. Solche Verhältnisse nennt man rationale Verhältnisse. Die Seite des gefundenen Quadrates heißt das ge-

*) Merke folgende kurzgefaßte Regel: Schreibe die Zahl bis zum Schluß der ersten Periode als ganze Zahl hin, ziehe von ihr ab die vor der ersten Periode stehende Zahl, und dividiere den Rest durch eine Zahl, die vorn so oft die Ziffer 9 hat, als die Periode Stellen zählt, und hinten soviel Nullen hat, als die eigentliche Vorperiode Stellen zählt. Der entstehende Bruch ist der Wert des periodischen Dezimalbruchs in gewöhnlicher Bruchform und kann häufig noch gekürzt werden. Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens ergibt sich aus dem obigen Beispiele.

gemeinschaftliche Maß der beiden Rechtecksseiten. Sind die möglichen Kürzungen durchgeführt, so handelt es sich um das größte gemeinschaftliche Maß.

[e] Unmöglich wird die Einteilung des Rechtecks in kleine Quadrate, sobald das Verhältnis kein rationales, also ein irrationales ist. Dies findet z. B. statt, wenn die eine Zahl eine ganze, die andere ein endloser Dezimalbruch ohne Periode, d. h. eine Irrationalzahl ist. Solche sind z. B. die Quadratwurzeln aus den Primzahlen, die Kubikwurzeln usw. aus solchen und die durch Multiplikation mit ganzen Zahlen aus diesen Irrationalzahlen entstehenden. Es gibt aber noch Irrationalzahlen, die nicht mit der Wurzelausziehung zusammenhängen. Eine solche ist z. B. die mit dem Kreisumfange zusammenhängende Zahl $\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\dots$. Der Nachweis dafür, daß eine Zahl der letzteren Gruppe eine Irrationalzahl ist, läßt sich nur schwierig führen und geht über den Standpunkt der Klasse hinaus. Man kann π als einen Dezimalbruch mit unendlich langer Periode, aber auch als Dezimalbruch mit unendlich langer Vorperiode betrachten. Im ersteren Falle kann man daher $\pi = \frac{314\,159\,265\dots}{99\,999\,999\dots}$ setzen, was einen Bruch gibt, der im Zähler und im Nenner unendlich viele Stellen hat. Denkt man sich die letzte (unendlich fern liegende) 9 gestrichen, so erhält man als gleichwertig $\pi = \frac{314\,195\,265\dots}{100\,000\,000\dots}$. Auch hier sind Zähler und Nenner bis ins Unendliche fortzusetzen. Ein irrationales Verhältnis kann also nicht als Verhältnis zweier endlicher ganzen Zahlen dargestellt werden.

Stehen demnach die Seiten eines Rechtecks in einem irrationalen Verhältnis, so müßte jede Seite in unendlich viele unendlich kleine Teile zerlegt werden, wenn man eine Einteilung in kleine Quadrate erzielen wollte, die Quadrate würden unendlich klein und unendlich zahlreich werden. Die beiden Seiten haben also kein gemeinschaftliches Maß von endlicher Größe, man nennt sie daher inkommensurabel. So sind z. B. zwei Gerade von den Längen 1 und $\sqrt{2}$ inkommensurabel.

In solchen Fällen begnügt man sich im praktischen Leben mit Annäherungswerten. Entweder beschränkt man den Dezimalbruch auf eine endliche Anzahl von Stellen, was z. B. bei $1:\pi$ auf $100:314$, oder auf $1\,000\,000:3\,141\,593$, oder auf $1\,000\,000\,000:3\,141\,592\,654$ usw. führt. Oder man sucht Näherungswerte, wie $\frac{22}{7} = 3,142\,857\dots$, was allerdings zu groß ist, oder wie $\frac{355}{113} = 3,141\,592\,9\dots$, was nur sehr wenig abweicht. Der Wert $\frac{22}{7}$ war schon dem Archimedes bekannt. Zur Auffindung des zweiten und anderer Näherungswerte gibt die Arithmetik geeignete Methoden an.]

f) Als Flächenmaß kann man ein Quadrat von beliebiger Seitenlänge wählen. Im praktischen Leben wählt man die Seitenlänge als eine der Längeneinheiten des metrischen Systems. Quadrate von 1, 2, 3, 4, ... cm Seitenlänge haben dabei Flächen von $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$, ... qem oder $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ qem oder cm^2 . Ein Quadrat von vierfacher Fläche erhält man durch geeignetes Anlegen von drei Quadraten derselben Größe, ein Quadrat von neunfacher Fläche durch geeignetes Anlegen von noch fünf solchen Quadraten an das vorige usw. So ergibt sich folgende Tabelle der Quadratzahlen:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1 + 3 \\ 3^2 &= 1 + 3 + 5 \\ 4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\ 5^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ &\vdots \end{aligned}$$

sodas jede Quadratzahl gleich einer Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen ist. Die Arithmetik lehrt, das, wenn n eine beliebige ungerade Zahl ist, $1 + 3 + 5 + \dots + n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ist, was an der Tabelle auf die Richtigkeit erprobt werden kann. (Darüber und über die Anwendungen vergleiche man den Vorkursus § 58 bis § 61.)

g) Ist das Rechteck in kleine Quadrate zerlegt, sodas z. B. die Grundlinie in 3, die Höhe in 5 gleiche Teile zerlegt ist, also $3 \cdot 5 = 15$ Quadrate vorhanden sind, und betrachtet man jedes Quadrat als Flächeneinheit, so handelt es sich um $3 \cdot 5 = 15$ Flächeneinheiten. Ist allgemeiner die Grundlinie des Rechtecks von der Länge b , die Höhe von der Länge h , beides in Zentimetern gegeben, so ist die Fläche gleich bh Quadratcentimetern, oder, wie man einfacher sagt,

$$F = bh.$$

Diese Formel*) gilt nach obigem auch für gebrochene Zahlen. Ist z. B. $b = 3\frac{1}{2} \text{ cm} = \frac{7}{2} \text{ cm}$, $h = 5\frac{2}{3} \text{ cm} = \frac{17}{3} \text{ cm}$, so mache man die Brüche gleichnamig, sodas $b = \frac{21}{6} \text{ cm}$, $h = \frac{34}{6} \text{ cm}$ ist. Jetzt teile

*) Da zu jedem Rechteck oder Parallelogramm, überhaupt zu jeder geradlinig begrenzten Fläche ein gleich großes Quadrat gehört, dessen Seite gleich f , dessen Fläche gleich f^2 sei, so wird statt F vielfach geschrieben f^2 , sodas die Formel lautet $f^2 = bh$. Dadurch wird angedeutet, das es sich links, wie rechts, um einen Ausdruck zweiter Dimension handelt. Diese sehr zu empfehlende Schreibweise ist leider noch nicht allgemein geworden.

man b in 21, h in 34 gleiche Teile ein und konstruiere die zugehörigen $21 \cdot 34 = 714$ Quadrate von je $\frac{1}{6}$ cm Seitenlänge, also von $\frac{1}{36}$ qcm Fläche. Das ganze Rechteck hat also $\frac{714}{36}$ qcm $= \frac{21}{6} \cdot \frac{34}{6}$ qcm $= \frac{7}{2} \cdot \frac{17}{3}$ qcm $= bh$ Quadratcentimeter Fläche. Die Formel $F = bh$ gilt also auch für gebrochene „Maßzahlen“ b und h , also auch für endliche Dezimalbrüche und für unendliche Dezimalbrüche mit Periode, also für rationales Verhältnis $b : h$.

[Für irrationales Verhältnis kann man sie ebenfalls als streng richtig beweisen, hier aber soll im Anschluß an e) nur gesagt werden, daß sie um so richtiger ist, je mehr Dezimalstellen man bei b und h berücksichtigt.]

261) Jedes Parallelogramm ist inhaltsgleich einem Rechteck von derselben Grundlinie b und derselben Höhe h . Sein Inhalt ist daher ebenfalls gegeben durch

$$F = bh.$$

262) a) Jedes Dreieck von der Grundlinie b und der Höhe h ist die Hälfte eines entsprechenden Parallelogramms bzw. Rechtecks. Die Inhaltsformel ist also

$$(1) \quad F = \frac{bh}{2}.$$

b) Bezeichnet man die Dreiecksseiten als a, b, c , die zugehörigen Höhen als h_1, h_2, h_3 , so folgt, daß $\frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2}$ oder $ah_1 = bh_2 = ch_3$ ist. Daraus aber folgt

$$(2) \quad a : b = h_2 : h_1, \quad b : c = h_3 : h_2, \quad c : a = h_1 : h_3,$$

d. h. zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Höhen.

c) Statt der ersten dieser Proportionen kann man auch schreiben:

$$a : b = 1 : \frac{h_1}{h_2} \quad \text{oder} \quad a : b = \frac{h_1}{h_1} : \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2},$$

demnach lassen sich diese Proportionen in folgende gemeinschaftliche Formel zusammenfassen:

$$(3) \quad a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3},$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die umgekehrten (reziproken) Werte der Höhen oder wie $h_2 h_3 : h_3 h_1 : h_1 h_2$.

d) Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, und ist ρ der Radius des Inkreises, so ergibt sich eine weitere Flächenformel. Verbindet man nämlich in Fig. 65 den Mittelpunkt M des Kreises mit den

Ecken A, B, C des Dreiecks und mit den Berührungspunkten, so wird $\triangle AMB = \frac{a\varrho}{2}$, $\triangle BMC = \frac{b\varrho}{2}$, $\triangle CMA = \frac{c\varrho}{2}$, der Gesamthalt wird also $\frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} = \frac{(a+b+c)\varrho}{2}$, wofür man, da $a+b+c$ gleich dem Umfange u ist, auch schreiben kann $F = \frac{u\varrho}{2}$. Der Ausdruck $\frac{a+b+c}{2}$ war aber dort mit p bezeichnet, also ist der Dreiecksinhalt auch

$$(4) \quad F = \frac{a+b+c}{2} \varrho = \frac{u}{2} \varrho = p\varrho.$$

(In Worten?)

e) Verbindet man in Fig. 66 den Mittelpunkt M_1 des die Seite berührenden An-Kreises, dessen Radius ϱ_1 sei, mit den Ecken des Dreiecks und den Berührungspunkten, so ist

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle BMC + \triangle CMA - \triangle BMC = \frac{b\varrho_1}{2} + \frac{c\varrho_1}{2} - \frac{a\varrho_1}{2} \\ &= \frac{\varrho_1}{2} (b+c-a). \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{b+c-a}{2}$ wurde aber dort mit p_1 bezeichnet, also ist

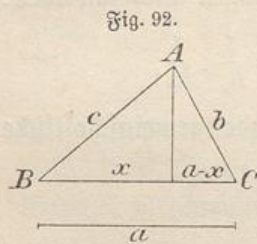
$$(5) \quad F = \frac{b+c-a}{2} \varrho_1 = p_1 \varrho_1.$$

Ebenso ist es mit p_2, p_3 , bzw. ϱ_2, ϱ_3 . Man hat also die Gesamtformel

$$(6) \quad F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3$$

oder

$$(6)^* \quad F = \frac{a+b+c}{2} \varrho = \frac{-a+b+c}{2} \varrho_1 = \frac{a-b+c}{2} \varrho_2 = \frac{a+b-c}{2} \varrho_3.$$



f) Daraus ergibt sich noch eine andere Formel:*) Fig. 92 stellt ein Dreieck mit der Höhe $h_1 = AD$ dar.***) Diese soll aus den Seiten a, b, c berechnet werden. Man setze $BD = x$, also $DC = a - x$ dann ist nach Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken

*) Der Abschnitt f) kann vorläufig zurückgestellt werden, wenn die Lehre von den Quadratwurzeln noch nicht besprochen ist.

**) D ist in die Zeichnung einzutragen.

$$x^2 = c^2 - h_1^2$$

$$(a - x)^2 = b^2 - h_1^2$$

oder

$$a^2 + x^2 - 2ax = b^2 - h_1^2.$$

Setzt man hier den Wert von x^2 aus der ersten Gleichung ein, so folgt

$$a^2 + c^2 - h_1^2 - 2ax = b^2 - h_1^2,$$

oder, wenn man h_1^2 beiderseits streicht,

$$a^2 + c^2 - 2ax = b^2.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Dies setze man ein in die erste Gleichung, die sich auch schreiben läßt als

$$h_1^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)^*$$

$$= \left[c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right] \cdot \left[c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right].$$

Macht man die Ausdrücke in jeder Klammer gleichnamig, so erhält man

$$h_1^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$

$$= \frac{[(a + c)^2 - b^2] \cdot [b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}.$$

In jeder Klammer steht die Differenz zweier Quadrate, die sich wieder in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen läßt, und so folgt

$$h_1^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)^*}{4a^2}$$

oder

$$h_1^2 = \frac{16}{4a^2} \cdot \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} = \frac{4}{a^2} p p_1 p_2 p_3.$$

Demnach ist die Höhe h_1

$$7) \quad h_1 = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}}$$

$$= \frac{2}{a} \sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Ebenso ist

$$h_2 = \frac{2}{b} \sqrt{p p_1 p_2 p_3}, \quad h_3 = \frac{2}{c} \sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Schafft man in Gleichung (7) $\frac{2}{a}$ nach links, so steht dort $\frac{a h_1}{2} = F$,

*) Summe mal Differenz zweier Zahlen gibt die Differenz ihrer Quadrate.

also die Fläche des Dreiecks. So erhält man die berühmte Heronische Formel für den Inhalt des Dreiecks:

$$(8) \quad F = \sqrt{pp_1p_2p_3}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Vergleicht man diese mit

$$F = pq = p_1q_1 = p_2q_2 = p_3q_3,$$

so findet man zunächst

$$pq = \sqrt{pp_1p_2p_3} \quad \text{oder} \quad q = \frac{1}{p} \sqrt{pp_1p_2p_3} = \sqrt{\frac{pp_1p_2p_3}{p^2}} = \sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}.$$

In ähnlicher Weise sind die anderen Formeln zu behandeln. Im ganzen ergibt sich

$$(9) \quad q = \sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{pp_2p_3}{p_1}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{pp_1p_3}{p_2}}, \quad q_3 = \sqrt{\frac{pp_1p_2}{p_3}},$$

wo für die p die aus den Seiten hergestellten Ausdrücke $\frac{a+b+c}{2}$ usw. eingesetzt werden können. Man halte dabei fest, daß nach den Fig. 65 und 66 p den halben Umfang des Dreiecks, p_1, p_2, p_3 einfache Tangentenlängen bedeuten.

Bemerkung. Bildet man aus (9) das Produkt der vier Radien und kürzt man den entstehenden Bruch, so läßt sich die Wurzel ausziehen und es entsteht

$$qq_1q_2q_3 = pp_1p_2p_3 = F^2$$

oder

$$(10) \quad F = \sqrt{qq_1q_2q_3} = \sqrt{pp_1p_2p_3},$$

sodaß sich die Fläche des Dreiecks auch aus den Radien der Berührungskreise berechnen läßt und das Produkt der Radien gleich dem Produkte der p ist. — Noch andere Formeln lassen sich durch Multiplikation und Division finden, z. B. $qq_1 = p_2p_3$, $\frac{q}{q_1} = \frac{p_1}{p}$ usw.

Ferner ist nach (7)

$$h_1h_2h_3 = \frac{8}{abc} \sqrt{(pp_1p_2p_3)^3} = \frac{8}{abc} \sqrt{(qq_1q_2q_3)^3} = \frac{8}{abc} F^3,$$

sodaß z. B.

$$F = \frac{1}{2} \sqrt[3]{abch_1h_2h_3} \text{ ist.}$$

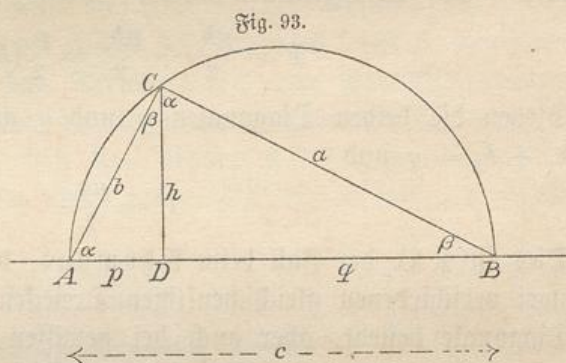
Die Heronische Formel soll in der Ähnlichkeitslehre kürzer abgeleitet werden. Sie bedeutet einen großen Fortschritt in der Lehre vom Dreieck.

263) Eine Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks. Fällt man von einem beliebigen Punkte P innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks Lote l_1, l_2, l_3 auf dessen Seiten und verbindet man P mit den Ecken des Dreiecks, so ist die Fläche des Dreiecks $F = \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CAP = \frac{al_1}{2} + \frac{al_2}{2} + \frac{al_3}{2} = \frac{a}{2}(l_1 + l_2 + l_3)$. Also ist $l_1 + l_2 + l_3 = \frac{2F}{a} = h$. Folglich gilt der Satz:

Die Summe der von einem beliebigen Punkte innerhalb des gleichseitigen Dreiecks auf dessen Seite gefällten Lote ist konstant und zwar gleich der Höhe des Dreiecks.

Liegt der Punkt P außerhalb des Dreiecks, so ist entweder eins der Lote, oder es sind zwei solche von außen her auf die Dreiecksseiten zu fällen. Dann bleibt der Satz bestehen, sobald man diese Lote als negativ auffaßt. (Man versuche den Satz auch ohne Rechnung, d. h. rein geometrisch zu beweisen.)

264) Eine Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks. Fig. 93 stelle ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe h (auf der Hypotenuse) dar.



Die Abschnitte der Hypotenuse bezeichne man mit p und q . Dabei ist

$$h^2 = a^2 - q^2,$$

$$h^2 = b^2 - p^2,$$

also durch beiderseitige Addition

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2 = c^2 - p^2 - q^2$$

oder, da $c = p + q$ ist,

$$2h^2 = (p + q)^2 - (p^2 + q^2) = p^2 + q^2 + 2pq - (p^2 + q^2) = 2pq.$$

Daraus folgt $h^2 = pq$, d. h.:

Das Produkt aus den Abschnitten der Hypotenuse ist gleich dem Quadrate der Höhe.

Aus $h \cdot h = p \cdot q$ folgt $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ oder $p : h = h : q$. Daher nennt man h die mittlere Proportionale zu p und q . Diese kann daher konstruiert werden, indem man p und q aneinanderlegt, darüber einen Halbkreis zeichnet und im Teilpunkte ein bis zum Kreise reichendes

Lot errichtet. Eine Proportion, in der das zweite und dritte Glied übereinstimmen, nennt man eine stetige Proportion.

In Fig. 82 war das Quadrat über BC gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte der letzteren. In der Bezeichnungsweise der Fig. 93 folgt also $a^2 = q \cdot c$ und $b^2 = p \cdot c$. Demnach ist a mittlere Proportionale zu p und c ; ebenso ist b mittlere Proportionale zu p und c . Dies gibt eine neue Konstruktion der mittleren Proportionale zweier Geraden. (Welche?)

(In der Ähnlichkeitslehre ergeben sich diese Sätze in sehr einfacher Weise.)

265) Das allgemeine Viereck gewöhnlicher Art läßt sich durch jede Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Seine Fläche läßt sich z. B. berechnen, wenn die Diagonale $BD = p$ und die von A und C auf diese gefällten Lote h_1 und h_2 bekannt sind. Dann ist

$$F = \frac{ph_1}{2} + \frac{ph_2}{2} = \frac{p}{2}(h_1 + h_2).$$

Stehen die beiden Diagonalen p und q aufeinander senkrecht, so ist $h_1 + h_2 = q$ und

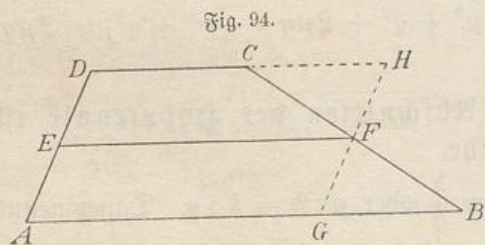
$$F = \frac{pq}{2}.$$

Dies ist z. B. der Fall beim Rhombus, beim Deltoid, welches aus zwei verschiedenen gleichschenkligen Dreiecken über bzw. unter derselben Diagonale besteht, aber auch bei gewissen unsymmetrischen Vierecken.

Sind von einem Viereck die Seiten a, b, c, d und die eine Diagonale gegeben, so läßt sich jedes durch die letztere abgeschnittene Dreieck nach der Heronischen Dreiecksformel berechnen, also ist auch die Vierecksfläche bekannt.

266) Über das Trapez, bei dem ein paralleles Seitenpaar vorhanden ist, muß für die Flächenberechnung folgendes als bekannt vorausgesetzt werden: Halbirt man in einem Trapez die nicht parallelen Seiten, und zieht man die Verbindungslinie der

Halbierungspunkte, so ist diese zu dem anderen Seitenpaare parallel und gleich der halben Summe dieser Seiten.



Beweis. In Fig. 94 sei $ABCD$ das Trapez, E und F seien die Halbierungspunkte der nicht parallelen Seiten AD und BC . Man lege durch F eine Parallele GH zu AD von der einen Parallelen bis zur Verlängerung

der anderen, dann ist $\triangle FBG \cong \triangle FCH$ (zweiter Kongruenzsatz), also $GF = FH$ und somit EF Mittellinie des Parallelogramms $AGHD$. Daraus folgt $EF \parallel AG \parallel DH$. Ferner ist

$$EF = DC + CH,$$

und zugleich

$$EF = AB - GB,$$

folglich durch beiderseitige Addition $2EF = AB + DC + (CH - GB)$, oder, da $CH - GB = 0$ ist, $2EF = AB + DC$

$$\text{und} \quad EF = \frac{AB + DC}{2}.$$

Man nennt $\frac{AB + DC}{2}$ das arithmetische Mittel der beiden Grundlinien AB und DC oder auch die mittlere Grundlinie. Sind $AB = a$, $DC = b$ und die Höhe h (der Abstand der beiden Parallelen) bekannt, so ist die Fläche des Trapezes leicht zu berechnen. Denkt man sich nämlich das Dreieck FHC von Parallelogrammen abgeschnitten und in der Form des kongruenten Dreiecks FGB an FG angelegt, so erkennt man, daß das Trapez $ABCD$ dem Parallelogramm flächengleich ist. Da aber $AG = EF$ ist, so folgt als Fläche für beide Figuren

$$F = \frac{a + b}{2} h.$$

Die Trapezfläche ist also gleich dem Produkte aus der mittleren Grundlinie und der Höhe.

Zu den Trapezen gehört ein gegen die Mittellinie symmetrisches, das Antiparallelogramm oder gleichschenklige Trapez.

267) Das gewöhnliche Tangentenviereck. Hat das Tangentenviereck den Umfang

$$u = a + b + c + d,$$

wobei

$$a + c = b + d = \frac{u}{2} \text{ ist, und}$$

hat sein Inkreis den Radius ρ , so läßt sich seine Fläche leicht berechnen. Denn es ist $\triangle AMB$

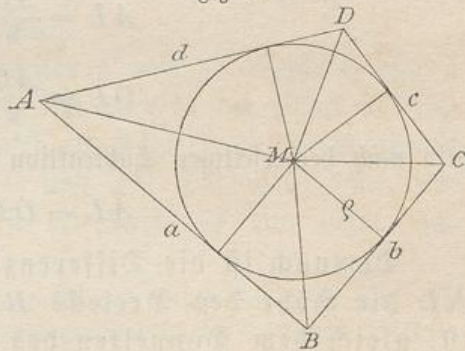
$$+ \triangle BMC + \triangle CMD$$

$$+ \triangle DMA = \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} + \frac{c\rho}{2}$$

$$+ \frac{d\rho}{2}, \text{ also ist die Gesamtfläche}$$

$$F = \frac{\rho}{2} (a + b + c + d) = \frac{\rho}{2} u = \rho(a + c) = \rho(b + d).$$

Fig. 95.



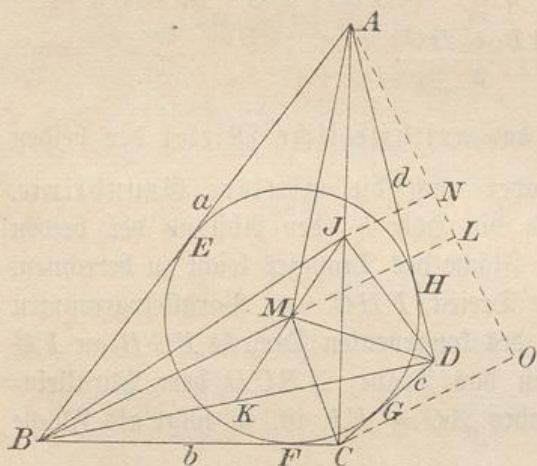
268) Eine merkwürdige Eigenschaft des Tangenten-
vierecks ergibt sich aus dem Verhalten der vier Teilvierecke.

In Fig. 96 ist

$$(1) \quad \triangle AMB - \triangle CMB = \frac{ae}{2} - \frac{be}{2} = \frac{e}{2}(a - b),$$

$$(2) \quad \triangle AMD - \triangle CMD = \frac{de}{2} - \frac{ce}{2} = \frac{e}{2}(d - c).$$

Fig. 96.



Aus $a + c = b + d$ folgt
aber $a - b = d - c$, folg-
lich stimmen beide Dif-
ferenzen überein. (Vgl.
Nr. 286.)

Ist nun J der Hal-
bierungspunkt der Diago-
nale AC , so wird behaup-
tet, daß die Differenz (1)
das Doppelte vom Dreieck
 BMJ sei.

Fällt man nämlich
von A aus ein Lot AL
auf die Verlängerung

von BM , so ist $\triangle ABM = \frac{BM \cdot AL}{2}$. Fällt man von C ein Lot
 CO auf AL , so ist OL die Höhe des Dreiecks BMC für die Grund-
linie BM , also $\triangle BMC = \frac{BM \cdot OL}{2}$. Die Differenz (1) ist also
gleich $\frac{BM \cdot AL}{2} - \frac{BM \cdot OL}{2} = \frac{BM(AL - OL)}{2}$. Fällt man von J
aus ein Lot JN auf AO , so ist $AN = \frac{AO}{2}$, also

$$AL = \frac{AO}{2} + NL,$$

$$OL = \frac{AO}{2} - NL,$$

also nach beiderseitiger Subtraktion

$$AL - OL = 2NL.$$

Demnach ist die Differenz (1) gleich $BM \cdot NL$, oder, da
 NL die Höhe des Dreiecks BMJ für die Grundlinie BM
ist, gleich dem Doppelten des Dreiecks BMJ .

Ganz ebenso läßt sich mit Hilfe der entsprechenden Hilfs-
linien beweisen, daß die Differenz (2) gleich dem Doppelten des

Dreiecks DMJ ist. Da aber beide Differenzen übereinstimmen, so folgt, daß

$$(3) \quad \triangle BMJ = \triangle DMJ \text{ ist.}$$

Ist nun K die Mitte der Diagonale BD , so ist auch $\triangle BKM = \triangle DKM$. Wäre also JMK eine gebrochene Linie, so würde Viereck $BKMJ =$ Viereck $DKMJ$ sein. Zieht man aber die Gerade KJ , so ist auch $\triangle BKJ = \triangle DKJ$. Folglich muß M auf JK liegen. (Läge nämlich M rechts vor KJ , so würde $BKMJ > DKMJ$ sein, läge es links von JK , so würde es kleiner als dieses sein.) Oder: $\triangle JMK$ hat den Inhalt Null, demnach liegen J , K und M auf einer Geraden.

Folglich gilt der Satz:

Die Verbindungslinie der Diagonalenmitten eines Tangentenvierecks geht stets durch den Mittelpunkt des In-Kreises.*)

Bemerkungen. a) Ist der Winkel bei D ein solcher von 180° , so wird das Tangentenviereck zum Tangentendreieck und D wird Berührungspunkt des In-Kreises. Jetzt wird J der Halbierungspunkt der Dreiecksseite AC . Daraus folgt:

Die Mitte der Berührungstransversale (BD) eines Dreiecks und die Mitte der zugehörigen Dreiecksseite (AC) haben eine Verbindungslinie, die durch den Mittelpunkt des In-Kreises geht. Dort also schneiden einander die drei entsprechenden Verbindungslinien für das ganze Dreieck.

b) Bezeichnet man die vier Teildreiecke AMB , BMC , CMD , DMA des Tangentenvierecks als J_1 , J_2 , J_3 , J_4 , so folgt aus ihren Inhaltsformeln $J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = a : b : c : d$. Aus der obigen Formel $J_1 - J_2 = J_4 - J_3$ folgt noch $J_1 + J_3 = J_2 + J_4$. Man beweise noch, daß $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = 180^\circ$ ist, ebenso $\sphericalangle BMC + \sphericalangle DMA = 180^\circ$. (Vgl. Nr. 286.)

c) Verlängert man die Gegenseiten a und c , ebenso b und d bis zum Durchschnitte P bzw. Q , so hat man in der Figur $APCQ$ ein Viereck mit einspringendem Winkel, in $BPDQ$ ein überschlagenes Viereck. Bei dem ersteren sind AC und PQ Diagonalen, bei dem anderen PD und PQ . Beiden ist der Kreis M ein- bzw. an-

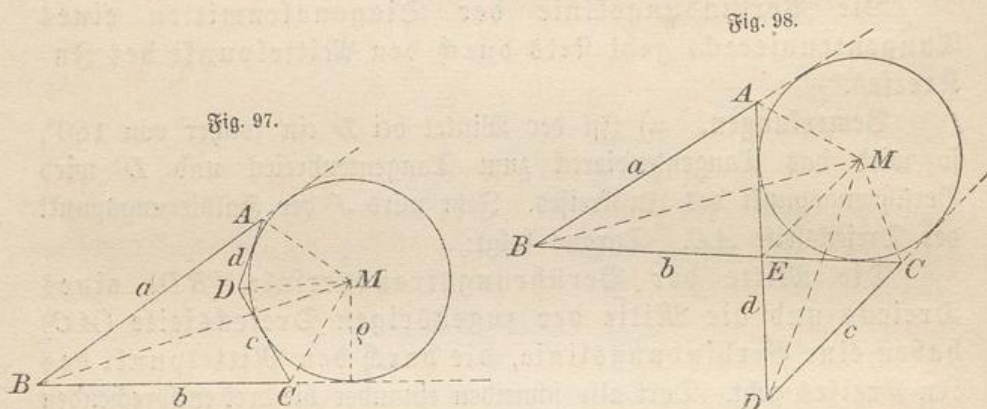
*) Dies scheint der einfachste Elementarbeweis dieses Satzes zu sein. In Teil III, 2. Auflage dieses Lehrbuchs ist ein umständlicherer Nachweis geliefert. Der Satz ist ein Sonderfall eines Satzes von Gauß über die drei Diagonalenmitten des vollständigen Vierseits und über die Mittelpunkte der einem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte. (Vgl. Teil III.)

beschrieben. Man versuche ebenso zu zeigen, daß die Halbierungspunkte aller drei Diagonalen AC , BD und PQ auf der durch M gehenden Geraden JK liegen. (Gaußsche Gerade.)

269) Flächen der drei Arten anbeschriebener Tangentenvierecke.

a) Für das Tangentenviereck mit einspringendem Winkel (bei D) ist $F = \triangle AMB + \triangle BMC - \triangle CMD - \triangle DMA = a \frac{\rho}{2} + b \frac{\rho}{2} - c \frac{\rho}{2} - d \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}(a + b - c - d)$. (Vgl. Fig. 97.)

b) Das überschlagene Tangentenviereck $ABCD$ hat keinen Inhalt im gewöhnlichen Sinne. Man versteht unter seinem Inhalte den



Unterschied der Dreiecke ABE und CDE . (Die Fläche des einen Dreiecks wird gewissermaßen als negativ aufgefaßt.) Dann ist wieder $F = \triangle AMB + \triangle BMC - \triangle CMD - \triangle AMD = \frac{\rho}{2}(a + b - c - d) = \triangle ABE - \triangle CDE$. (Vgl. Fig. 98.)

c) Auch für die dritte Art von Tangentenvierecken, bei der keine Seite unmittelbar berührt, gilt die genannte Flächenformel. (Vgl. Fig. 72.)

370) Die Fläche jedes einem Kreise umbeschriebenen Vielecks gewöhnlicher Art ist

$$F = \frac{\rho}{2}(a + b + c + d + \dots) = \frac{\rho}{2}u.$$

Verbindet man die Ecken eines allgemeinen konvergen Vielecks (n -Ecks) mit einem Punkte P seines Innern, so zerlegt man es in n Dreiecke. Sind $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ die Seiten, $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ die zugehörigen Höhen der Dreiecke, so ist die Fläche

$$F = \frac{1}{2}[a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots + a_n h_n].$$

271) Bemerkungen über Pythagoreische Zahlen.

Im Vorkursus § 72 wurde eine Reihe von Gruppen ganzer Zahlen zu je dreien angegeben, von denen jede den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechen konnte. Diese Pythagoreischen Zahlen sollen hier wiederholt und ergänzt werden.

3, 4, 5	16, 63, 65	27, 364, 365	36, 77, 85
5, 12, 13	17, 144, 145	28, 45, 53	36, 323, 325
7, 24, 25	19, 180, 181	28, 195, 197	37, 684, 685
8, 15, 17	20, 21, 29	29, 420, 421	39, 80, 89
9, 40, 41	20, 99, 101	31, 480, 481	39, 760, 761
11, 60, 61	21, 220, 221	32, 255, 257	40, 399, 401
12, 35, 37	23, 264, 265	33, 56, 65	41, 840, 841
13, 84, 85	24, 143, 145	33, 544, 545	43, 924, 925
15, 112, 113	25, 312, 313	35, 612, 613	44, 117, 125
			44, 483, 485

Multipliziert man die Zahlen einer solchen Gruppe mit einer beliebigen ganzen Zahl, so erhält man wieder eine solche Gruppe, die aber nichts neues bietet. Nur unabhängige Pythagoreische Zahlen sind hier bis zur Zahl 44 für die kleinste Seite angegeben.

Die im Vorkursus angegebene vorläufige Regel, für jede beliebige Zahl $n (> 5)$ zwei zugehörige größere zu finden, wird jetzt verständlich sein.

a) Ist n ungerade, so setze man in $p^2 - q^2 = n^2$ die Zahl $p = q + 1$. Dann wird $(q + 1)^2 - q^2 = n^2$ oder $2q + 1 = n^2$, d. h. $q = \frac{n^2 - 1}{2}$, $p = \frac{n^2 - 1}{2} + 1 = \frac{n^2 - 1 + 2}{2} = \frac{n^2 + 1}{2}$. Die Lösung gibt also die Zahlengruppe $n, \frac{n^2 - 1}{2}, \frac{n^2 + 1}{2}$.

b) Ist n gerade, so setze man in $p^2 - q^2 = n^2$ die Zahl $p = q + 2$. Dann wird $(q + 2)^2 - q^2 = n^2$ oder $4q + 4 = n^2$, d. h. $q = \frac{n^2 - 4}{4}$, $p = \frac{n^2 - 4}{4} + 2 = \frac{n^2 + 4}{4}$. Die Lösung ist also $n, \frac{n^2 - 4}{4}, \frac{n^2 + 4}{4}$.

Man findet aber dabei nicht sämtliche unabhängigen Pythagoreischen Zahlen, sondern nur solche Gruppen, bei denen die beiden größeren Zahlen nur um 1 oder 2 voneinander unterschieden sind. (Beispiele findet man im Vorkursus.) Eine allgemeinere Lösung gibt folgendes:

c) Sind a und b beliebig gegebene ganze Zahlen und ist dabei $a > b$, so ist leicht zu zeigen, daß die Zahlen

$$(a^2 - b^2), (2ab), (a^2 + b^2)$$

eine Gruppe Pythagoreischer Zahlen sind. Es ist nämlich:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

weil

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$$

ist.

Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 1$, so findet man $a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$, $2ab = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, $a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$, also die erste Gruppe 3, 4, 5.

Setzt man $a = 3$, $b = 1$, so folgt $a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$, $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$, $a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10$, also die Gruppe 6, 8, 10, die aber nichts neues gibt, da sie aus der ersten durch Multiplikation mit 2 hervorgeht.

Setzt man $a = 3$, $b = 2$, so folgt $a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, $a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$, also die Gruppe 5, 12, 13. Ebenso kann man der Reihe nach $a = 4$, $b = 1$, oder $a = 4$, $b = 2$, oder $a = 4$, $b = 3$ setzen. Das erste gibt die Gruppe 8, 15, 17, das dritte die Gruppe 7, 24, 25. Das zweite gibt nichts neues, da 12, 16, 20 aus der ersten Gruppe durch Multiplikation mit 3 hervorgeht.

Auf diese Weise findet man sämtliche Pythagoreischen Zahlen bis zu einer beliebigen Anfangszahl a hin.

[Damit ist eine wichtige Gruppe von unbestimmten Gleichungen zweiten Grades (Diophantische Gleichungen zweiten Grades) von der Form $x^2 + y^2 = n^2$, wo x , y und n ganze Zahlen sein sollen, ohne besondere Vorkenntnisse zur Lösung gebracht.]

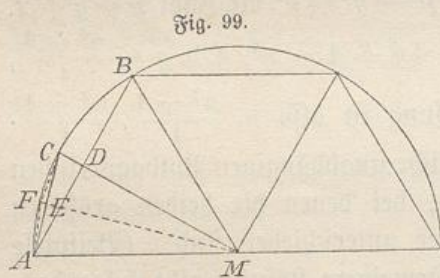
[272) Vorläufige Methode, die Zahl π mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes bis auf 6 Stellen Genauigkeit zu berechnen.*)

Auflösung. In Fig. 99 sei der Radius des Halbkreises gleich 1. Da sich der Radius dreimal als Sehne eintragen läßt, ist zunächst die Halbkreislinie größer als 3.

Man halbiere den Bogen AB in C . Dann ist $AD = \frac{1}{2}$, $AM = 1$, folglich $MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich ist $CD = MC - MD = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich ist die Seite des regelmäßigen 12-Ecks

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + (1 - \sqrt{\frac{3}{4}})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + (1 + \frac{3}{4} - 2\sqrt{\frac{3}{4}})} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

*) In der Ähnlichkeitslehre wird eine bequemere Methode angegeben. Hier handelt es sich nur um eine Übung in der Berechnung des Umfangs



Da $\sqrt{3} = 1,732051 \dots$, also $2 - \sqrt{3} = 0,267949 \dots$ und daher $AC = \sqrt{0,267949 \dots} = 0,5176380 \dots$ ist, so folgt als halber Umfang des regelmäßigen Zwölfecks das Sechsfache davon, d. h. $3,10528 \dots$. Dies ist schon ein besserer Näherungswert für π als die Zahl 3.

Jetzt halbiere man den Bogen AC , was F gibt, dann wird durch FM die Sehne AC in E halbiert, und es wird

$$AE = \frac{AC}{2} = 0,2588190 \dots,$$

$$EM = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{1 - AE^2},$$

$$FE = 1 - EM = 1 - \sqrt{1 - AE^2},$$

also die Sehne

$$\begin{aligned} AF &= \sqrt{AE^2 + FE^2} = \sqrt{AE^2 + (1 - \sqrt{1 - AE^2})^2} \\ &= \sqrt{AE^2 + 1 + 1 - AE^2 - 2\sqrt{1 - AE^2}} = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - AE^2})}. \end{aligned}$$

Hier ist $AE^2 = 0,06698728 \dots$, also $1 - AE^2 = 0,9330127 \dots$ und $AF = \sqrt{2(1 - \sqrt{0,9330127 \dots})}$, oder, da $\sqrt{0,9330127 \dots} = 0,9659258 \dots$ ist, $AF = \sqrt{2 \cdot 0,0340742 \dots} = \sqrt{0,0681484 \dots} = 0,2610525 \dots$. Der halbe Umfang des 24-Ecks ist das Zwölfwache davon oder $3,132630$, was noch näher an π liegt. So kann man, die Halbierung der Bogen wiederholend, fortfahren.

In derselben Weise kann man den halben Umfang der umbeschriebenen regelmäßigen Vielsecke der angegebenen Seitenzahl berechnen. Während die einbeschriebenen Vielsecke einen zu kleinen Näherungswert geben, geben die umbeschriebenen einen zu großen, aber π wird immer enger zwischen zwei Zahlen eingeschnürt. Die Resultate bis zur sechsten Stelle sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	Einbeschrieben:	Umbeschrieben:		Folglich:
6-Eck	3,00000	3,46410	3	$< \pi < 3,4 \dots$
12-Eck	3,10583	3,21539	3,1	$< \pi < 3,2 \dots$
24-Eck	3,13263	3,15966	3,13	$< \pi < 3,15 \dots$
48-Eck	3,13935	3,14609	3,139	$< \pi < 3,146 \dots$
96-Eck	3,14103	3,14271	3,1410	$< \pi < 3,142 \dots$
192-Eck	3,14145	3,14187	3,1414	$< \pi < 3,1418 \dots$
384-Eck	3,14156	3,14166	3,14156	$< \pi < 3,14166$
768-Eck	3,14158	3,14161	3,14158	$< \pi < 3,14161$
1536-Eck	3,14159	3,14160	3,14159	$< \pi < 3,14160$

Damit ist $\pi = 3,14159$ auf sechs Stellen richtig berechnet.]

regelmäßiger Vielsecke, deren ein- oder umbeschriebener Kreis den Radius 1 hat. Ist das Wurzelausziehen noch nicht geübt, so ist dieser Paragraph zu überspringen.