Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

γ) Tangentendreiecke und Tangentenvierecke

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

Auflösung. Ist AB die gegebene Seite und α der gegebene ihr gegenüberliegende Winkel, so konstruiere man den über AB stehenden Kreisbogen, der α als Peripheriewinkel faßt. Ist h die gegebene Höhe, so ziehe man zu AB im Abstande h auf der Seite des Bogens eine Parallele. Ist C ein Schnittpunkt der Parallelen und des Bogens, so ziehe man CA und CB. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

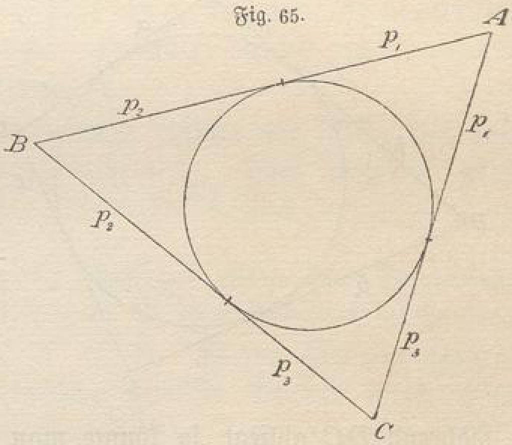
Ist die Höhe h zu groß (größer als die sog. Pfeilhöhe des Bogens), so gibt es keinen Schnittpunkt, und das Dreieck ist unmöglich. Ist h kleiner, als die Pfeilhöhe, so sind zwei Dreiecke möglich, die kongruent sind. Ist h gleich der Pfeilhöhe, so wird die Parallele Tangente, und es ist nur ein einziges Dreieck möglich, welches rechtwinklig-gleichschenklig ist.

Bemerkung. Der Kreisbogen ist zugleich der dem Dreiecke umbeschriebene Kreis. Sind also a und α gegeben, so ist der Radius des umbeschriebenen Kreises schon bestimmt. Man kann also nicht zugleich a, α und r geben, denn r ist nicht mehr unabhängig, sobald a und α gegeben sind. Es ist gleichgültig, ob ein Dreieck aus a, α und einem dritten Stück konstruiert werden soll, oder aus a, r und dem betreffenden Stück, oder aus α und r und dem betreffenden Stück. Nur können bei a und r zwei Lösungen eintreten.

γ) Tangentendreiecke und Tangentenvierecke.

236) **Aufgabe.** Ein Dreieck habe die Seiten a, b und c. Wie groß sind die Abschnitte p_1, p_2, p_3, die durch die Berührungspunkte des In-Kreises entstehen?

Fig. 65.



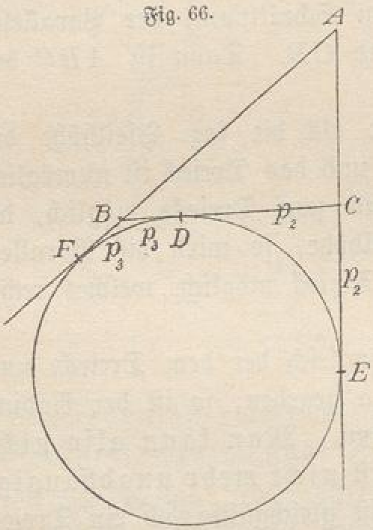
Auflösung. In Fig. 65 ist $2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = a + b + c$, zugleich ist $2p_2 + 2p_3 = 2a$, folglich durch Subtraktion: $2p_1 = a + b + c - 2a = b + c - a$, folglich $p_1 = \frac{-a+b+c}{2}$, ebenso $p_2 = \frac{a-b+c}{2}$ und $p_3 = \frac{a+b-c}{2}$.

Setzt man noch $\frac{a+b+c}{2} = p$, so ist $p_1 = p - a$, $p_2 = p - b$, $p_3 = p - c$.

237) Dieselbe Aufgabe für den An-Kreis mit Radius ϱ_1 zu lösen.

Auflösung. In Fig. 66 ist $AF = AB + BF = AB + BD$ und $AE = AC + CD$, folglich $AF + AE = AB + AC + BC = a + b + c$, also $AF = AE = \frac{a+b+c}{2} = p$. Jetzt ist $CE = AE - AC = p - b = p_2$ und ebenso $BF = AF - AB = p - c = p_3$.

Fig. 66.

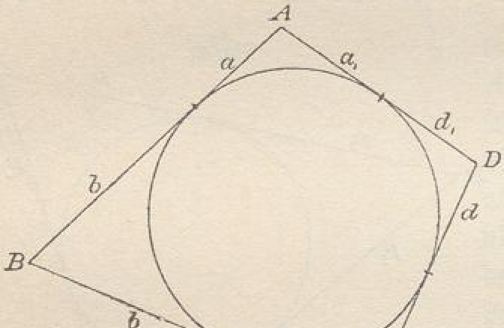


Folglich: Der An-Kreis teilt die unmittelbar berührte Dreiecksseite in dieselben Stücke, wie der In-Kreis, nur sind beide Stücke in der Lage vertauscht. Diese Beziehungen sind eine Quelle wichtiger Sätze.

238) **Satz.** Die Summe zweier Gegenseiten eines (gewöhnlichen) Tangentenvierecks ist gleich der Summe der beiden anderen Gegenseiten.

In Fig. 67 sind folgende Tangenten gleich: $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, $d = d_1$, folglich ist $a + b + c + d = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$, d. h. $AB + CD = BC + DA$.

Fig. 67.

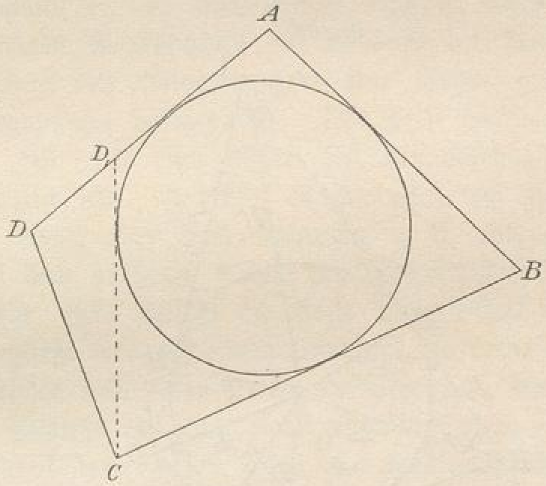


Umkehrung. Ist bei einem Viereck die Summe des einen Gegenseitenpaares gleich der des andern, so ist es ein Tangentenviereck.

Beweis. Angenommen, $ABCD$ in Fig. 68 hätte in dem angegebenen Sinne gleiche Seitensummen und würde von dem gezeichneten Kreise nur an drei Seiten berührt, während DC abliegt, so könnte man die vierte Tangente CD_1 ziehen. Dann würde sein $AB + CD_1 = AD_1 + BC$, und nach der Voraussetzung $AB + CD = (AD_1 + D_1D) + BC$, folglich durch Subtraktion $CD - CD_1 = D_1D$ oder $CD = CD_1 + D_1D$, d. h. die Summe zweier

Dreiecksseiten würde gleich der dritten sein. Dieser Widerspruch kann nur dadurch aufgehoben werden, daß D auf D_1 fällt. — Entsprechend wird der Beweis geführt, wenn man annimmt, CD schnitte den Kreis.

Fig. 68.



Bemerkungen. Man denke sich ein Tangentenviereck als Gelenkviereck, dann kann es beliebig viele verschiedene Gestalten annehmen. Solange es konvex bleibt, läßt sich ihm stets ein Kreis einbeschreiben. In zwei Sonderfällen geht es in ein Dreieck über. Dies geschieht, wenn zwei aneinanderstoßende Seiten einen Winkel von 180^0 bilden. — Jedes rechtwinklige Dreieck ist die Hälfte eines Tangenten-Sehnenvierecks. (Unter Tangenten-Sehnenviereck versteht man ein Viereck, welches sowohl einen umbeschriebenen, als auch einen einbeschriebenen Kreis hat. Man nennt solche Vierecke auch bizentrische Vierecke, womit auf die beiden Kreiszentra hingedeutet werden soll.)

239) **Aufgabe.** Folgender Satz soll bewiesen werden:

Verbindet man die Ecken eines Tangentenvierecks mit dem Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises, so entstehen vier Zentriwinkel, von denen je zwei nicht aneinanderliegende zusammen 180^0 betragen.

Bemerkung. Bezeichnet man diese Winkel der Reihe nach mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4, so ist $\xi_1 + \xi_3 = \xi_2 + \xi_4$. Dies entspricht ganz dem Satze für die Seiten $AB + CD = BC + DA$.

240) **Aufgabe.** In Fig. 69 sind die Ecken des Tangentenvierecks $ABCD$ mit dem Mittelpunkte M des Inkreises verbunden, ebenso die Berührungspunkte E, F, G, H. Es soll bewiesen werden, daß die folgenden Inhaltsunterschiede gewisser Dreiecke gleich groß sind: $\triangle AME - \triangle CMF = \triangle AMH - \triangle CMG = \triangle AMB - \triangle CMB$; ferner $\triangle BMF - \triangle DMG = \triangle BME - \triangle DMH = \triangle BMC - \triangle DMC$. Ferner sind folgende Inhaltssummen gleich: $\triangle AMB + \triangle CMD = \triangle BMC + \triangle DMA = \frac{1}{2} ABCD$.

Bemerkung. Nur Dreieckskongruenzen sollen zum Beweise benutzt werden. Die Sätze können später mit Hilfe der Inhaltssätze andere Beweise erhalten. (Sie werden später Anwendung finden.) Wie lauten diese Sätze für den Sonderfall des Tangentendreiecks?

Fig. 69.

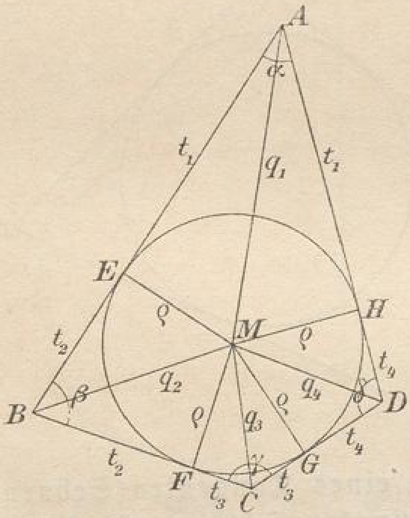
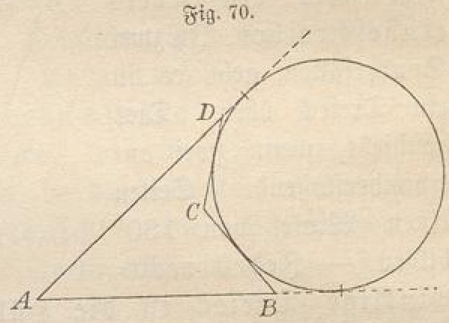


Fig. 70.



241) **Aufgabe.** Es soll versucht werden, die für das einem Kreise umbeschriebene Tangentenviereck geltenden Sätze auch für das einem Kreise anbeschriebene Tangentenviereck auszusprechen.

Bemerkung. Es gibt drei Arten anbeschriebener Tangentenvierecke, solche sind durch die Fig. 70, 71 und 72 dargestellt, das

Fig. 71.

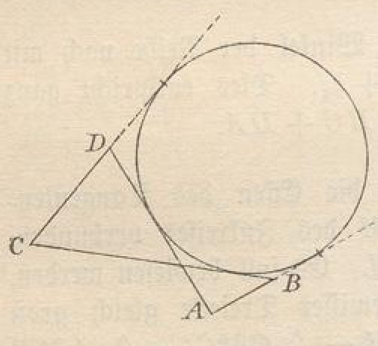
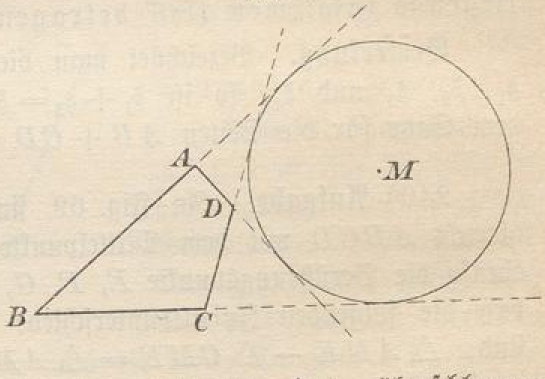


Fig. 72.



„Tangentenviereck mit einspringendem Winkel", das „überschlagene Tangentenviereck" und das nirgends unmittelbar berührende. Aufeinanderfolgende Seiten treten an die Stelle von gegenüberliegenden.