Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

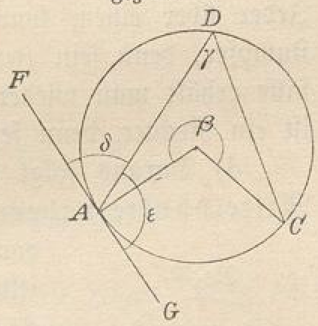
Leipzig und Berlin, 1904

β) Peripherie- und Zentriwinkel, Tengenten-Sehnenwinkel aus an einen gegebenen Kreis gehenden Tangente. Konstruktion der äußeren und der inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise.

β) Die Peripherie- und Zentriwinkel, der Tangenten-Sehnenwinkel.

229) Liegt der Scheitel eines Winkels auf der Kreislinie, und sind seine Schenkel Sehnen, so heißt der Winkel ein **Peripheriewinkel**. (Ein solcher ist z. B. $\sphericalangle \gamma$ oder $\sphericalangle ADC$ in Fig. 57.) Von diesem Winkel sagt man, daß er auf dem konkaven Bogen AC steht. Verbindet man einen Punkt E dieses Bogens mit A und C, so erhält man einen Peripheriewinkel, der auf dem konvexen Bogen AC steht. [So steht auch der konkave Zentriwinkel AMC auf dem konkaven Bogen AC, der konvexe Zentriwinkel AMC oder β auf dem konvexen Bogen AC. Über einer Sehne AC kann sowohl ein konkaver, als auch ein konvexer Zentriwinkel stehen.]

Fig. 57.



230) Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Zentriwinkels.

Beweis. Erster Fall. Schenkel AM (Fig. 58a) liegt auf AB. Dann ist $\alpha = \beta + \gamma$ (Außenwinkel), da aber $\beta = \gamma$ ist, so folgt $\alpha = 2\beta$ und $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Zweiter Fall. M liegt zwischen AB und BC. (Fig. 58b.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha_1 = 2\beta_1$ (soeben bewiesen) und $\alpha_2 = 2\beta_2$, folglich $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$, d. h. $\sphericalangle AMC = 2 \cdot (\sphericalangle ABC)$, also $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}(\sphericalangle AMC)$.

Fig. 58 a.

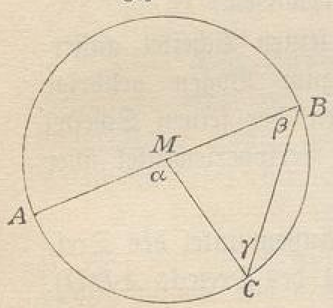


Fig. 58 b.

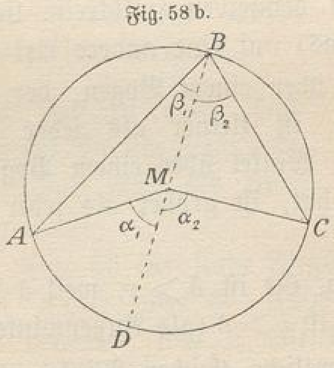
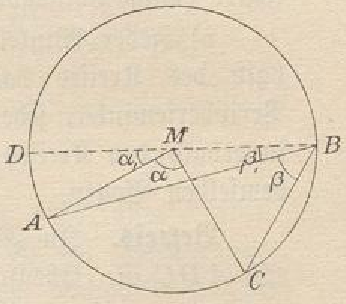


Fig. 58 c.



Dritter Fall. M liegt außerhalb ABC. (Fig. 58c.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$, aber $\alpha_1 = 2\beta_1$, folglich durch Subtraktion $\alpha = 2\beta$.

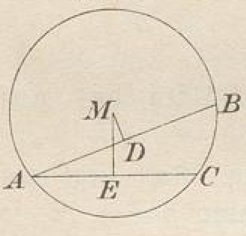
231) **Folgerungen.** a) Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen eines Kreises stehen, sind einander gleich. Denn sie sind Hälften desselben Zentriwinkels.

b) Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleicher Kreise sind einander gleich.

c) Jeder über einem konkaven Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein spitzer Winkel, denn sein Zentriwinkel ist kleiner als 180^0. Jeder über einem konvexen Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein stumpfer, denn sein Zentriwinkel ist größer als 180^0. Im Zwischenfalle erhält man wieder den Satz: der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter, denn sein Zentriwinkel ist gleich 180^0.

d) Daraus folgt der Satz: Von zwei Sehnen ist die dem Mittelpunkte nähere die größere. Man denke sich beide Sehnen von einem Punkte A ausgehend und in demselben Halbkreise liegend (Fig. 59). Dann ist $\sphericalangle ACB$ ein stumpfer. Folglich ist AB größer als AC, denn dem größten Dreieckswinkel liegt die größte Seite gegenüber. Nun ist aber $ME > MD$, denn der mit Radius MD um M gelegte Kreis schließt die ganze Linie AB (mit Ausnahme des Punktes D) aus, also auch alle Punkte des durch AB begrenzten Segmentes ACB. (Vgl. Nr. 75.) Also ist die dem Mittelpunkte nähere Sehne die größere.

Fig. 59.



Nun gehören aber zu gleichen Sehnen gleiche Abstände, also gilt der Satz auch dann, wenn die Sehnen nicht von demselben Punkte ausgehen und nicht in demselben Halbkreise liegen. Der Satz wird später (nach Pythagoras) auf eine andere Art bewiesen.

e) Jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel außerhalb des Kreises hat, ist kleiner als jeder zum Bogen gehörige Peripheriewinkel; jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel innerhalb des Kreises hat, ist größer als jeder Peripheriewinkel über demselben Bogen.

Beweis. In Fig. 60 ist $\delta > \gamma$, weil δ Außenwinkel des Dreiecks ADC ist. Ebenso ist $\varepsilon > \delta$ (als Außenwinkel des Dreiecks AED).

Bemerkung. Sämtliche gleichen Winkel über einer Geraden AB haben ihre Scheitel auf einem durch A und B gehenden Kreisbogen; kleinere Winkel über AB haben den Scheitel außerhalb dieses Bogens, größere dagegen innerhalb.

232) Zu jeder Sehne AB gehören zwei Bogen, folglich auch zwei Arten von Peripheriewinkeln, spitze und stumpfe. Die entsprechenden Winkel sind Supplementwinkel. In Fig. 61 z. B. ist die

Fig. 60.

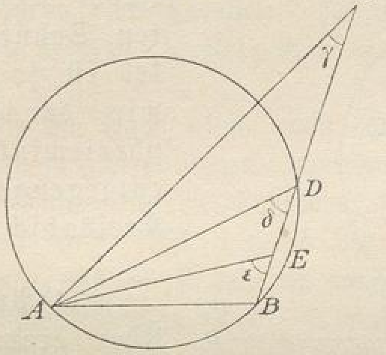
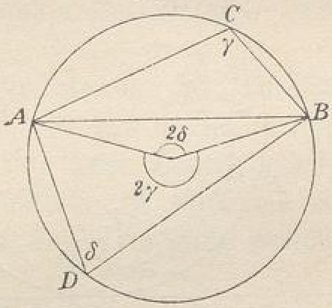


Fig. 61.



Summe des konkaven und des konvexen Zentriwinkels gleich 4 Rechten, folglich ist $\gamma + \delta = 2\,\mathrm{R}$.

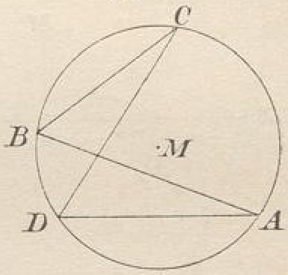
Jedes Viereck, dessen Ecken auf einem Kreise liegen, heißt ein Sehnenviereck. Demnach gilt für konvexe Sehnenvierecke der Satz:

Im Sehnenviereck ist die Summe gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten.

Umkehrung: Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten, so ist das Viereck ein Sehnenviereck; d. h. der durch drei seiner Eckpunkte gelegte Kreis geht auch durch den vierten. Warum? (Vgl. Nr. 231 e.)

Bemerkung. Ist das Sehnenviereck ein sog. überschlagenes, wie es durch Fig. 62 dargestellt ist, so sind die Gegenwinkel A und C gleich, ebenso B und D, an Stelle der Supplementwinkel treten also gleiche Winkel.

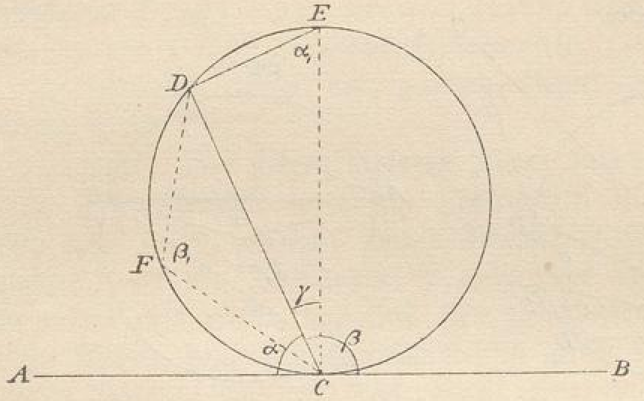
Fig. 62.



233) Den Winkel zwischen einer Tangente und einer von ihrem Berührungspunkte ausgehenden Sehne bezeichnet man als einen Tangenten-Sehnenwinkel.

Ein solcher ist in Fig. 63 der spitze Winkel ACD oder α, ebenso der stumpfe Winkel BCD oder β. Dort ist im Berührungspunkte C ein Lot CE errichtet, und E mit dem Endpunkte D der Sehne verbunden worden. Dadurch ist ein Peripheriewinkel α_1 entstanden, der als Komplementwinkel von γ ebenso groß sein muß, wie α, denn $\sphericalangle CDE = 90^0$, also $\alpha_1 = 90^0 - \gamma$. Demnach ist jeder Peripheriewinkel über CD, der auf derselben Seite von CD liegt, so groß wie α. Jeder auf der anderen Seite von CD liegende Peripheriewinkel über dieser Sehne ist aber gleich $180^0 - \alpha$, d. h. ebenso groß, wie β. Folglich gilt der Satz: **Jeder Tangenten-Sehnenwinkel ist so groß, wie der Periepheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.**

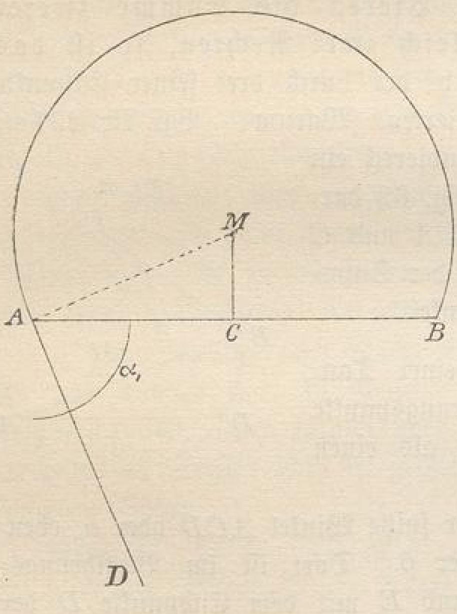
Fig. 63.



234) **Aufgabe.** Über einer Geraden AB einen Kreisbogen zu zeichnen, der einen gegebenen Winkel α als Peripheriewinkel über AB in sich faßt.

Auflösung. Ist AB die gegebene Gerade (Fig. 64) und α der gegebene Winkel, so trage man α als $\sphericalangle BAD$ an die Gerade AB an. In A errichte man ein Lot auf AD, ebenso auf AB im Halbierungspunkte C. Die Lote schneiden sich im Mittelpunkte des gesuchten Kreisbogens. (Warum?)

Fig. 64.



Bemerkungen. Ist α ein rechter Winkel, so hat man über AB als Durchmesser einen Halbkreis zu schlagen. — Der geometrische Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel, die sich über einer Geraden AB nach derselben zeichnen lassen, ist ein bestimmter Kreisbogen. Ein ebensolcher ist der Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel, die sich unterhalb der Geraden zeichnen lassen.

235) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem ihr gegenüberliegenden Winkel und der zu ihr gehörigen Höhe.

Auflösung. Ist AB die gegebene Seite und α der gegebene ihr gegenüberliegende Winkel, so konstruiere man den über AB stehenden Kreisbogen, der α als Peripheriewinkel faßt. Ist h die gegebene Höhe, so ziehe man zu AB im Abstande h auf der Seite des Bogens eine Parallele. Ist C ein Schnittpunkt der Parallelen und des Bogens, so ziehe man CA und CB. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

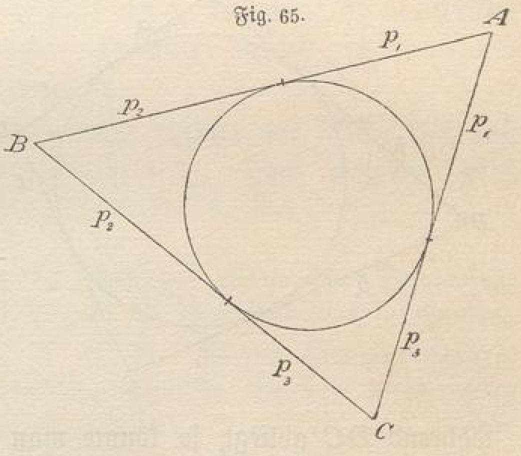
Ist die Höhe h zu groß (größer als die sog. Pfeilhöhe des Bogens), so gibt es keinen Schnittpunkt, und das Dreieck ist unmöglich. Ist h kleiner, als die Pfeilhöhe, so sind zwei Dreiecke möglich, die kongruent sind. Ist h gleich der Pfeilhöhe, so wird die Parallele Tangente, und es ist nur ein einziges Dreieck möglich, welches rechtwinklig-gleichschenklig ist.

Bemerkung. Der Kreisbogen ist zugleich der dem Dreiecke umbeschriebene Kreis. Sind also a und α gegeben, so ist der Radius des umbeschriebenen Kreises schon bestimmt. Man kann also nicht zugleich a, α und r geben, denn r ist nicht mehr unabhängig, sobald a und α gegeben sind. Es ist gleichgültig, ob ein Dreieck aus a, α und einem dritten Stück konstruiert werden soll, oder aus a, r und dem betreffenden Stück, oder aus α und r und dem betreffenden Stück. Nur können bei a und r zwei Lösungen eintreten.

γ) Tangentendreiecke und Tangentenvierecke.

236) **Aufgabe.** Ein Dreieck habe die Seiten a, b und c. Wie groß sind die Abschnitte p_1, p_2, p_3, die durch die Berührungspunkte des Inkreises entstehen?

Fig. 65.



Auflösung. In Fig. 65 ist $2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = a + b + c$, zugleich ist $2p_2 + 2p_3 = 2a$, folglich durch Subtraktion: $2p_1 = a + b + c - 2a = b + c - a$, folglich $p_1 = \frac{-a + b + c}{2}$, ebenso $p_2 = \frac{a - b + c}{2}$ und $p_3 = \frac{a + b - c}{2}$.

Setzt man noch $\frac{a + b + c}{2} = p$, so ist $p_1 = p - a$, $p_2 = p - b$, $p_3 = p - c$.