Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

α) Rückblick auf das schon Bekannte

Umfange $\left(\frac{u}{2}\right)$ und der Hälfte des der Diagonale gegenüber liegenden Winkels $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

9) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus zwei ungleichen Seiten und der Vorschrift, daß der eine Winkel das Doppelte (oder das Dreifache, oder das Fünffache, oder das Siebenfache) des anderen sei.

10) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einem Winkel, dem Umfang und der Vorschrift, daß die eine Seite das Doppelte (oder das Dreifache, Vierfache usw.) des anderen sein soll.

225) **Aufgaben für um- und einzubeschreibende Parallelogramme.**

1) Einem gegebenen Viereck (beliebiger Art) ein Parallelogramm einzuschreiben, dessen Ecken drei von den Seiten des Vierecks halbieren. (Es ist zu zeigen, daß auch die vierte Seite halbiert wird und daß die Parallelogrammseiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind.)

2) Einem gegebenen Viereck ein Parallelogramm einzuzeichnen, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind, und von den Schenkeln des einen Viereckswinkels den dritten (oder den vierten, oder den fünften) Teil abschneiden. (Die Möglichkeit der Konstruktion ist nachzuweisen.)

3) Einem gegebenen Rhombus ein Parallelogramm einzubeschreiben, dessen Diagonalen gegeben sind. (Die Ecken des Parallelogramms sollen auf den vier Seiten des Rhombus liegen. Sind die Diagonalen des Parallelogramms zu groß, so können die Ecken des Parallelogramms auf die Verlängerungen der Rhombusseiten fallen. Der Rhombus kann auch ein Quadrat sein. An seine Stelle kann auch ein Rechteck oder ein Parallelogramm treten.)

Einem gegebenen Doppelsegment ein Parallelogramm einzubeschreiben, dessen Diagonalen gegeben sind.

5) Einem gegebenen Doppelsegment ein Parallelogramm einzuzeichnen, von dem eine Seite bereits eingezeichnet ist.

6) Um ein gegebenes Doppelsegment ein Parallelogramm von gegebenen Seitenrichtungen zu legen.

c) Anfangsgründe der Kreislehre.

α) Rückblick auf das schon Bekannte.

226) Bekannt sind bereits folgende Begriffe der Kreislehre: Kreislinie, Kreisfläche, Kreisumfang (Peripherie, die Zahl π), Sehne

(Chorde), Sekante, Durchmesser (Diameter), Halbmesser (Radius), Bogen, Zentriwinkel, Kreisausschnitt (Sektor), Kreisabschnitt (Segment), Berührende (Tangente), der umbeschriebene Kreis (Um-Kreis) des Dreiecks, der einbeschriebene Kreis (In-Kreis) des Dreiecks, die äußeren Berührungskreise (An-Kreise) des Dreiecks, die Kreisteilung, das regelmäßige Vieleck mit um- und einbeschriebenem Kreise. Der umbeschriebene Kreis des Rechtecks. Der einbeschriebene Kreis des Rhombus.

227) Bekannt sind bereits folgende Sätze der Kreislehre: Bei jedem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Mittelpunktsabstände, gleiche Bogen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren, gleiche Zentriwinkel. Auch sämtliche Umkehrungen dieses Satzes sind bekannt. Der Satz vom rechten Winkel im Halbkreise. Die Sätze über das vom Kreismittelpunkte auf die Sehne gefällte Lot und die entsprechenden Umkehrungen. Die Sätze über die Gleichheit der von einem Punkte aus an den Kreis gelegten Tangenten und die Halbierende ihres Schnittwinkels. Der Satz vom umbeschriebenen Kreise des Dreiecks. (Durch drei Punkte ist im allgemeinen nur ein Kreis möglich.) Durch zwei Punkte sind unendlich viele Kreise möglich, die ihre Mittelpunkte auf dem Mittellote haben. Einfache Sätze über das Kreisbüschel. Der Satz vom einbeschriebenen Kreise des Dreiecks. Der Satz von den anbeschriebenen Kreisen des Dreiecks. (An drei nicht parallele Geraden lassen sich vier Kreise legen.) An zwei Gerade lassen sich unendlich viele Kreise legen, die ihre Mittelpunkte auf den beiden Winkelhalbierenden haben. Jedes regelmäßige Vieleck hat einen um- und einen einbeschriebenen Kreis. Zu jedem Kreise gehört ein ein- und ein umbeschriebenes regelmäßiges Vieleck von gegebener Seitenzahl. Sätze über den Zusammenhang zwischen Winkeln und Bogen, z. B. $\widehat{\alpha} = \pi \frac{\alpha^0}{180^0}$, $\alpha^0 = \frac{\widehat{\alpha}}{\pi} 180^0$. Dabei ist $\pi = 3{,}14159265 \ldots$

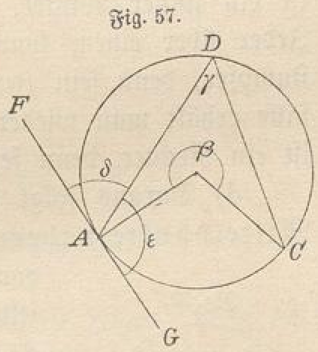
228) Bekannt sind bereits z. B. folgende Konstruktionen der Kreislehre: Vervielfachung des Kreisbogens, seine wiederholte Halbierung. Die Einteilung der Peripherie in 2, 4, 8, 16, 32, ... Teile, in 3, 6, 12, 24, 48, ... Teile. Die Konstruktion der entsprechenden Winkel. Die Konstruktion der entsprechenden regelmäßigen Vielecke, die dem Kreise ein- oder umbeschrieben sind. Die Konstruktion einiger regelmäßiger Vielecke über gegebenen Geraden (von gegebener Seite). Die Konstruktion des umbeschriebenen Kreises und der vier Berührungskreise für das Dreieck. Einige Dreiecks- und Viereckskonstruktionen, die mit der Kreislehre zusammenhängen. Konstruktionen einiger Reihen von Berührungskreisen. Konstruktion der von einem Punkte

aus an einen gegebenen Kreis gehenden Tangente. Konstruktion der äußeren und der inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise.

β) Die Peripherie- und Zentriwinkel, der Tangenten-Sehnenwinkel.

229) Liegt der Scheitel eines Winkels auf der Kreislinie, und sind seine Schenkel Sehnen, so heißt der Winkel ein Peripheriewinkel. (Ein solcher ist z. B. $\sphericalangle \gamma$ oder $\sphericalangle ADC$ in Fig. 57.) Von diesem Winkel sagt man, daß er auf dem konkaven Bogen AC steht. Verbindet man einen Punkt E dieses Bogens mit A und C, so erhält man einen Peripheriewinkel, der auf dem konvexen Bogen AC steht. [So steht auch der konkave Zentriwinkel AMC auf dem konkaven Bogen AC, der konvexe Zentriwinkel AMC oder β auf dem konvexen Bogen AC. Über einer Sehne AC kann sowohl ein konkaver, als auch ein konvexer Zentriwinkel stehen.]

Fig. 57.



230) Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Zentriwinkels.

Beweis. Erster Fall. Schenkel AM (Fig. 58a) liegt auf AB. Dann ist $\alpha = \beta + \gamma$ (Außenwinkel), da aber $\beta = \gamma$ ist, so folgt $\alpha = 2\beta$ und $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Zweiter Fall. M liegt zwischen AB und BC. (Fig. 58b.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha_1 = 2\beta_1$ (soeben be-

Fig. 58a.

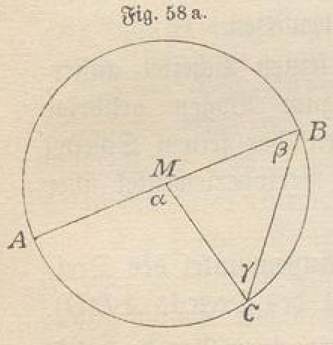


Fig. 58b.

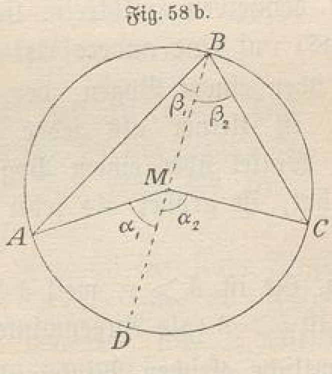
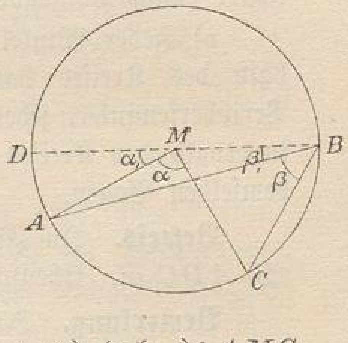


Fig. 58c.



wiesen) und $\alpha_2 = 2\beta_2$, folglich $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$, d. h. $\sphericalangle AMC = 2 \cdot (\sphericalangle ABC)$, also $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}(\sphericalangle AMC)$.

Dritter Fall. M liegt außerhalb ABC. (Fig. 58c.) Man