Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

α) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung

$QC = \frac{a}{2}$ so, daß $\sphericalangle CQP$ gleich α ist, und schlage um C einen Kreisbogen mit demselben Radius $\frac{a}{2}$, der QP in A schneidet. AC ist dann die Hälfte der Geraden in der geforderten Lage, die Verlängerung CB bis zum anderen Schenkel vollendet die Konstruktion.)

Bemerkung. Gleitet eine Gerade von gegebener Länge mit den Endpunkten auf den Schenkeln eines festen rechten rechten Winkels, so bewegt sich ihre Mitte auf dem besprochenen Kreise. Gleitet also der eine Endpunkt auf dem einen Schenkel und wird die Mitte durch eine Kurbel auf dem genannten Kreise geführt, so muß sich der andere Endpunkt geradlinig bewegen. (Eine wichtige Geradführung der Maschinenkunde.)

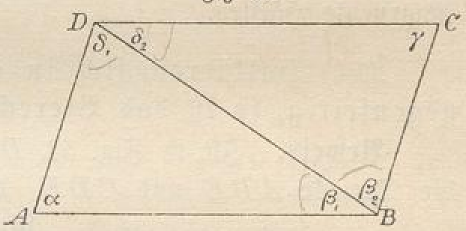
b) Lehre von den Parallelogrammen.

α) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung.

210) Die Gegenseiten und ebenso die Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich.

Beweis. Durch die Diagonale BD wird das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 53) in zwei kongruente Dreiecke geteilt, denn beide Dreiecke stimmen überein in der Seite BD, in den Winkeln δ_1 und β_2 (die als Wechselwinkel bei Parallelen gleich sind) und in den Winkeln β_1 und δ_2 (aus demselben Grunde), also nach dem zweiten Kongruenzsatze. Folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AB = CD$ und $AD = CB$; ferner ist $\alpha = \gamma$, außerdem aber $\delta_1 + \delta_2 = \beta_2 + \beta_1$, d. h. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$.

Fig. 53.



211) Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Die Kongruenz der Dreiecke in Fig. 53 folgt jetzt nach dem dritten Kongruenzsatze. Aus ihr folgt $\delta_1 = \beta_2$, sodaß $AD \parallel BC$ ist; außerdem folgt $\delta_2 = \beta_1$, sodaß auch $CD \parallel AB$ ist.

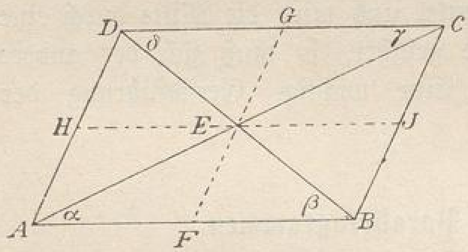
212) Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Fig. 53 $AB \# CD$, so folgt aus dem Parallelismus, daß $\delta_2 = \beta_1$ ist. Die Dreiecke stimmen jetzt in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem ersten Kongruenzsatze. Folglich ist auch $\delta_1 = \beta_2$ und daher auch $AD \parallel CB$, also $ABCD$ ein Parallelogramm.

213) Die Diagonalen jedes Parallelogramms halbieren einander.

Beweis. In Fig. 54 sind die Dreiecke ABE und CDE nach dem zweiten Kongruenzsatze kongruent, denn $DC = AB$, $\delta = \beta$ und $\gamma = \alpha$, folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AE = EC$ und $DE = EB$.

Fig. 54.

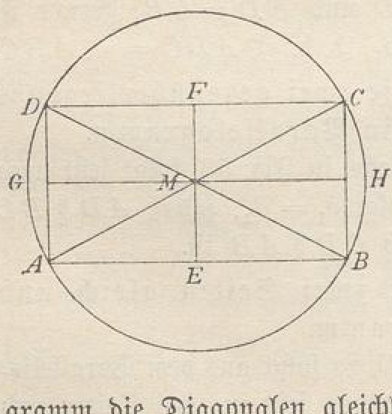


Bemerkung. Jedes Parallelogramm hat zwei Mittellinien (FG und HJ), die zu den Seiten parallel sind und durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gehen. Sie zerlegen das Parallelogramm in vier kongruente Parellelogramme, denn diese lassen sich mit den gleichliegenden Diagonalen so aufeinander decken, daß kongruente Dreiecke (zweiter Kongruenzsatz) aufeinander fallen. Die Mittellinien halbieren also die Seiten und sind ihnen bezüglich gleich. Jede durch den Mittelpunkt des Parallelogramms gelegte Gerade zerlegt das Parallelogramm in kongruente Hälften.

214) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Fig. 54 $DE = BE$ und $AE = CE$, so sind die Dreiecke ABE und CDE da auch die Scheitelwinkel übereinstimmen, kongruent (nach dem ersten Kongruenzsatze). Folglich ist $AB = CD$, und da auch die Wechselwinkel übereinstimmen, $AB \parallel CD$, also ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Fig. 55.



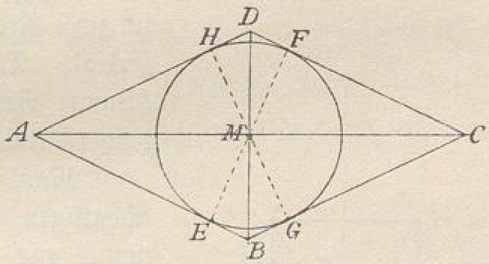
215) Ist im Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind sämtliche Winkel rechte (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rechteck. Im Rechteck sind beide Diagonalen gleich. Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen gleichlang, so ist es ein Rechteck. (Warum?) Durch die Ecken des Rechtecks läßt sich ein Kreis legen. Das Rechteck

hat zwei Symmetrieachsen, die Mittellinien des Rechtecks. (Vgl. Fig. 55.) Der dem Rechteck umbeschriebene Kreis ist gleichzeitig der den rechtwinkligen Dreiecken ABC, ABD usw. umbeschriebene. (Vgl. Winkel im Halbkreis.)

216) Sind in einem Parallelogramm zwei zusammenstoßende Seiten gleich, so sind alle Seiten gleich (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rhombus.

Der Rhombus wird durch die beiden Diagonalen in vier kongruente Dreiecke zerlegt. (Warum?) Folglich: Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Beide sind Symmetrieachsen des Rhombus. Die Winkel des Rhombus werden durch die Diagonalen halbiert. Die vom Schnittpunkte der Diagonalen auf die Seiten des Rhombus gefällten Lote sind gleich lang, in den Rhombus läßt sich also ein Kreis beschreiben (Beweise dies an Fig. 56.)

Fig. 56.



Stehen in einem Viereck die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren sie sich gegenseitig, so ist das Viereck ein Rhombus. (Warum?) Werden in einem Parallelogramm die Winkel durch die Diagonalen halbiert, so ist es ein Rhombus. (Warum?)

217) Das Quadrat ist Rhombus und Rechteck zugleich, seine Diagonalen sind also gleich, halbieren sich gegenseitig und stehen aufeinander senkrecht. Die Winkel des Quadrates werden durch die Diagonalen halbiert. In das Quadrat und um dasselbe läßt sich ein Kreis beschreiben.

β) Quadratkonstruktionen.

218) Folgende Konstruktionen sind schon durchgeführt worden: Über einer gegebenen Geraden ein Quadrat zu errichten. Ein Quadrat von gegebener Diagonale zu zeichnen; oder, was dasselbe ist, einem gegebenen Kreise ein Quadrat einzuzeichnen. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu zeichnen. Einem gegebenen Quadrate ein gegebenes kleineres einzuzeichnen (sodaß dessen Ecken auf seinen Seiten liegen). Um ein gegebenes Quadrat ein gegebenes größeres zu legen (sodaß dessen Seiten durch seine Ecken gehen).