Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

β) Allgemeines über Konstruktionen und Kongruenzsätze

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

überein, und sind die der größeren gegenüberliegenden Winkel gleichartig, so sind die Dreiecke kongruent.

β) Allgemeines über Konstruktionen und Kongruenzsätze.

196) Alle sonstigen Konstruktionen von Dreiecken aus drei voneinander unabhängigen gegebenen Stücken lassen sich auf die fünf hier angegebenen grundlegenden Dreieckskonstruktionen zurückführen. Dasselbe gilt von den sonstigen Kongruenzsätzen, die ebenso auf die hier angegebenen fünf zurückzuführen sind.

Daß die gegebenen Stücke unabhängig voneinander sein müssen, zeigt sich z. B. an den Dreieckswinkeln. Die Aufgabe, ein Dreieck aus gegebenen Winkeln α, β und γ zu konstruieren, ist nur denkbar, wenn $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist. Der Winkel γ also darf gar nicht gegeben werden, denn er ist schon durch α und β bestimmt, nicht unabhängig von ihnen. Daher sind zunächst nur zwei Stücke gegeben, α und β, und das dritte zur Konstruktion nötige Stück fehlt noch.

Bei der fünften Konstruktion hat man gesehen, daß eine Aufgabe bisweilen zwei Lösungen hat. Dies beruht darauf, daß ein Kreis eine Gerade oder einen anderen Kreis im allgemeinen in zwei Punkten schneiden kann. Dieser Umstand führte bei dieser Aufgabe auf zwei Punkte A und A_1. Aber dies ist nicht immer der Fall. So hat z. B. in Fig. 30 der Kreis ebenfalls zwei Schnitte mit der Geraden, aber es war trotzdem nur eine einzige Lösung der vierten Aufgabe möglich. Jeder eindeutig lösbaren Konstruktionsaufgabe entspricht ein Kongruenzsatz.

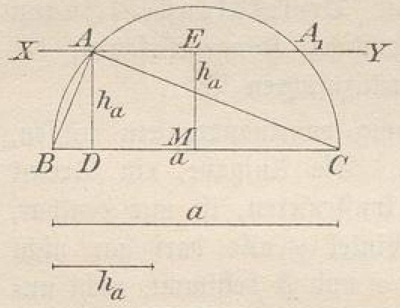
197) Die Konstruktionsaufgaben verlangen in der Regel eine Voruntersuchung darüber, wie die Aufgabe etwa angegriffen werden kann. Diese Untersuchung bezeichnet man als die Analysis der Aufgabe. An diese schließt sich die Konstruktion an. Nach Vollendung der letzteren ist der Beweis dafür zu geben, daß das konstruierte Gebilde die gegebenen Stücke hat. Die Analysis kann verschiedenartig ausfallen, sodaß bisweilen ganz verschiedene Konstruktionswege möglich werden. Je weniger Grundoperationen man dabei zur Ausführung nötig hat, für um so besser gilt die Lösung. — In der Regel wird noch eine Untersuchung darüber verlangt, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist, wann sie eine oder mehrere Lösungen hat, und welche Sonderfälle eintreten können. Diese Untersuchung heißt Determination.

198) Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck soll konstruiert werden aus der Hypotenuse a und der zu dieser gehörigen Höhe h_a.

2. **Analysis.** Man denke sich das Dreieck ABC gezeichnet. $\sphericalangle BAC$ sei der rechte Winkel, ihm gegenüber liege die Hypotenuse a, DA sei die zu dieser gehörige Höhe h_a. Man erinnere sich des Satzes, daß der Winkel im Halbkreis ein Rechter ist. Demnach muß die Spitze A des Dreiecks auf einem Halbkreise liegen, der über $BC = a$ als Durchmesser zu zeichnen ist. (Man sagt: Der geometrische Ort der Spitze A ist der zum Durchmesser a gehörige Halbkreis.) Ferner muß die Spitze A von der Hypotenuse den Abstand h_a haben, d. h. sie muß in einer Parallelen zu a liegen, die von dieser Geraden den Abstand h_a hat. (Dies ist ein zweiter geometrischer Ort für die Spitze.) Durch die Kenntnis der beiden geometrischen Orte wird die Konstruktion ermöglicht.

Fig. 48.



3. **Konstruktion.** a und h_a seien die nebst dem rechten Winkel gegebenen Stücke. Man lege a als BC beliebig hin und konstruiere die zugehörige Mittelsenkrechte, der man die Länge $ME = h_a$ gebe. Auf dieser errichte man im Punkte E ein Lot EX. Um M lege man mit MB einen Kreis, der das Lot EX in A schneide. Verbindet man A mit B und C, so hat man in ABC das verlangte Dreieck.

4. **Beweis.** Nach der Konstruktion ist $MB = MC$, also geht der geschlagene Kreisbogen durch B und C und ist ein Halbkreis vom Durchmesser $BC = a$. Da $\sphericalangle BAC$ ein Winkel im Halbkreise ist, muß er ein Rechter sein. ME steht senkrecht auf BC und hat die Länge h_a, also hat das zugehörige Lot EX überall, auch bei A, von der Hypotenuse a den Abstand h_a, d. h. die Höhe DA hat die gegebene Länge. Das Dreieck hat demnach die verlangten Stücke.

5. **Determination.** Ist h_a kleiner als der Radius $\frac{a}{2}$ des Kreises, so sind zwei Schnittpunkte A und A_1 möglich. Diese geben aber zwei kongruente Dreiecke, denn $\triangle ABC$ und $\triangle A_1CB$ sind symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte. Ist $h_a = \frac{a}{2}$, so wird das Lot EX Tangente des Kreises, dann ist also nur ein Dreieck möglich

und dieses ist rechtwinklig gleichschenklig. Ist $h_a > \frac{a}{2}$, so schneiden einander die beiden geometrischen Orte nicht, d. h. es ist keine Lösung möglich. (Für den Grenzfall $h_a = 0$ fällt A mit B oder mit C zusammen. Die Fläche des Dreiecks wird dann gleich Null.)

Bemerkung. Folgern kann man daraus den Satz: Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe überein, so sind sie kongruent. —

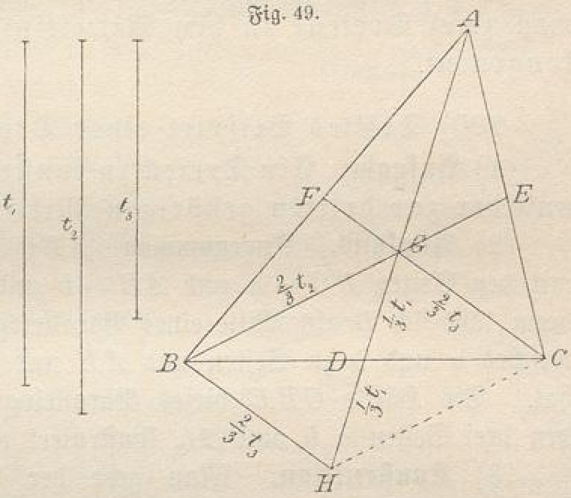
Bisweilen liegt aber die Lösung der Aufgabe weit versteckter, sodaß sie fast auf einen Kunstgriff hinausführt. Auch dazu sollen Beispiele gegeben werden.

199) Beispiel einer anderen Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Mittellinien zu konstruieren.

2) **Analysis.** Man denke sich das Dreieck ABC mit den drei Mittellinien AD, BE und CF oder t_1, t_2, t_3 gezeichnet und erinnere sich des Satzes, daß diese Geraden durch denselben Punkt G gehen, durch den von jeder der dritte Teil abgeschnitten wird. Danach ist $DG = \frac{1}{3}t_1$, $BG = \frac{2}{3}t_2$, $CG = \frac{2}{3}t_3$. Außerdem ist $DB = DC$. Macht man also noch $DH = DG$, so ist $BGCH$ ein Parallelogramm (denn die Diagonalen halbieren einander). Die Hälfte BGH dieses Parallelogramms ist ein Dreieck mit den Seiten $\frac{2}{3}t_1$, $\frac{2}{3}t_2$, $\frac{2}{3}t_3$, kann also leicht konstruiert werden, und auch der Rest der Konstruktion ist leicht zu übersehen.

Fig. 49.



3) **Konstruktion.** Sind in Fig. 49 t_1, t_2, t_3 die gegebenen Mittellinien, so schneide man von jeder den dritten Teil ab und konstruiere aus den Resten das Dreieck BGH. Man mache HD gleich $\frac{1}{3}t_1$, ziehe BD und verlängere es um sich selbst über D hinaus, was C gibt. HG verlängere man über G hinaus um sich selbst, was A gibt. Verbindet man A mit B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

4) **Beweis.** Nach der Konstruktion ist D der Halbierungspunkt von BC, also ist AD die eine Mittellinie des Dreiecks. Nach der Konstruktion ist $HA = \frac{4}{3}t_1$, $HD = \frac{1}{3}t_1$, also $AD = t_1$, d. h. die Mittellinie AD hat die richtige Länge. Da aber der Punkt G von ihr den dritten Teil abschneidet, so sind BG und CG Teile der beiden anderen Mittellinien. Dabei ist $BG = \frac{2}{3}t_2$ und auch gleich $\frac{2}{3}BE$, folglich ist $BE = t_2$. Da nach der Konstruktion GH und BC durch D halbiert sind, so ist das Viereck $BGCH$ ein Parallelogramm. Folglich ist $GC = BH = \frac{2}{3}t_3$. Da aber zugleich $GC = \frac{2}{3}CF$ ist, so ist $CF = t_3$. Das Dreieck hat also die verlangten Mittellinien.

5) **Determination.** Die Aufgabe ist lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Mittellinien größer ist als die dritte, denn dann kann $\triangle BGH$ konstruiert und die Figur vollendet werden. Im Grenzfalle $t_1 + t_3 = t_2$ wird die Fläche des Dreiecks ABC gleich Null. Warum? Sind zwei Mittellinien gleich, so wird das Dreieck gleichschenklig, sind alle drei gleich, so wird es gleichseitig.

Bemerkung. Daraus ergibt sich folgender Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in den Mittellinien überein, so sind sie kongruent.

200) Drittes Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der zur dritten gehörigen Mittellinie.

2) **Analysis.** Angenommen, ABC wäre das gesuchte Dreieck mit den Seiten $BC = a$ und $AC = b$ und der Mittellinie $CD = t_3$, dann läßt sich D als Mitte eines Parallelogramms $ACBE$ betrachten, welches a und b zu Seiten und AB und $CE = 2t_3$ zu Diagonalen hat. Die Hälfte CBE dieses Parallelogramms kann demnach aus den drei Seiten a b, und $2t_3$ konstruiert werden.

3) **Konstruktion.** Man gebe der beliebig hinzulegenden Geraden CE die Länge $2t_3$, schlage um C und E Bogen vom Radius a bezw. b, die einander in B schneiden, ziehe BD und verlängere es über D hinaus um sich selbst, und verbinde den neuen Endpunkt A mit C und C mit B, dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

4) Beweis und 5) Determination sind einfach.

Bemerkung. Damit sind zugleich folgende Aufgaben gelöst: a) Zwischen zwei konzentrischen Kreisen sei ein Punkt P gegeben; durch ihn soll von Kreis zu Kreis eine Gerade so gelegt werden, daß sie in P halbiert ist. b) Gegeben seien zwei konzentrische Kreise und ein zwischen ihnen liegender Punkt P. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, welches seine Ecken zu je zweien auf den beiden Kreisen und P zum Mittelpunkte hat.

201) Lassen sich zwei Vielecke auf dieselbe Art in homologe Dreiecke zerlegen, so sind die Vielecke kongruent.

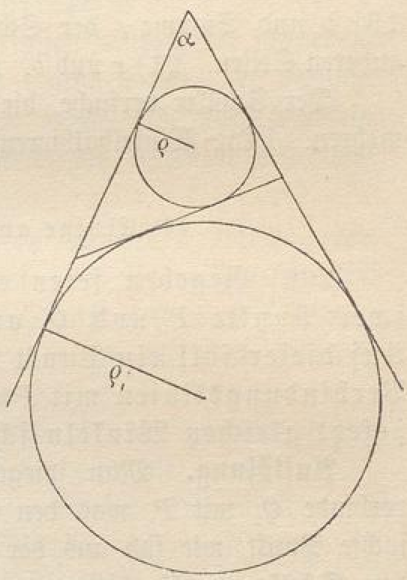
Der Beweis ist so einfach, daß er den Schülern überlassen werden kann.

In kongruenten Figuren stimmen homologe Geraden, homologe Winkel, homologe Kreise, homologe Flächenstücke überein.

γ) Dreieckskonstruktionen.*)

202) **Bezeichnungen.** Die den Punkten A, B, C gegenüberliegenden Dreiecksseiten sollen in der Regel mit a, b, c bezeichnet werden, die zu A, B, C gehörigen Winkel mit α, β, γ. Die Mittellinien des Dreiecks sollen t_1, t_2, t_3 heißen, die Winkelhalbierenden, bis zur Gegenseite gerechnet, w_1, w_2, w_3; die Höhen h_1, h_2, h_3; der Radius des Umkreises r, die Radien der vier Berührungskreise ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Dabei entsprechen die Marken 1, 2, 3 den Buchstaben A, B, C bezw. a, b, c. Der Umfang eines Dreiecks heiße u. Bei rechtwinkligen Dreiecken soll die Hypotenuse c heißen. Bei gleichschenkligen Dreiecken soll b die Basis sein.

Fig. 50.



203) Dreiecke zu konstruieren aus: 1) a, b, h_1. 2) a, b, h_3. 3) a, h_1, h_2. 4) a, h_2, h_3. 5) a, b, t_1. 6) a, t_1, t_2. 7) a, t_2, t_3. 8) a, b, t_3. 9) r, a, β. 10) r, a, h_1. 11) r, a, h_2. 12) r, a, t_1. 13) r, a, t_2.**) 14) ϱ, a, β. 15) ϱ, α, β. 16) ϱ, a_1, a_2 (a_1 und a_2 sollen die durch den Berührungspunkt entstehenden Teile von a sein). 17) ϱ, w_1, α. 18) ϱ_1, a, β. 19) ϱ_1, α, β. 20) ϱ_1, a_1, a_2. 21) ϱ_1, w_1, α. 22) ϱ, β, h_1. 23) ϱ_1, β, h_1. 24) ϱ_3, γ, h_1. 25) $\alpha, \varrho, \varrho_1$. 26) $\alpha, \varrho_1, \varrho_2$. 27) α, ϱ, h_1. 28) α, ϱ_2, h_1 (vgl.

*) Einige der Aufgaben sind schon vorher besprochen.

**) Der Ort der Mitten aller Sehnen, die von einem Punkte der Kreislinie ausgehen, ist ein Berührungskreis vom halben Radius. (Vgl. § 153.)