Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

a) Die Lehre von der Kongruenz

(Das Lot, welches auf dem Symmetrieradius eines Bogendreiecks im Endpunkte errichtet ist, berührt die beiden vollendeten Kreisbogen des Dreiecks. Diese Tangente ist bereits halbiert. Man zeichne über der einen Hälfte einen Halbkreis. Dieser gibt auf dem einen Grenzbogen den Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreise, denn die drei betreffenden Tangenten müssen gleich lang sein.)

II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.

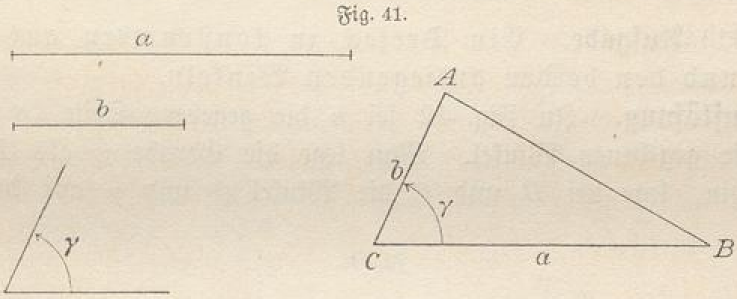
a) Die Lehre von der Kongruenz.

α) Die grundlegenden Kongruenzsätze für das Dreieck.

190) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Auflösung. In Fig. 41 seien a, b und $\sphericalangle\, \gamma$ die gegebenen Stücke. Man lege die Gerade a als CB beliebig hin, trage bei C

Fig. 41.



an sie den Winkel γ an, mache den neuen Schenkel $CA = b$ und verbinde A mit B. Dann ist Dreieck ABC das gesuchte, denn es enthält die gegebenen Stücke.

Bemerkungen. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald nur γ ein konkaver Winkel ist, was vorausgesetzt werden soll. (Ist der $\sphericalangle\, \gamma = 0$, so fällt Seite b auf a. Ist $\sphericalangle\, \gamma = 180^0$, so fällt b in die zu a entgegengesetzte Richtung. Im ersteren Grenzfalle wird Seite $c = a - b$, falls a die größere ist, im zweiten wird $c = a + b$. In beiden Fällen wird die Dreiecksfläche gleich Null; im allgemeinen wird die Fläche verschieden von Null.)

Die Aufgabe führt stets zu einer einzigen Lösung. So oft man ein Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruiert, sei es im einen oder im entgegengesetzten Sinne (Umklappung), stets erhält man Dreiecke, die sich mit dem zuerst konstruierten decken.

Legt man nämlich das zweite so konstruierte Dreieck so auf das erste, daß die Winkel γ aufeinander fallen und zwar mit den gleichlangen Schenkeln, so müssen auch die Endpunkte B einander decken, ebenso die Endpunkte A und demnach auch die Verbindungslinien AB. Daher stimmen die Verbindungslinien in der Länge überein und die Winkel bei B, ebenso die bei C in der Größe. Auch die Flächeninhalte beider Dreiecke stimmen überein.

Daraus folgt

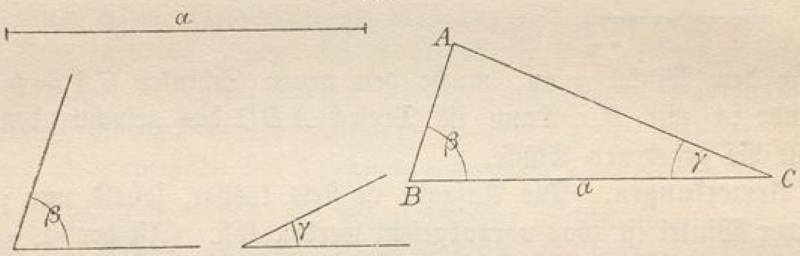
der erste Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent.

Die genannten drei Stücke a, b, γ genügen zur Konstruktion und zugleich zum Nachweise der Kongruenz, d. h. der Übereinstimmung der übrigen Stücke c, α, β und F (Fläche). Damit ist nachgewiesen, daß die Dreiecke auch in sonstigen Stücken übereinstimmen müssen, z. B. in gleichliegenden (homologen) Höhen, in gleichliegenden Mittellinien, in gleichliegenden Winkelhalbierenden, in den einbeschriebenen Kreisen, in den gleichliegenden An-Kreisen, in den Um-Kreisen usw.

191) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Auflösung. In Fig. 42 sei a die gegebene Seite, β und γ seien die gegebenen Winkel. Man lege die Gerade a als BC beliebig hin, lege bei B und C die Winkel β und γ auf derselben

Fig. 42.



Seite an die Gerade an und verlängere die freien Schenkel bis zum Durchschnitt A, dann ist ABC das gesuchte Dreieck, denn es hat die gegebenen Stücke.

Bemerkungen. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald $\beta + \gamma < 180^0$ ist. (Grenzfälle sind $\beta + \gamma = 0$, wobei die beiden Schenkel auf a fallen, $\alpha = 180^0$ und $F = 0$ wird, und $\beta + \gamma = 180^0$, wobei die Schenkel parallel werden und, wenn sie nicht zusammenfallen, ein unendliches Dreieck geben.)

Die Aufgabe hat stets nur eine einzige Lösung, denn alle anderen Dreiecke, die aus denselben Stücken konstruiert werden, lassen sich mit dem ersten zur Deckung bringen. Man kann sie nämlich mit den gleichen Seiten so aufeinander legen, daß die gleichen Winkelpaare aufeinander fallen. Weil dabei die freien Schenkelpaare einander decken, müssen auch die Durchschnittspunkte einander decken. Dadurch ist das Übereinstimmen in den übrigen Stücken b, c, α, F nachgewiesen. (Die Übereinstimmung im Winkel α war dabei selbstverständlich. Warum?)

Daraus folgt

der zweite Kongruenzsatz: *Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie kongruent.*

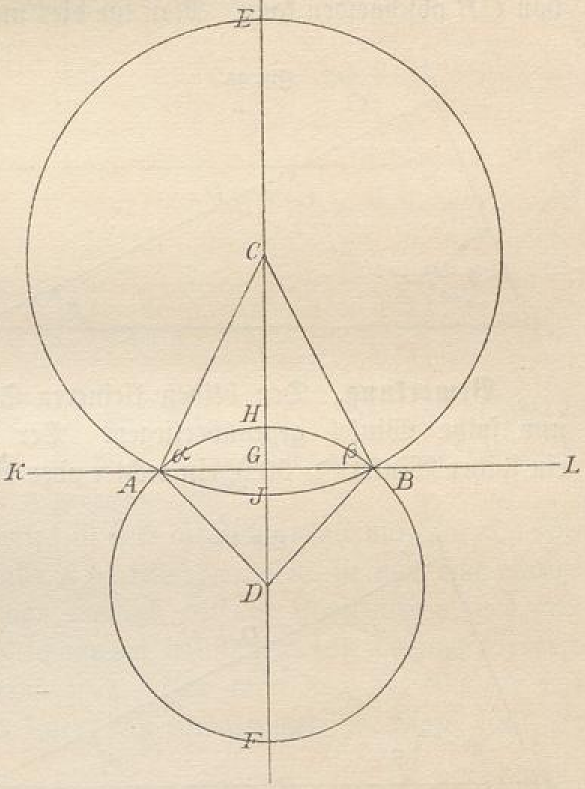
Man kann aber allgemeiner sagen:

Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und zwei homologen Winkeln überein, so sind sie kongruent.

192) **Aufgabe.** *Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten.*

Auflösung. Sind a, b und c die gegebenen Seiten, so lege man z. B. a als BC beliebig hin und schlage mit den Zirkelöffnungen b und c Kreisbogen um C und B. Schneiden diese einander in A, so verbinde man A mit B und C. Dann ist $\triangle\ ABC$ das gesuchte Dreieck, denn es hat die gegebenen Stücke.

Fig. 43.



Bemerkung. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Seiten größer ist als die dritte. (Im Grenzfalle $a = b + c$ fallen b und c auf a und der Flächeninhalt des Dreiecks ist Null.) Die Aufgabe hat aber nur eine einzige Lösung. Denkt man sich nämlich die Dreiecke mit der größten Seite so aneinander gelegt, daß ein aus zwei gleichschenkligen Dreiecken bestehendes Viereck $ABDC$ entsteht, so ist dieses symmetrisch gegen die Diagonale BC, also ist $\triangle BCA \cong BCD$. (Vgl. Fig. 43, die aber andere Buchstaben enthält.)

Man kann auch sagen, daß die zu ganzen Kreisen vervollständigten Konstruktionsbogen einander decken, daher auch ihre Durchschnitte. Aus der Übereinstimmung zweier Dreiecke in den drei Seiten folgt also die Übereinstimmung in den drei Winkeln und im Flächeninhalt.

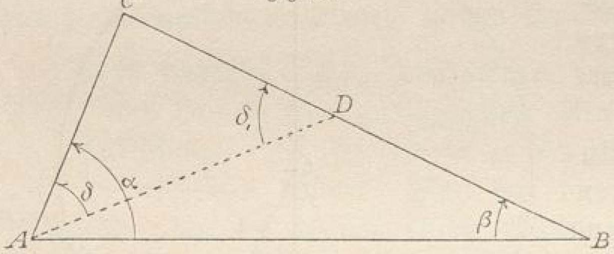
So ergibt sich

der dritte Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent.

193) Ein Hilfssatz und seine Umkehrung. Der größeren von zwei Dreiecksseiten liegt stets der größere Winkel gegenüber.

Beweis. In Fig. 44 sei $BC > AC$, sodaß man CA als CD von CB abschneiden kann. Man tue dies und verbinde A mit D. Dann ist $\triangle ACD$ gleichschenklig und $\sphericalangle \delta = \delta_1$. Dabei ist $\sphericalangle \delta_1$ als Außenwinkel des $\triangle ABD > \sphericalangle \beta$, also auch $\sphericalangle \delta > \sphericalangle \beta$, folglich ist α, welches größer als δ ist, erst recht größer als β.

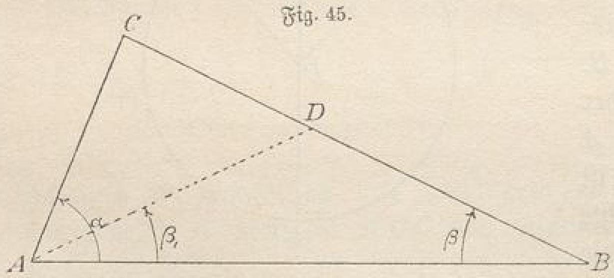
Fig. 44.



Bemerkung. Den beiden kleineren Seiten eines Dreiecks können nur spitze Winkel gegenüberliegen. Der größten Dreiecksseite kann ein spitzer Winkel ($> 60^0$), ein rechter oder ein stumpfer gegenüberliegen.

Umgekehrt folgt: Dem größeren von zwei Dreieckswinkeln liegt stets die größere Seite gegenüber.

Fig. 45.



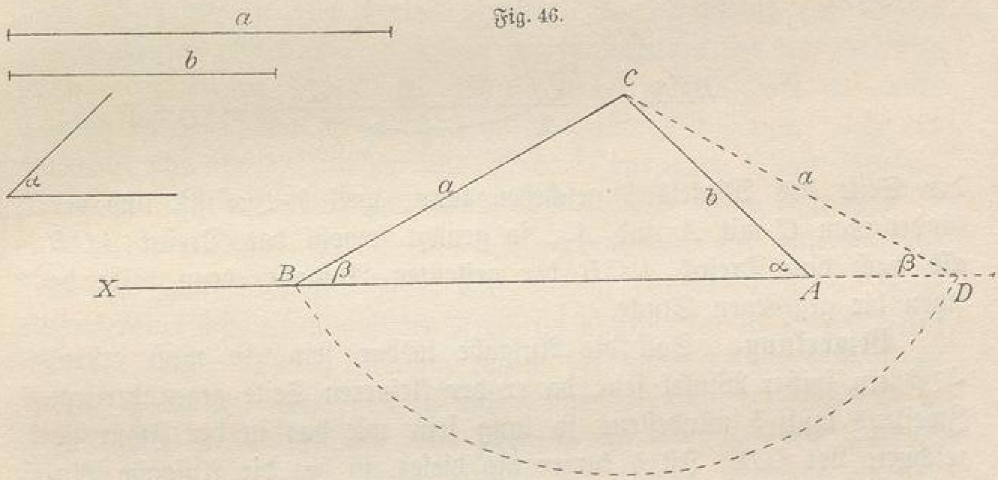
Beweis. In Fig. 45 sei $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$, sodaß man $\sphericalangle \beta$ als $\sphericalangle BAD = \beta_1$ vom Winkel α abziehen kann. Tut man dies nach Art der Fig. 45, so ist $\triangle ADB$ gleichschenklig, d. h. $BD = DA$. Im $\triangle ACD$ ist aber $AC < CD + DA$, also, da man für DA auch DB setzen kann, $AC < CD + DB$, d. h. $AC < CB$.

Bemerkung. Die einem rechten oder einem stumpfen Dreieckswinkel gegenüberliegende Seite ist stets die größte des Dreiecks. (Daher war das von einem Punkte auf eine Gerade gefällte Lot die kürzeste Linie, die vom Punkte nach der Geraden gezogen werden kann.)

194) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel.

Auflösung. In Fig. 46 seien a und b die gegebenen Seiten, a die größere davon; α sei der a gegenüberliegende Winkel. Man lege b als AC beliebig hin und lege bei A den Winkel α als $\sphericalangle CAX$ daran. Jetzt schlage man mit a um C einen Kreis, der die Gerade CX an zwei Stellen B und D schneiden muß (weil $a > b$ ist). Von

Fig. 46.



diesen Punkten ist nur der auf der Seite von α liegende Punkt B brauchbar. Verbindet man B mit C, so hat man das verlangte Dreieck, denn es besitzt die gegebenen Stücke.

Bemerkung. Das Dreieck ist stets möglich, sobald nur $\sphericalangle \alpha < 180^0$. (Was geschieht im Grenzfalle $\alpha = 180^0$?) Stets ist nur eine einzige Lösung möglich. Macht man nämlich dieselbe Konstruktion noch einmal, so lassen sich beide Zeichnungen vollständig zur Deckung bringen. Der Schüler weise dies selbst nach. (Er kann auch die Dreiecke mit den Seiten a so aneinander legen, daß eine symmetrische Figur entsteht.)

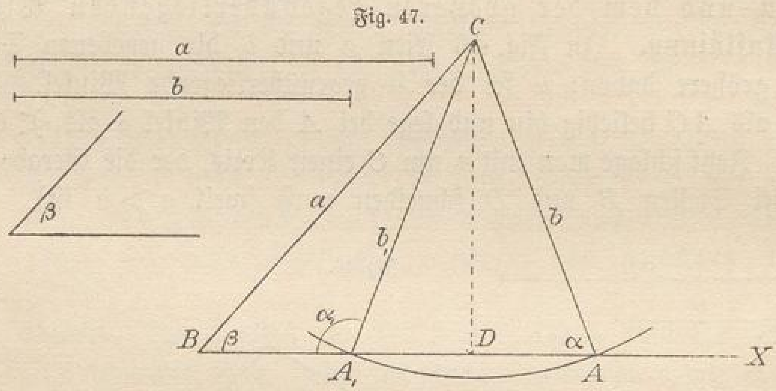
Daraus folgt

der vierte Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent.

195) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel.

Auflösung. In Fig. 47 seien a und b die gegebenen Seiten, b die kleinere davon, β der ihr gegenüberliegende Winkel. Man lege a als BC beliebig hin und lege bei B den Winkel β als $\sphericalangle CBX$ an. Darauf schlage man um C mit b einen Kreisbogen. Schneidet dieser die Gerade BX in zwei Punkten A und A_1, (was nur auf

Fig. 47.



der Seite des Winkels β geschehen kann, weil $b < a$ ist), und verbindet man C mit A und A_1, so genügt sowohl das Dreieck ACB, als auch das Dreieck A_1CB der gestellten Aufgabe, denn beide besitzen die gegebenen Stücke.

Bemerkung. Soll die Aufgabe lösbar sein, so muß erstens $\sphericalangle \beta$ ein spitzer Winkel sein, da er der kleineren Seite gegenüberliegt. Zweitens muß b mindestens so lang sein wie das in der Figur gezeichnete Lot CD. Ist b kürzer als dieses, so hat die Aufgabe keine Lösung. Ist b gleich diesem Lote, so hat die Aufgabe eine Lösung, und dabei ist das Dreieck ein rechtwinkliges. Ist b länger als dieses Lot, aber kleiner als a, so hat die Aufgabe zwei Lösungen, eine mit einem spitzen Winkel α und eine andere mit einem stumpfen Winkel α_1, der der Supplementwinkel von α ist. (Warum?)

Man kann die beiden Dreiecke, wie auch Fig. 46 zeigt, mit den Seiten b so aneinander legen, daß sie zusammen ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Sämtliche Dreiecke, die man aus denselben Stücken konstruiert, sind entweder dem Dreieck ABC oder dem Dreieck A_1BC kongruent. Zwei solche decken also einander, wenn die Winkel α in beiden „gleichartig" sind, d. h. beide spitz oder beide stumpf, oder beide rechte Winkel sind. Der Beweis der Deckung kann wie vorher dem Schüler überlassen werden.

Daraus folgt

der fünfte Kongruenzsatz. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel überein, und sind die der größeren gegenüberliegenden Winkel gleichartig, so sind die Dreiecke kongruent.

β) Allgemeines über Konstruktionen und Kongruenzsätze.

196) Alle sonstigen Konstruktionen von Dreiecken aus drei voneinander unabhängigen gegebenen Stücken lassen sich auf die fünf hier angegebenen grundlegenden Dreieckskonstruktionen zurückführen. Dasselbe gilt von den sonstigen Kongruenzsätzen, die ebenso auf die hier angegebenen fünf zurückzuführen sind.

Daß die gegebenen Stücke unabhängig voneinander sein müssen, zeigt sich z. B. an den Dreieckswinkeln. Die Aufgabe, ein Dreieck aus gegebenen Winkeln α, β und γ zu konstruieren, ist nur denkbar, wenn $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist. Der Winkel γ also darf gar nicht gegeben werden, denn er ist schon durch α und β bestimmt, nicht unabhängig von ihnen. Daher sind zunächst nur zwei Stücke gegeben, α und β, und das dritte zur Konstruktion nötige Stück fehlt noch.

Bei der fünften Konstruktion hat man gesehen, daß eine Aufgabe bisweilen zwei Lösungen hat. Dies beruht darauf, daß ein Kreis eine Gerade oder einen anderen Kreis im allgemeinen in zwei Punkten schneiden kann. Dieser Umstand führte bei dieser Aufgabe auf zwei Punkte A und A_1. Aber dies ist nicht immer der Fall. So hat z. B. in Fig. 30 der Kreis ebenfalls zwei Schnitte mit der Geraden, aber es war trotzdem nur eine einzige Lösung der vierten Aufgabe möglich. Jeder eindeutig lösbaren Konstruktionsaufgabe entspricht ein Kongruenzsatz.

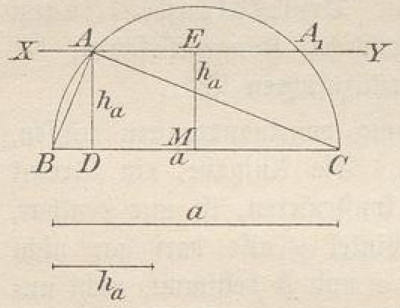
197) Die Konstruktionsaufgaben verlangen in der Regel eine Voruntersuchung darüber, wie die Aufgabe etwa angegriffen werden kann. Diese Untersuchung bezeichnet man als die Analysis der Aufgabe. An diese schließt sich die Konstruktion an. Nach Vollendung der letzteren ist der Beweis dafür zu geben, daß das konstruierte Gebilde die gegebenen Stücke hat. Die Analysis kann verschiedenartig ausfallen, sodaß bisweilen ganz verschiedene Konstruktionswege möglich werden. Je weniger Grundoperationen man dabei zur Ausführung nötig hat, für um so besser gilt die Lösung. — In der Regel wird noch eine Untersuchung darüber verlangt, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist, wann sie eine oder mehrere Lösungen hat, und welche Sonderfälle eintreten können. Diese Untersuchung heißt Determination.

198) Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck soll konstruiert werden aus der Hypotenuse a und der zu dieser gehörigen Höhe h_a.

2. **Analysis.** Man denke sich das Dreieck ABC gezeichnet. $\sphericalangle BAC$ sei der rechte Winkel, ihm gegenüber liege die Hypotenuse a, DA sei die zu dieser gehörige Höhe h_a.

Fig. 48.



Man erinnere sich des Satzes, daß der Winkel im Halbkreis ein Rechter ist. Demnach muß die Spitze A des Dreiecks auf einem Halbkreise liegen, der über $BC = a$ als Durchmesser zu zeichnen ist. (Man sagt: Der geometrische Ort der Spitze A ist der zum Durchmesser a gehörige Halbkreis.) Ferner muß die Spitze A von der Hypotenuse den Abstand h_a haben, d. h. sie muß in einer Parallelen zu a liegen, die von dieser Geraden den Abstand h_a hat. (Dies ist ein zweiter geometrischer Ort für die Spitze.) Durch die Kenntnis der beiden geometrischen Orte wird die Konstruktion ermöglicht.

3. **Konstruktion.** a und h_a seien die nebst dem rechten Winkel gegebenen Stücke. Man lege a als BC beliebig hin und konstruiere die zugehörige Mittelsenkrechte, der man die Länge $ME = h_a$ gebe. Auf dieser errichte man im Punkte E ein Lot EX. Um M lege man mit MB einen Kreis, der das Lot EX in A schneide. Verbindet man A mit B und C, so hat man in ABC das verlangte Dreieck.

4. **Beweis.** Nach der Konstruktion ist $MB = MC$, also geht der geschlagene Kreisbogen durch B und C und ist ein Halbkreis vom Durchmesser $BC = a$. Da $\sphericalangle BAC$ ein Winkel im Halbkreise ist, muß er ein Rechter sein. ME steht senkrecht auf BC und hat die Länge h_a, also hat das zugehörige Lot EX überall, auch bei A, von der Hypotenuse a den Abstand h_a, d. h. die Höhe DA hat die gegebene Länge. Das Dreieck hat demnach die verlangten Stücke.

5. **Determination.** Ist h_a kleiner als der Radius $\frac{a}{2}$ des Kreises, so sind zwei Schnittpunkte A und A_1 möglich. Diese geben aber zwei kongruente Dreiecke, denn $\triangle ABC$ und $\triangle A_1CB$ sind symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte. Ist $h_a = \frac{a}{2}$, so wird das Lot EX Tangente des Kreises, dann ist also nur ein Dreieck möglich

und dieses ist rechtwinklig gleichschenklig. Ist $h_a > \frac{a}{2}$, so schneiden einander die beiden geometrischen Orte nicht, d. h. es ist keine Lösung möglich. (Für den Grenzfall $h_a = 0$ fällt A mit B oder mit C zusammen. Die Fläche des Dreiecks wird dann gleich Null.)

Bemerkung. Folgern kann man daraus den Satz: Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe überein, so sind sie kongruent. —

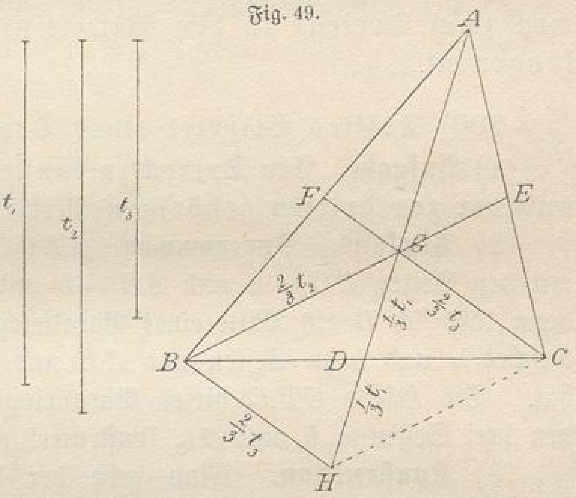
Bisweilen liegt aber die Lösung der Aufgabe weit versteckter, sodaß sie fast auf einen Kunstgriff hinausführt. Auch dazu sollen Beispiele gegeben werden.

199) Beispiel einer anderen Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Mittellinien zu konstruieren.

2) **Analysis.** Man denke sich das Dreieck ABC mit den drei Mittellinien AD, BE und CF oder t_1, t_2, t_3 gezeichnet und erinnere sich des Satzes, daß diese Geraden durch denselben Punkt G gehen, durch den von jeder der dritte Teil abgeschnitten wird. Danach ist $DG = \frac{1}{3}t_1$, $BG = \frac{2}{3}t_2$, $CG = \frac{2}{3}t_3$. Außerdem ist $DB = DC$. Macht man also noch $DH = DG$, so ist $BGCH$ ein Parallelogramm (denn die Diagonalen halbieren einander). Die Hälfte BGH dieses Parallelogramms ist ein Dreieck mit den Seiten $\frac{2}{3}t_1$, $\frac{2}{3}t_2$, $\frac{2}{3}t_3$, kann also leicht konstruiert werden, und auch der Rest der Konstruktion ist leicht zu übersehen.

Fig. 49.



3) **Konstruktion.** Sind in Fig. 49 t_1, t_2, t_3 die gegebenen Mittellinien, so schneide man von jeder den dritten Teil ab und konstruiere aus den Resten das Dreieck BGH. Man mache HD gleich $\frac{1}{3}t_1$, ziehe BD und verlängere es um sich selbst über D hinaus, was C gibt. HG verlängere man über G hinaus um sich selbst, was A gibt. Verbindet man A mit B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

4) **Beweis.** Nach der Konstruktion ist D der Halbierungspunkt von BC, also ist AD die eine Mittellinie des Dreiecks. Nach der Konstruktion ist $HA = \frac{4}{3}t_1$, $HD = \frac{1}{3}t_1$, also $AD = t_1$, d. h. die Mittellinie AD hat die richtige Länge. Da aber der Punkt G von ihr den dritten Teil abschneidet, so sind BG und CG Teile der beiden anderen Mittellinien. Dabei ist $BG = \frac{2}{3}t_2$ und auch gleich $\frac{2}{3}BE$, folglich ist $BE = t_2$. Da nach der Konstruktion GH und BC durch D halbiert sind, so ist das Viereck $BGCH$ ein Parallelogramm. Folglich ist $GC = BH = \frac{2}{3}t_3$. Da aber zugleich $GC = \frac{2}{3}CF$ ist, so ist $CF = t_3$. Das Dreieck hat also die verlangten Mittellinien.

5) **Determination.** Die Aufgabe ist lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Mittellinien größer ist als die dritte, denn dann kann $\triangle BGH$ konstruiert und die Figur vollendet werden. Im Grenzfalle $t_1 + t_3 = t_2$ wird die Fläche des Dreiecks ABC gleich Null. Warum? Sind zwei Mittellinien gleich, so wird das Dreieck gleichschenklig, sind alle drei gleich, so wird es gleichseitig.

Bemerkung. Daraus ergibt sich folgender Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in den Mittellinien überein, so sind sie kongruent.

200) Drittes Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der zur dritten gehörigen Mittellinie.

2) **Analysis.** Angenommen, ABC wäre das gesuchte Dreieck mit den Seiten $BC = a$ und $AC = b$ und der Mittellinie $CD = t_3$, dann läßt sich D als Mitte eines Parallelogramms $ACBE$ betrachten, welches a und b zu Seiten und AB und $CE = 2t_3$ zu Diagonalen hat. Die Hälfte CBE dieses Parallelogramms kann demnach aus den drei Seiten a b, und $2t_3$ konstruiert werden.

3) **Konstruktion.** Man gebe der beliebig hinzulegenden Geraden CE die Länge $2t_3$, schlage um C und E Bogen vom Radius a bezw. b, die einander in B schneiden, ziehe BD und verlängere es über D hinaus um sich selbst, und verbinde den neuen Endpunkt A mit C und C mit B, dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

4) Beweis und 5) Determination sind einfach.

Bemerkung. Damit sind zugleich folgende Aufgaben gelöst: a) Zwischen zwei konzentrischen Kreisen sei ein Punkt P gegeben; durch ihn soll von Kreis zu Kreis eine Gerade so gelegt werden, daß sie in P halbiert ist. b) Gegeben seien zwei konzentrische Kreise und ein zwischen ihnen liegender Punkt P. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, welches seine Ecken zu je zweien auf den beiden Kreisen und P zum Mittelpunkte hat.

201) Lassen sich zwei Vielecke auf dieselbe Art in homologe Dreiecke zerlegen, so sind die Vielecke kongruent.

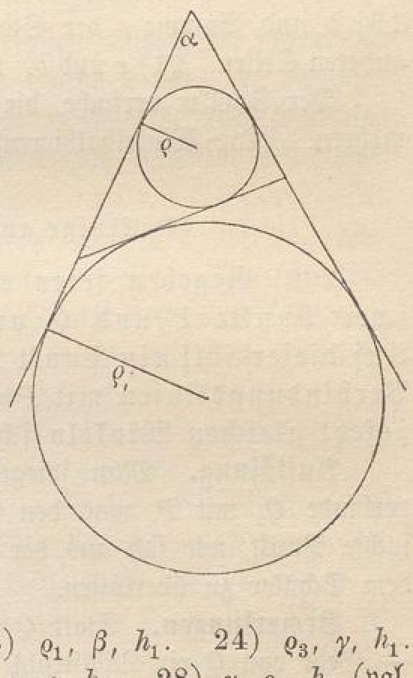
Der Beweis ist so einfach, daß er den Schülern überlassen werden kann.

In kongruenten Figuren stimmen homologe Geraden, homologe Winkel, homologe Kreise, homologe Flächenstücke überein.

γ) Dreieckskonstruktionen.*)

202) **Bezeichnungen.** Die den Punkten A, B, C gegenüberliegenden Dreiecksseiten sollen in der Regel mit a, b, c bezeichnet werden, die zu A, B, C gehörigen Winkel mit α, β, γ. Die Mittellinien des Dreiecks sollen t_1, t_2, t_3 heißen, die Winkelhalbierenden, bis zur Gegenseite gerechnet, w_1, w_2, w_3; die Höhen h_1, h_2, h_3; der Radius des Umkreises r, die Radien der vier Berührungskreise ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Dabei entsprechen die Marken 1, 2, 3 den Buchstaben A, B, C bezw. a, b, c. Der Umfang eines Dreiecks heiße u. Bei rechtwinkligen Dreiecken soll die Hypotenuse c heißen. Bei gleichschenkligen Dreiecken soll b die Basis sein.

Fig. 50.



203) Dreiecke zu konstruieren aus: 1) a, b, h_1. 2) a, b, h_3. 3) a, h_1, h_2. 4) a, h_2, h_3. 5) a, b, t_1. 6) a, t_1, t_2. 7) a, t_2, t_3. 8) a, b, t_3. 9) r, a, β. 10) r, a, h_1. 11) r, a, h_2. 12) r, a, t_1. 13) r, a, t_2.**) 14) ϱ, a, β. 15) ϱ, α, β. 16) ϱ, a_1, a_2 (a_1 und a_2 sollen die durch den Berührungspunkt entstehenden Teile von a sein). 17) ϱ, w_1, α. 18) ϱ_1, a, β. 19) ϱ_1, α, β. 20) ϱ_1, a_1, a_2. 21) ϱ_1, w_1, α. 22) ϱ, β, h_1. 23) ϱ_1, β, h_1. 24) ϱ_3, γ, h_1. 25) $\alpha, \varrho, \varrho_1$. 26) $\alpha, \varrho_1, \varrho_2$. 27) α, ϱ, h_1. 28) α, ϱ_2, h_1 (vgl.

*) Einige der Aufgaben sind schon vorher besprochen.

**) Der Ort der Mitten aller Sehnen, die von einem Punkte der Kreislinie ausgehen, ist ein Berührungskreis vom halben Radius. (Vgl. § 153.)

Fig. 50). 29) Aus den Seiten a_1, b_1, c_1 des Höhenfußpunktdreiecks. 30) Aus α, β und der Summe s der beiden anderen Seiten. 31) Aus α, β und der Differenz d der beiden anderen Seiten. (Bei diesen beiden Aufgaben kommen Sätze vom Außenwinkel beim gleichschenkligen Dreiecke zur Anwendung.)

204) Rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Hypotenuse c und Kathete a. 2) Hypotenuse c und α. 3) Hypotenuse c und Höhe h_3. 4) Hypotenuse c und t_1.*) 5) ϱ und spitzem Winkel α 6) ϱ und Kathete a. 7) ϱ_1 (an Kathete a) und α. 8) ϱ_1 und β. 9) ϱ_1 und a. 10) ϱ und ϱ_1. 11) ϱ und ϱ_3. 12) ϱ_1 und ϱ_3. 13) ϱ_3 und a. 14) ϱ_3 und β. 15) Hypotenuse c und Summe s der beiden Katheten. 16) Hypotenuse c und Unterschied d der beiden Katheten.

205) Gleichschenklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Basis b und Höhe h_2 (oder ϱ_1). 2) Basis b und ϱ. 3) Basis b und ϱ_2. 4) Basis b und $\sphericalangle\beta$. 5) Basis b und t_1. 6) Basis b und h_1. 7) ϱ und ϱ_2. 8) ϱ und h_2 (oder ϱ_1). 9) ϱ und β. 10) ϱ und α. 11) a und h_1. 12) α und w_1. 13) β und w_1. 14) ϱ_2 und β. 15) ϱ_2 und α. 16) ϱ_1 und α. 17) ϱ_1 und β. 18) a und t_2. 19) b und Summe s der Schenkel. 20) a und Summe der beiden anderen Seiten. 21) r und b. 22) r und a. 23) r und β. 24) r und α.

Der Schüler versuche, die Beispiele dieses Abschnitts selbst zu vermehren. (Die Winkelhalbierenden pflegen Schwierigkeiten zu machen.)

δ) Einige andere Konstruktionen.

206) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade KL und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß dessen Verbindungslinien mit P und Q die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.**)

Auflösung. Man spiegele Q gegen die Gerade, was Q_1 gibt, verbinde Q_1 mit P, was den Schnittpunkt X gibt. Dies ist der gesuchte Punkt, wie sich aus der Geraden XQ leicht ergibt. — Beweis dem Schüler zu überlassen.

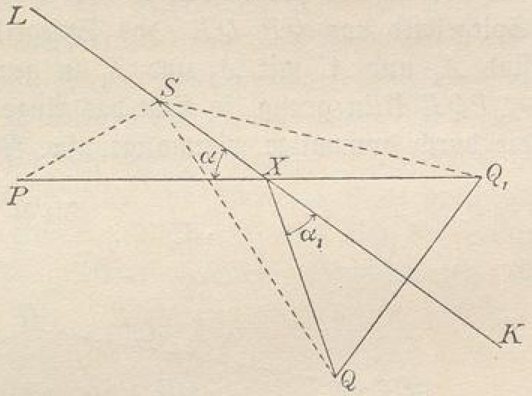
Bemerkungen. Statt Q zu spiegeln, kann man auch P spiegeln. — Geht von Q ein Lichtstrahl an die spiegelnde Gerade KL, so wird er so zurückgeworfen, daß $\sphericalangle\alpha = \alpha_1$ ist. Er hat also, um von Q

*) Vgl. Anm. 2) auf Seite 77.

**) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.

aus ins Auge, welches sich in P befinden möge, zu gelangen, den konstruierten Weg QXP zurückzulegen. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von PX das Spiegelbild Q_1 von Q.

Fig. 51.



Die Gerade $Q_1 P = XQ_1 + PX$ ist der kürzeste Weg zwischen Q_1 und P. Folglich ist auch $QX + XP$ der kürzeste Weg, der von Q aus zum Spiegel und dann nach P führt. Der Lichtstrahl, der von Q zum Spiegel und nach dem Auge geht, hat demnach den kürzesten unter den möglichen Wegen eingeschlagen.

207) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade KL und zwei beliebige Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt X so konstruiert werden, daß dessen Verbindungslinien mit P und Q die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.*)

(Die Auflösung soll dem Schüler überlassen bleiben, der wiederum mit der Spiegelung des einen Punktes zu beginnen hat. Er versuche auch zu zeigen, daß der Unterschied der Wege PX und XQ ein Höchstwert für alle möglichen Wege von P zur Geraden und vom Schnittpunkte nach Q ist.)

208) Innerhalb eines gegebenen Winkels PQR seien zwei Punkte A und B gegeben; auf den Schenkeln sollen Punkte C und D so bestimmt werden, daß AC und CD mit dem einen Schenkel entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, CD und DB mit dem anderen. (Fig. 52.)

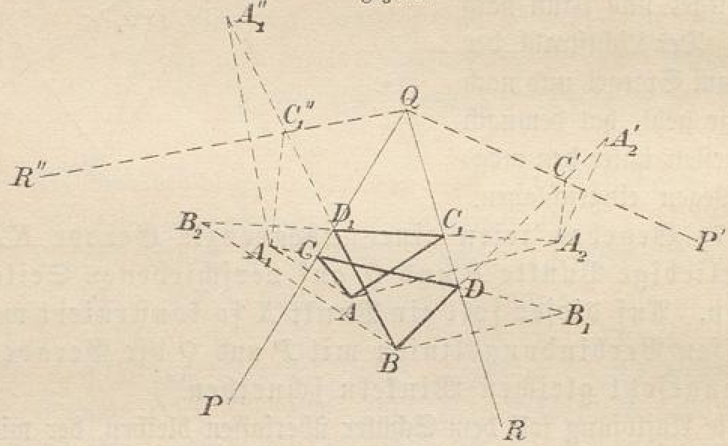
(Man bilde die Spiegelbilder A_1 und B_1 von A und B in bezug auf die Schenkel PQ und QR, dann gibt die Gerade $A_1 B_1$ die gesuchten Punkte C und D. Bildet man die Spiegelbilder A_2 und B_2 in bezug auf die vertauschten Schenkel, so erhält man ein zweites Punktpaar C_1 und D_1. Die Beweise führe der Schüler.)

Bemerkungen. Denkt man sich in A ein Kerzenlicht, in B das Auge der Beobachters, und sind PQ und QR Spiegel, so ist $AC + CD + DB$ der Weg eines zum Auge gelangenden Lichtstrahls, der von jedem Spiegel unter demselben Winkel zurückgeworfen (re-

*) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.

flektiert) wird, unter dem er auf ihn fällt. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von BD ein Spiegelbild A_2' von A, und zwar ist $A_2'B = AC + CD + DB$. Auch in A_1'' sieht das Auge ein Spiegelbild von A, und dabei ist $A_1''B = AC_1 + C_1D_1 + D_1B$. — QP' ist das Spiegelbild von QP, QR'' das Spiegelbild von QR. In der Figur sind A_2' und A_1'' mit A_2 und A_1 in gewisse Beziehung gesetzt. — Ist $\sphericalangle PQR$ klein genug, so sieht das Auge B noch weitere Bilder von A, die durch dreimalige, viermalige usw. Reflexion an den Spiegeln her-

Fig. 52.



vorgebracht werden. Auch für diese Spiegelungen versuche man die Wege der Lichtstrahlen zu konstruieren. Man untersuche, ob der Weg $AC + CD + DB$ ein kleinster Weg (Minimalweg) für den Gang von A nach dem ersten, dann zum zweiten Spiegel, dann nach B ist, ebenso ob $AC' + C'D' + D'B$ ein Minimalweg ist usw. — A und B können ihre Rollen vertauschen. Je nach ihrer Lage können gewisse Sonderfälle eintreten.

208a) Man versuche dieselbe Aufgabe für eine von drei spiegelnden Geraden begrenzte Fläche zu lösen.

209) Eine Gerade von gegebener Länge a so in einen festen rechten Winkel PQR einzulegen, daß ihre Endpunkte auf den Schenkeln liegen und sie den einen Schenkel unter gegebenem spitzen Winkel α schneidet.

(Nach dem Satze über den Um-Kreis des rechtwinkligen Dreiecks hat die Mitte der Geraden zum geometrischen Ort einen um Q mit dem Radius $\frac{a}{2}$ beschriebenen Kreisbogen. Man zeichne einen Radius

*) Einiges aus den obigen Übungen wird wiederholt.

$QC = \frac{a}{2}$ so, daß $\sphericalangle CQP$ gleich α ist, und schlage um C einen Kreisbogen mit demselben Radius $\frac{a}{2}$, der QP in A schneidet. AC ist dann die Hälfte der Geraden in der geforderten Lage, die Verlängerung CB bis zum anderen Schenkel vollendet die Konstruktion.)

Bemerkung. Gleitet eine Gerade von gegebener Länge mit den Endpunkten auf den Schenkeln eines festen rechten rechten Winkels, so bewegt sich ihre Mitte auf dem besprochenen Kreise. Gleitet also der eine Endpunkt auf dem einen Schenkel und wird die Mitte durch eine Kurbel auf dem genannten Kreise geführt, so muß sich der andere Endpunkt geradlinig bewegen. (Eine wichtige Geradführung der Maschinenkunde.)

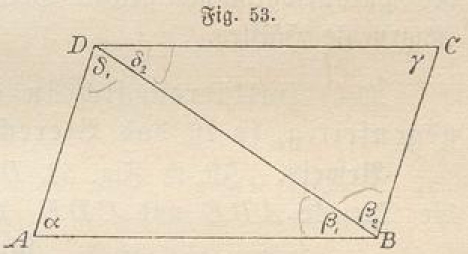
b) Lehre von den Parallelogrammen.

α) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung.

210) Die Gegenseiten und ebenso die Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich.

Beweis. Durch die Diagonale BD wird das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 53) in zwei kongruente Dreiecke geteilt, denn beide Dreiecke stimmen überein in der Seite BD, in den Winkeln δ_1 und β_2 (die als Wechselwinkel bei Parallelen gleich sind) und in den Winkeln β_1 und δ_2 (aus demselben Grunde), also nach dem zweiten Kongruenzsatze. Folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AB = CD$ und $AD = CB$; ferner ist $\alpha = \gamma$, außerdem aber $\delta_1 + \delta_2 = \beta_2 + \beta_1$, d. h. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$.

Fig. 53.



211) Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Die Kongruenz der Dreiecke in Fig. 53 folgt jetzt nach dem dritten Kongruenzsatze. Aus ihr folgt $\delta_1 = \beta_2$, sodaß $AD \parallel BC$ ist; außerdem folgt $\delta_2 = \beta_1$, sodaß auch $CD \parallel AB$ ist.

212) Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Fig. 53 $AB \# CD$, so folgt aus dem Parallelismus, daß $\delta_2 = \beta_1$ ist. Die Dreiecke stimmen jetzt in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem