Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

(Das Lot, welches auf dem Symmetrieradius eines Bogendreiecks im Endpunkte errichtet ist, berührt die beiden vollendeten Kreisbogen des Dreiecks. Diese Tangente ist bereits halbiert. Man zeichne über der einen Hälfte einen Halbkreis. Dieser gibt auf dem einen Grenzbogen den Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreise, denn die drei betreffenden Tangenten müssen gleich lang sein.)

II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.

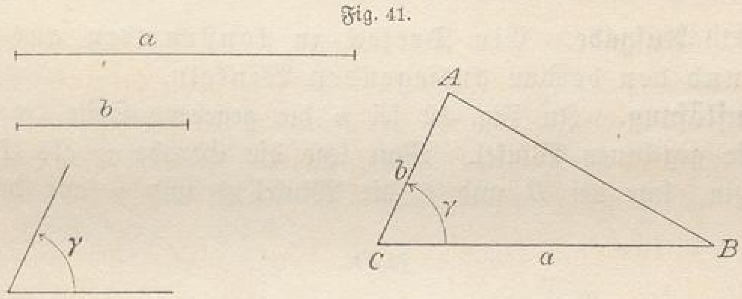
a) Die Lehre von der Kongruenz.

α) Die grundlegenden Kongruenzsätze für das Dreieck.

190) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Auflösung. In Fig. 41 seien a, b und $\sphericalangle \gamma$ die gegebenen Stücke. Man lege die Gerade a als CB beliebig hin, trage bei C

Fig. 41.



an sie den Winkel γ an, mache den neuen Schenkel $CA = b$ und verbinde A mit B. Dann ist Dreieck ABC das gesuchte, denn es enthält die gegebenen Stücke.

Bemerkungen. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald nur γ ein konkaver Winkel ist, was vorausgesetzt werden soll. (Ist der $\sphericalangle \gamma = 0$, so fällt Seite b auf a. Ist $\sphericalangle \gamma = 180^0$, so fällt b in die zu a entgegengesetzte Richtung. Im ersteren Grenzfalle wird Seite $c = a - b$, falls a die größere ist, im zweiten wird $c = a + b$. In beiden Fällen wird die Dreiecksfläche gleich Null; im allgemeinen wird die Fläche verschieden von Null.)

Die Aufgabe führt stets zu einer einzigen Lösung. So oft man ein Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruiert, sei es im einen oder im entgegengesetzten Sinne (Umklappung), stets erhält man Dreiecke, die sich mit dem zuerst konstruierten decken.

Legt man nämlich das zweite so konstruierte Dreieck so auf das erste, daß die Winkel γ aufeinander fallen und zwar mit den gleichlangen Schenkeln, so müssen auch die Endpunkte B einander decken, ebenso die Endpunkte A und demnach auch die Verbindungslinien AB. Daher stimmen die Verbindungslinien in der Länge überein und die Winkel bei B, ebenso die bei C in der Größe. Auch die Flächeninhalte beider Dreiecke stimmen überein.

Daraus folgt

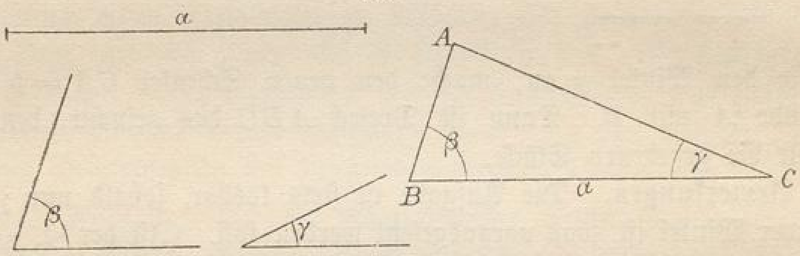
der erste Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent.

Die genannten drei Stücke a, b, γ genügen zur Konstruktion und zugleich zum Nachweise der Kongruenz, d. h. der Übereinstimmung der übrigen Stücke c, α, β und F (Fläche). Damit ist nachgewiesen, daß die Dreiecke auch in sonstigen Stücken übereinstimmen müssen, z. B. in gleichliegenden (homologen) Höhen, in gleichliegenden Mittellinien, in gleichliegenden Winkelhalbierenden, in den einbeschriebenen Kreisen, in den gleichliegenden An-Kreisen, in den Um-Kreisen usw.

191) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Auflösung. In Fig. 42 sei a die gegebene Seite, β und γ seien die gegebenen Winkel. Man lege die Gerade a als BC beliebig hin, lege bei B und C die Winkel β und γ auf derselben

Fig. 42.



Seite an die Gerade an und verlängere die freien Schenkel bis zum Durchschnitt A, dann ist ABC das gesuchte Dreieck, denn es hat die gegebenen Stücke.

Bemerkungen. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald $\beta + \gamma < 180^0$ ist. (Grenzfälle sind $\beta + \gamma = 0$, wobei die beiden Schenkel auf a fallen, $\alpha = 180^0$ und $F = 0$ wird, und $\beta + \gamma = 180^0$, wobei die Schenkel parallel werden und, wenn sie nicht zusammenfallen, ein unendliches Dreieck geben.)

Die Aufgabe hat stets nur eine einzige Lösung, denn alle anderen Dreiecke, die aus denselben Stücken konstruiert werden, lassen sich mit dem ersten zur Deckung bringen. Man kann sie nämlich mit den gleichen Seiten so aufeinander legen, daß die gleichen Winkelpaare aufeinander fallen. Weil dabei die freien Schenkelpaare einander decken, müssen auch die Durchschnittspunkte einander decken. Dadurch ist das Übereinstimmen in den übrigen Stücken b, c, α, F nachgewiesen. (Die Übereinstimmung im Winkel α war dabei selbstverständlich. Warum?)

Daraus folgt

der zweite Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie kongruent.

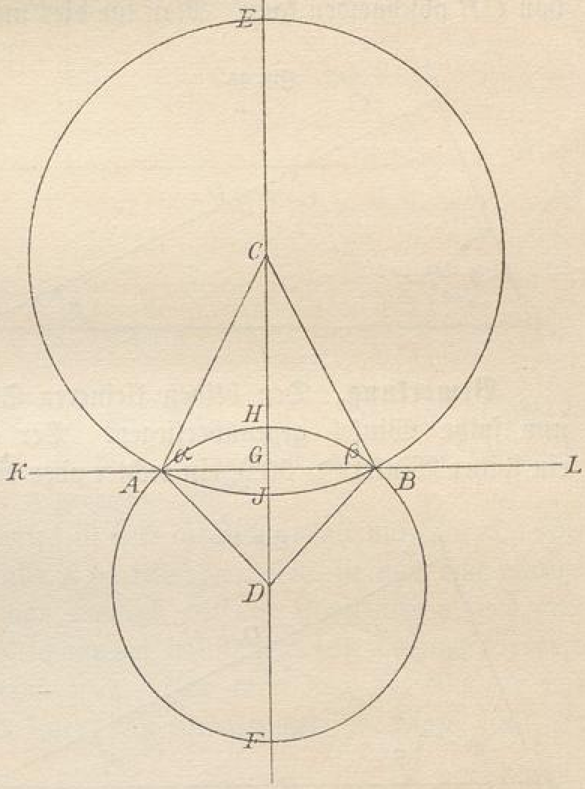
Man kann aber allgemeiner sagen:

Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und zwei homologen Winkeln überein, so sind sie kongruent.

192) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten.

Auflösung. Sind a, b und c die gegebenen Seiten, so lege man z. B. a als BC beliebig hin und schlage mit den Zirkelöffnungen b und c Kreisbogen um C und B. Schneiden diese einander in A, so verbinde man A mit B und C. Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck, denn es hat die gegebenen Stücke.

Fig. 43.



Bemerkung. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Seiten größer ist als die dritte. (Im Grenzfalle $a = b + c$ fallen b und c auf a und der Flächeninhalt des Dreiecks ist Null.) Die Aufgabe hat aber nur eine einzige Lösung. Denkt man sich nämlich die Dreiecke mit der größten Seite so aneinander gelegt, daß ein aus zwei gleichschenkligen Dreiecken bestehendes Viereck $ABDC$ entsteht, so ist dieses symmetrisch gegen die Diagonale BC, also ist $\triangle BCA \cong BCD$. (Vgl. Fig. 43, die aber andere Buchstaben enthält.)

Man kann auch sagen, daß die zu ganzen Kreisen vervollständigten Konstruktionsbogen einander decken, daher auch ihre Durchschnitte. Aus der Übereinstimmung zweier Dreiecke in den drei Seiten folgt also die Übereinstimmung in den drei Winkeln und im Flächeninhalt.

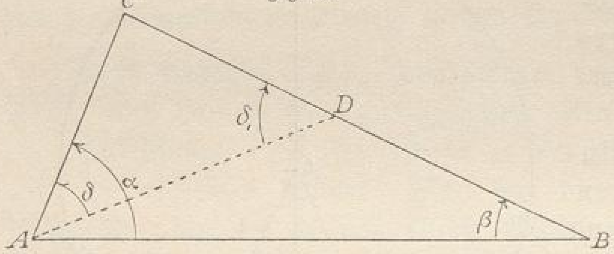
So ergibt sich

der dritte Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent.

193) Ein Hilfssatz und seine Umkehrung. Der größeren von zwei Dreiecksseiten liegt stets der größere Winkel gegenüber.

Beweis. In Fig. 44 sei $BC > AC$, sodaß man CA als CD von CB abschneiden kann. Man tue dies und verbinde A mit D. Dann ist $\triangle ACD$ gleichschenklig und $\sphericalangle \delta = \delta_1$. Dabei ist $\sphericalangle \delta_1$ als Außenwinkel des $\triangle ABD > \sphericalangle \beta$, also auch $\sphericalangle \delta > \sphericalangle \beta$, folglich ist α, welches größer als δ ist, erst recht größer als β.

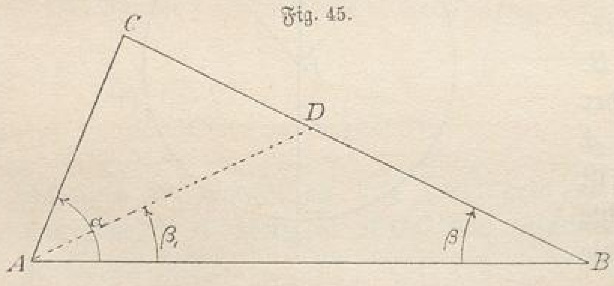
Fig. 44.



Bemerkung. Den beiden kleineren Seiten eines Dreiecks können nur spitze Winkel gegenüberliegen. Der größten Dreiecksseite kann ein spitzer Winkel ($> 60^0$), ein rechter oder ein stumpfer gegenüberliegen.

Umgekehrt folgt: Dem größeren von zwei Dreieckswinkeln liegt stets die größere Seite gegenüber.

Fig. 45.



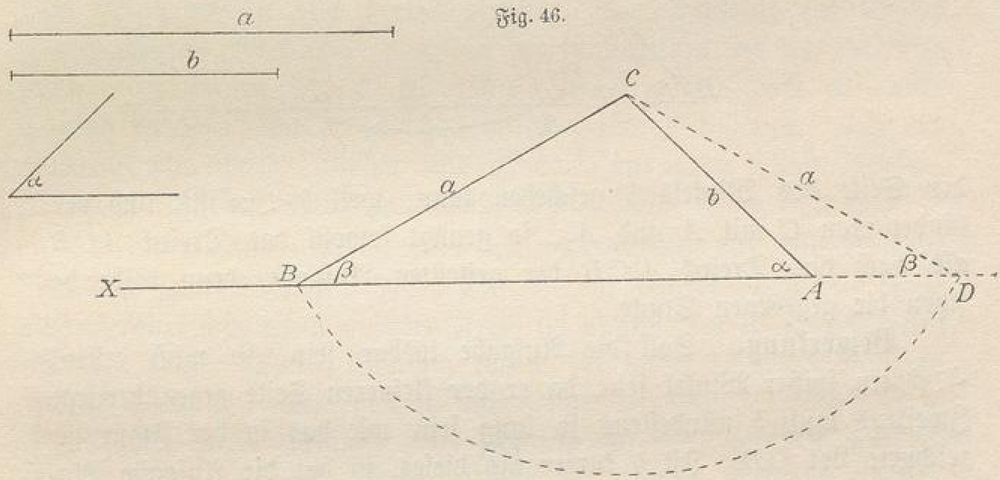
Beweis. In Fig. 45 sei $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$, sodaß man $\sphericalangle \beta$ als $\sphericalangle BAD = \beta_1$ vom Winkel α abziehen kann. Tut man dies nach Art der Fig. 45, so ist $\triangle ADB$ gleichschenklig, d. h. $BD = DA$. Im $\triangle ACD$ ist aber $AC < CD + DA$, also, da man für DA auch DB setzen kann, $AC < CD + DB$, d. h. $AC < CB$.

Bemerkung. Die einem rechten oder einem stumpfen Dreieckswinkel gegenüberliegende Seite ist stets die größte des Dreiecks. (Daher war das von einem Punkte auf eine Gerade gefällte Lot die kürzeste Linie, die vom Punkte nach der Geraden gezogen werden kann.)

194) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel.

Auflösung. In Fig. 46 seien a und b die gegebenen Seiten, a die größere davon; α sei der a gegenüberliegende Winkel. Man lege b als AC beliebig hin und lege bei A den Winkel α als $\sphericalangle CAX$ daran. Jetzt schlage man mit a um C einen Kreis, der die Gerade CX an zwei Stellen B und D schneiden muß (weil $a > b$ ist). Von

Fig. 46.



diesen Punkten ist nur der auf der Seite von α liegende Punkt B brauchbar. Verbindet man B mit C, so hat man das verlangte Dreieck, denn es besitzt die gegebenen Stücke.

Bemerkung. Das Dreieck ist stets möglich, sobald nur $\sphericalangle \alpha < 180^0$. (Was geschieht im Grenzfalle $\alpha = 180^0$?) Stets ist nur eine einzige Lösung möglich. Macht man nämlich dieselbe Konstruktion noch einmal, so lassen sich beide Zeichnungen vollständig zur Deckung bringen. Der Schüler weise dies selbst nach. (Er kann auch die Dreiecke mit den Seiten a so aneinander legen, daß eine symmetrische Figur entsteht.)

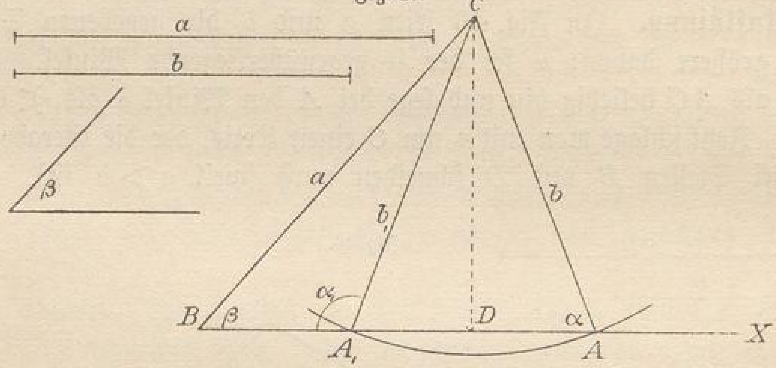
Daraus folgt

der vierte Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent.

195) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel.

Auflösung. In Fig. 47 seien a und b die gegebenen Seiten, b die kleinere davon, β der ihr gegenüberliegende Winkel. Man lege a als BC beliebig hin und lege bei B den Winkel β als $\sphericalangle CBX$ an. Darauf schlage man um C mit b einen Kreisbogen. Schneidet dieser die Gerade BX in zwei Punkten A und A_1, (was nur auf

Fig. 47.



der Seite des Winkels β geschehen kann, weil $b < a$ ist), und verbindet man C mit A und A_1, so genügt sowohl das Dreieck ACB, als auch das Dreieck A_1CB der gestellten Aufgabe, denn beide besitzen die gegebenen Stücke.

Bemerkung. Soll die Aufgabe lösbar sein, so muß erstens $\sphericalangle \beta$ ein spitzer Winkel sein, da er der kleineren Seite gegenüberliegt. Zweitens muß b mindestens so lang sein wie das in der Figur gezeichnete Lot CD. Ist b kürzer als dieses, so hat die Aufgabe keine Lösung. Ist b gleich diesem Lote, so hat die Aufgabe eine Lösung, und dabei ist das Dreieck ein rechtwinkliges. Ist b länger als dieses Lot, aber kleiner als a, so hat die Aufgabe zwei Lösungen, eine mit einem spitzen Winkel α und eine andere mit einem stumpfen Winkel α_1, der der Supplementwinkel von α ist. (Warum?)

Man kann die beiden Dreiecke, wie auch Fig. 46 zeigt, mit den Seiten b so aneinander legen, daß sie zusammen ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Sämtliche Dreiecke, die man aus denselben Stücken konstruiert, sind entweder dem Dreieck ABC oder dem Dreieck A_1BC kongruent. Zwei solche decken also einander, wenn die Winkel α in beiden „gleichartig" sind, d. h. beide spitz oder beide stumpf, oder beide rechte Winkel sind. Der Beweis der Deckung kann wie vorher dem Schüler überlassen werden.

Daraus folgt

der fünfte Kongruenzsatz. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel übereiu, und sind die der größeren gegenüberliegenden Winkel gleichartig, so sind die Dreiecke kongruent.

β) Allgemeines über Konstruktionen und Kongruenzsätze.

196) Alle sonstigen Konstruktionen von Dreiecken aus drei voneinander unabhängigen gegebenen Stücken lassen sich auf die fünf hier angegebenen grundlegenden Dreieckskonstruktionen zurückführen. Dasselbe gilt von den sonstigen Kongruenzsätzen, die ebenso auf die hier angegebenen fünf zurückzuführen sind.

Daß die gegebenen Stücke unabhängig voneinander sein müssen, zeigt sich z. B. an den Dreieckswinkeln. Die Aufgabe, ein Dreieck aus gegebenen Winkeln α, β und γ zu konstruieren, ist nur denkbar, wenn $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist. Der Winkel γ also darf gar nicht gegeben werden, denn er ist schon durch α und β bestimmt, nicht unabhängig von ihnen. Daher sind zunächst nur zwei Stücke gegeben, α und β, und das dritte zur Konstruktion nötige Stück fehlt noch.

Bei der fünften Konstruktion hat man gesehen, daß eine Aufgabe bisweilen zwei Lösungen hat. Dies beruht darauf, daß ein Kreis eine Gerade oder einen anderen Kreis im allgemeinen in zwei Punkten schneiden kann. Dieser Umstand führte bei dieser Aufgabe auf zwei Punkte A und A_1. Aber dies ist nicht immer der Fall. So hat z. B. in Fig. 30 der Kreis ebenfalls zwei Schnitte mit der Geraden, aber es war trotzdem nur eine einzige Lösung der vierten Aufgabe möglich. Jeder eindeutig lösbaren Konstruktionsaufgabe entspricht ein Kongruenzsatz.

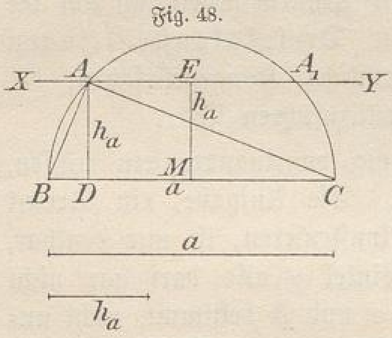
197) Die Konstruktionsaufgaben verlangen in der Regel eine Voruntersuchung darüber, wie die Aufgabe etwa angegriffen werden kann. Diese Untersuchung bezeichnet man als die Analysis der Aufgabe. An diese schließt sich die Konstruktion an. Nach Vollendung der letzteren ist der Beweis dafür zu geben, daß das konstruierte Gebilde die gegebenen Stücke hat. Die Analysis kann verschiedenartig ausfallen, sodaß bisweilen ganz verschiedene Konstruktionswege möglich werden. Je weniger Grundoperationen man dabei zur Ausführung nötig hat, für um so besser gilt die Lösung. — In der Regel wird noch eine Untersuchung darüber verlangt, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist, wann sie eine oder mehrere Lösungen hat, und welche Sonderfälle eintreten können. Diese Untersuchung heißt Determination.

198) Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck soll konstruiert werden aus der Hypotenuse a und der zu dieser gehörigen Höhe h_a.

2. **Analysis.** Man denke sich das Dreieck ABC gezeichnet. $\sphericalangle BAC$ sei der rechte Winkel, ihm gegenüber liege die Hypotenuse a, DA sei die zu dieser gehörige Höhe h_a. Man erinnere sich des Satzes, daß der Winkel im Halbkreis ein Rechter ist. Demnach muß die Spitze A des Dreiecks auf einem Halbkreise liegen, der über $BC = a$ als Durchmesser zu zeichnen ist. (Man sagt: Der geometrische Ort der Spitze A ist der zum Durchmesser a gehörige Halbkreis.) Ferner muß die Spitze A von der Hypotenuse den Abstand h_a haben, d. h. sie muß in einer Parallelen zu a liegen, die von dieser Geraden den Abstand h_a hat. (Dies ist ein zweiter geometrischer Ort für die Spitze.) Durch die Kenntnis der beiden geometrischen Orte wird die Konstruktion ermöglicht.

Fig. 48.



3. **Konstruktion.** a und h_a seien die nebst dem rechten Winkel gegebenen Stücke. Man lege a als BC beliebig hin und konstruiere die zugehörige Mittelsenkrechte, der man die Länge $ME = h_a$ gebe. Auf dieser errichte man im Punkte E ein Lot EX. Um M lege man mit MB einen Kreis, der das Lot EX in A schneide. Verbindet man A mit B und C, so hat man in ABC das verlangte Dreieck.

4. **Beweis.** Nach der Konstruktion ist $MB = MC$, also geht der geschlagene Kreisbogen durch B und C und ist ein Halbkreis vom Durchmesser $BC = a$. Da $\sphericalangle BAC$ ein Winkel im Halbkreise ist, muß er ein Rechter sein. ME steht senkrecht auf BC und hat die Länge h_a, also hat das zugehörige Lot EX überall, auch bei A, von der Hypotenuse a den Abstand h_a, d. h. die Höhe DA hat die gegebene Länge. Das Dreieck hat demnach die verlangten Stücke.

5. **Determination.** Ist h_a kleiner als der Radius $\frac{a}{2}$ des Kreises, so sind zwei Schnittpunkte A und A_1 möglich. Diese geben aber zwei kongruente Dreiecke, denn $\triangle ABC$ und $\triangle A_1CB$ sind symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte. Ist $h_a = \frac{a}{2}$, so wird das Lot EX Tangente des Kreises, dann ist also nur ein Dreieck möglich

und dieses ist rechtwinklig gleichschenklig. Ist $h_a > \frac{a}{2}$, so schneiden einander die beiden geometrischen Orte nicht, d. h. es ist keine Lösung möglich. (Für den Grenzfall $h_a = 0$ fällt A mit B oder mit C zusammen. Die Fläche des Dreiecks wird dann gleich Null.)

Bemerkung. Folgern kann man daraus den Satz: Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe überein, so sind sie kongruent. —

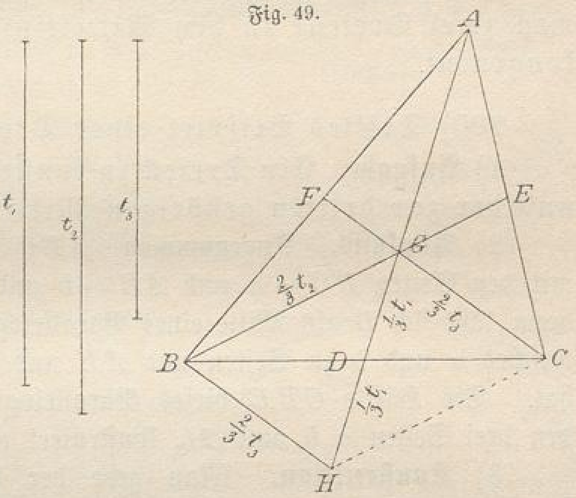
Bisweilen liegt aber die Lösung der Aufgabe weit versteckter, sodaß sie fast auf einen Kunstgriff hinausführt. Auch dazu sollen Beispiele gegeben werden.

199) Beispiel einer anderen Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Mittellinien zu konstruieren.

2) **Analysis.** Man denke sich das Dreieck ABC mit den drei Mittellinien AD, BE und CF oder t_1, t_2, t_3 gezeichnet und erinnere sich des Satzes, daß diese Geraden durch denselben Punkt G gehen, durch den von jeder der dritte Teil abgeschnitten wird. Danach ist $DG = \frac{1}{3}t_1$, $BG = \frac{2}{3}t_2$, $CG = \frac{2}{3}t_3$. Außerdem ist $DB = DC$. Macht man also noch $DH = DG$, so ist $BGCH$ ein Parallelogramm (denn die Diagonalen halbieren einander). Die Hälfte BGH dieses Parallelogramms ist ein Dreieck mit den Seiten $\frac{2}{3}t_1$, $\frac{2}{3}t_2$, $\frac{2}{3}t_3$, kann also leicht konstruiert werden, und auch der Rest der Konstruktion ist leicht zu übersehen.

Fig. 49.



3) **Konstruktion.** Sind in Fig. 49 t_1, t_2, t_3 die gegebenen Mittellinien, so schneide man von jeder den dritten Teil ab und konstruiere aus den Resten das Dreieck BGH. Man mache HD gleich $\frac{1}{3}t_1$, ziehe BD und verlängere es um sich selbst über D hinaus, was C gibt. HG verlängere man über G hinaus um sich selbst, was A gibt. Verbindet man A mit B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

4) **Beweis.** Nach der Konstruktion ist D der Halbierungspunkt von BC, also ist AD die eine Mittellinie des Dreiecks. Nach der Konstruktion ist $HA = \frac{4}{3}t_1$, $HD = \frac{1}{3}t_1$, also $AD = t_1$, d. h. die Mittellinie AD hat die richtige Länge. Da aber der Punkt G von ihr den dritten Teil abschneidet, so sind BG und CG Teile der beiden anderen Mittellinien. Dabei ist $BG = \frac{2}{3}t_2$ und auch gleich $\frac{2}{3}BE$, folglich ist $BE = t_2$. Da nach der Konstruktion GH und BC durch D halbiert sind, so ist das Viereck $BGCH$ ein Parallelogramm. Folglich ist $GC = BH = \frac{2}{3}t_3$. Da aber zugleich $GC = \frac{2}{3}CF$ ist, so ist $CF = t_3$. Das Dreieck hat also die verlangten Mittellinien.

5) **Determination.** Die Aufgabe ist lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Mittellinien größer ist als die dritte, denn dann kann $\triangle BGH$ konstruiert und die Figur vollendet werden. Im Grenzfalle $t_1 + t_3 = t_2$ wird die Fläche des Dreiecks ABC gleich Null. Warum? Sind zwei Mittellinien gleich, so wird das Dreieck gleichschenklig, sind alle drei gleich, so wird es gleichseitig.

Bemerkung. Daraus ergibt sich folgender Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in den Mittellinien überein, so sind sie kongruent.

200) Drittes Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der zur dritten gehörigen Mittellinie.

2) **Analysis.** Angenommen, ABC wäre das gesuchte Dreieck mit den Seiten $BC = a$ und $AC = b$ und der Mittellinie $CD = t_3$, dann läßt sich D als Mitte eines Parallelogramms $ACBE$ betrachten, welches a und b zu Seiten und AB und $CE = 2t_3$ zu Diagonalen hat. Die Hälfte CBE dieses Parallelogramms kann demnach aus den drei Seiten a b, und $2t_3$ konstruiert werden.

3) **Konstruktion.** Man gebe der beliebig hinzulegenden Geraden CE die Länge $2t_3$, schlage um C und E Bogen vom Radius a bezw. b, die einander in B schneiden, ziehe BD und verlängere es über D hinaus um sich selbst, und verbinde den neuen Endpunkt A mit C und C mit B, dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

4) Beweis und 5) Determination sind einfach.

Bemerkung. Damit sind zugleich folgende Aufgaben gelöst: a) Zwischen zwei konzentrischen Kreisen sei ein Punkt P gegeben; durch ihn soll von Kreis zu Kreis eine Gerade so gelegt werden, daß sie in P halbiert ist. b) Gegeben seien zwei konzentrische Kreise und ein zwischen ihnen liegender Punkt P. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, welches seine Ecken zu je zweien auf den beiden Kreisen und P zum Mittelpunkte hat.

201) Lassen sich zwei Vielecke auf dieselbe Art in homologe Dreiecke zerlegen, so sind die Vielecke kongruent.

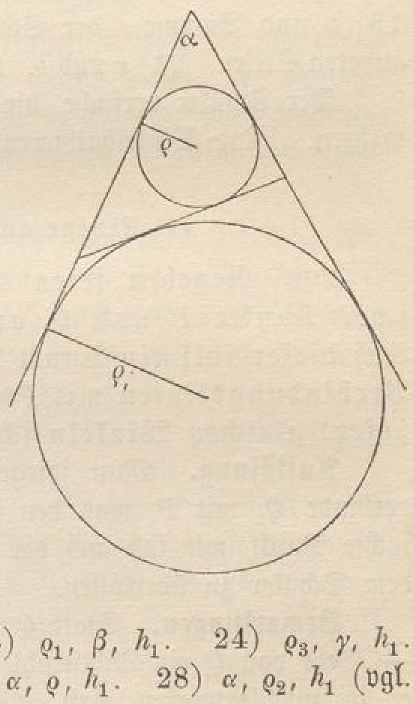
Der Beweis ist so einfach, daß er den Schülern überlassen werden kann.

In kongruenten Figuren stimmen homologe Geraden, homologe Winkel, homologe Kreise, homologe Flächenstücke überein.

γ) Dreieckskonstruktionen.*)

202) **Bezeichnungen.** Die den Punkten A, B, C gegenüberliegenden Dreiecksseiten sollen in der Regel mit a, b, c bezeichnet werden, die zu A, B, C gehörigen Winkel mit α, β, γ. Die Mittellinien des Dreiecks sollen t_1, t_2, t_3 heißen, die Winkelhalbierenden, bis zur Gegenseite gerechnet, w_1, w_2, w_3; die Höhen h_1, h_2, h_3; der Radius des Umkreises r, die Radien der vier Berührungskreise ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Dabei entsprechen die Marken 1, 2, 3 den Buchstaben A, B, C bezw. a, b, c. Der Umfang eines Dreiecks heiße u. Bei rechtwinkligen Dreiecken soll die Hypotenuse c heißen. Bei gleichschenkligen Dreiecken soll b die Basis sein.

Fig. 50.



203) Dreiecke zu konstruieren aus: 1) a, b, h_1. 2) a, b, h_3. 3) a, h_1, h_2. 4) a, h_2, h_3. 5) a, b, t_1. 6) a, t_1, t_2. 7) a, t_2, t_3. 8) a, b, t_3. 9) r, a, β. 10) r, a, h_1. 11) r, a, h_2. 12) r, a, t_1. 13) r, a, t_2.**) 14) ϱ, a, β. 15) ϱ, α, β. 16) ϱ, a_1, a_2 (a_1 und a_2 sollen die durch den Berührungspunkt entstehenden Teile von a sein). 17) ϱ, w_1, α. 18) ϱ_1, a, β. 19) ϱ_1, α, β. 20) ϱ_1, a_1, a_2. 21) ϱ_1, w_1, α. 22) ϱ, β, h_1. 23) ϱ_1, β, h_1. 24) ϱ_3, γ, h_1. 25) $\alpha, \varrho, \varrho_1$. 26) $\alpha, \varrho_1, \varrho_2$. 27) α, ϱ, h_1. 28) α, ϱ_2, h_1 (vgl.

*) Einige der Aufgaben sind schon vorher besprochen.

**) Der Ort der Mitten aller Sehnen, die von einem Punkte der Kreislinie ausgehen, ist ein Berührungskreis vom halben Radius. (Vgl. § 153.)

Fig. 50). 29) Aus den Seiten a_1, b_1, c_1 des Höhenfußpunktdreiecks. 30) Aus α, β und der Summe s der beiden anderen Seiten. 31) Aus α, β und der Differenz d der beiden anderen Seiten. (Bei diesen beiden Aufgaben kommen Sätze vom Außenwinkel beim gleichschenkligen Dreiecke zur Anwendung.)

204) Rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Hypotenuse c und Kathete a. 2) Hypotenuse c und α. 3) Hypotenuse c und Höhe h_3. 4) Hypotenuse c und t_1.*) 5) ϱ und spitzem Winkel α 6) ϱ und Kathete a. 7) ϱ_1 (an Kathete a) und α. 8) ϱ_1 und β. 9) ϱ_1 und a. 10) ϱ und ϱ_1. 11) ϱ und ϱ_3. 12) ϱ_1 und ϱ_3. 13) ϱ_3 und a. 14) ϱ_3 und β. 15) Hypotenuse c und Summe s der beiden Katheten. 16) Hypotenuse c und Unterschied d der beiden Katheten.

205) Gleichschenklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Basis b und Höhe h_2 (oder ϱ_1). 2) Basis b und ϱ. 3) Basis b und ϱ_2. 4) Basis b und $\sphericalangle\beta$. 5) Basis b und t_1. 6) Basis b und h_1. 7) ϱ und ϱ_2. 8) ϱ und h_2 (oder ϱ_1). 9) ϱ und β. 10) ϱ und α. 11) a und h_1. 12) α und w_1. 13) β und w_1. 14) ϱ_2 und β. 15) ϱ_2 und α. 16) ϱ_1 und α. 17) ϱ_1 und β. 18) a und t_2. 19) b und Summe s der Schenkel. 20) a und Summe der beiden anderen Seiten. 21) r und b. 22) r und a. 23) r und β. 24) r und α.

Der Schüler versuche, die Beispiele dieses Abschnitts selbst zu vermehren. (Die Winkelhalbierenden pflegen Schwierigkeiten zu machen.)

δ) Einige andere Konstruktionen.

206) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade KL und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß dessen Verbindungslinien mit P und Q die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.**)

Auflösung. Man spiegele Q gegen die Gerade, was Q_1 gibt, verbinde Q_1 mit P, was den Schnittpunkt X gibt. Dies ist der gesuchte Punkt, wie sich aus der Geraden XQ leicht ergibt. — Beweis dem Schüler zu überlassen.

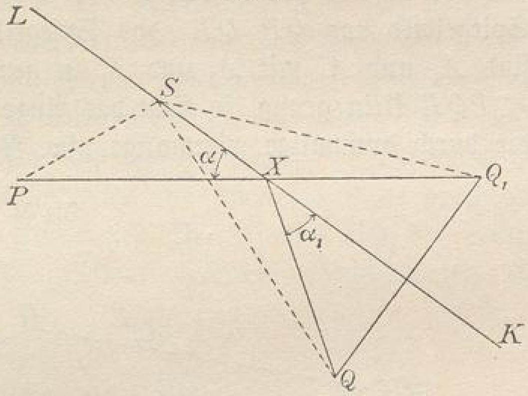
Bemerkungen. Statt Q zu spiegeln, kann man auch P spiegeln. — Geht von Q ein Lichtstrahl an die spiegelnde Gerade KL, so wird er so zurückgeworfen, daß $\sphericalangle\alpha = \alpha_1$ ist. Er hat also, um von Q

*) Vgl. Anm. 2) auf Seite 77.

**) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.

aus ins Auge, welches sich in P befinden möge, zu gelangen, den konstruierten Weg QXP zurückzulegen. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von PX das Spiegelbild Q_1 von Q.

Fig. 51.



Die Gerade $Q_1P = XQ_1 + PX$ ist der kürzeste Weg zwischen Q_1 und P. Folglich ist auch $QX + XP$ der kürzeste Weg, der von Q aus zum Spiegel und dann nach P führt. Der Lichtstrahl, der von Q zum Spiegel und nach dem Auge geht, hat demnach den kürzesten unter den möglichen Wegen eingeschlagen.

207) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade KL und zwei beliebige Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt X so konstruiert werden, daß dessen Verbindungslinien mit P und Q die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.*)

(Die Auflösung soll dem Schüler überlassen bleiben, der wiederum mit der Spiegelung des einen Punktes zu beginnen hat. Er versuche auch zu zeigen, daß der Unterschied der Wege PX und XQ ein Höchstwert für alle möglichen Wege von P zur Geraden und vom Schnittpunkte nach Q ist.)

208) Innerhalb eines gegebenen Winkels PQR seien zwei Punkte A und B gegeben; auf den Schenkeln sollen Punkte C und D so bestimmt werden, daß AC und CD mit dem einen Schenkel entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, CD und DB mit dem anderen. (Fig. 52.)

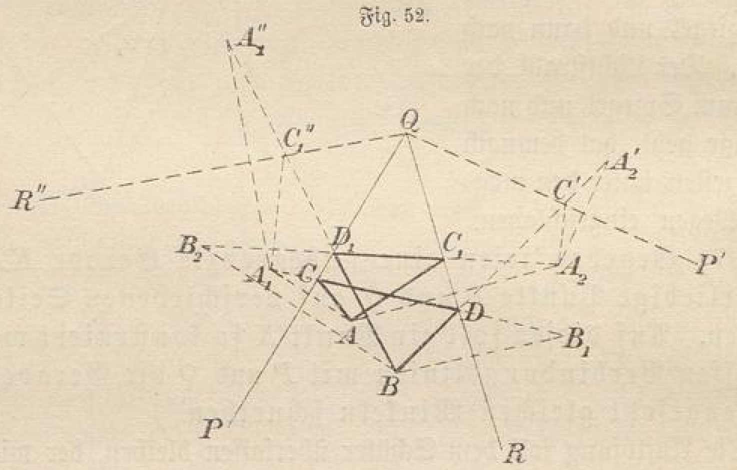
(Man bilde die Spiegelbilder A_1 und B_1 von A und B in bezug auf die Schenkel PQ und QR, dann gibt die Gerade A_1B_1 die gesuchten Punkte C und D. Bildet man die Spiegelbilder A_2 und B_2 in bezug auf die vertauschten Schenkel, so erhält man ein zweites Punktpaar C_1 und D_1. Die Beweise führe der Schüler.)

Bemerkungen. Denkt man sich in A ein Kerzenlicht, in B das Auge der Beobachters, und sind PQ und QR Spiegel, so ist $AC + CD + DB$ der Weg eines zum Auge gelangenden Lichtstrahls, der von jedem Spiegel unter demselben Winkel zurückgeworfen (re-

*) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.

flektiert) wird, unter dem er auf ihn fällt. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von BD ein Spiegelbild A_2' von A, und zwar ist $A_2'B = AC + CD + DB$. Auch in A_1'' sieht das Auge ein Spiegelbild von A, und dabei ist $A_1''B = AC_1 + C_1D_1 + D_1B$. — QP' ist das Spiegelbild von QP, QR'' das Spiegelbild von QR. In der Figur sind A_2' und A_1'' mit A_2 und A_1 in gewisse Beziehung gesetzt. — Ist $\sphericalangle PQR$ klein genug, so sieht das Auge B noch weitere Bilder von A, die durch dreimalige, viermalige usw. Reflexion an den Spiegeln her-

Fig. 52.



vorgebracht werden. Auch für diese Spiegelungen versuche man die Wege der Lichtstrahlen zu konstruieren. Man untersuche, ob der Weg $AC + CD + DB$ ein kleinster Weg (Minimalweg) für den Gang von A nach dem ersten, dann zum zweiten Spiegel, dann nach B ist, ebenso ob $AC' + C'D' + D'B$ ein Minimalweg ist usw. — A und B können ihre Rollen vertauschen. Je nach ihrer Lage können gewisse Sonderfälle eintreten.

208a) Man versuche dieselbe Aufgabe für eine von drei spiegelnden Geraden begrenzte Fläche zu lösen.

209) Eine Gerade von gegebener Länge a so in einen festen rechten Winkel PQR einzulegen, daß ihre Endpunkte auf den Schenkeln liegen und sie den einen Schenkel unter gegebenem spitzen Winkel α schneidet.

(Nach dem Satze über den Um-Kreis des rechtwinkligen Dreiecks hat die Mitte der Geraden zum geometrischen Ort einen um Q mit dem Radius $\frac{a}{2}$ beschriebenen Kreisbogen. Man zeichne einen Radius

*) Einiges aus den obigen Übungen wird wiederholt.

$QC = \frac{a}{2}$ so, daß $\sphericalangle CQP$ gleich α ist, und schlage um C einen Kreisbogen mit demselben Radius $\frac{a}{2}$, der QP in A schneidet. AC ist dann die Hälfte der Geraden in der geforderten Lage, die Verlängerung CB bis zum anderen Schenkel vollendet die Konstruktion.)

Bemerkung. Gleitet eine Gerade von gegebener Länge mit den Endpunkten auf den Schenkeln eines festen rechten rechten Winkels, so bewegt sich ihre Mitte auf dem besprochenen Kreise. Gleitet also der eine Endpunkt auf dem einen Schenkel und wird die Mitte durch eine Kurbel auf dem genannten Kreise geführt, so muß sich der andere Endpunkt geradlinig bewegen. (Eine wichtige Geradführung der Maschinenkunde.)

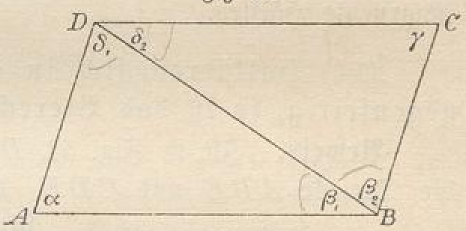
b) Lehre von den Parallelogrammen.

α) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung.

210) Die Gegenseiten und ebenso die Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich.

Beweis. Durch die Diagonale BD wird das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 53) in zwei kongruente Dreiecke geteilt, denn beide Dreiecke stimmen überein in der Seite BD, in den Winkeln δ_1 und β_2 (die als Wechselwinkel bei Parallelen gleich sind) und in den Winkeln β_1 und δ_2 (aus demselben Grunde), also nach dem zweiten Kongruenzsatze. Folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AB = CD$ und $AD = CB$; ferner ist $\alpha = \gamma$, außerdem aber $\delta_1 + \delta_2 = \beta_2 + \beta_1$, d. h. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$.

Fig. 53.



211) Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Die Kongruenz der Dreiecke in Fig. 53 folgt jetzt nach dem dritten Kongruenzsatze. Aus ihr folgt $\delta_1 = \beta_2$, sodaß $AD \parallel BC$ ist; außerdem folgt $\delta_2 = \beta_1$, sodaß auch $CD \parallel AB$ ist.

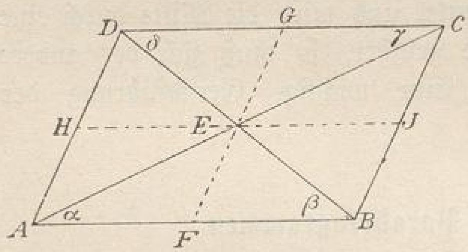
212) Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Fig. 53 $AB \# CD$, so folgt aus dem Parallelismus, daß $\delta_2 = \beta_1$ ist. Die Dreiecke stimmen jetzt in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem ersten Kongruenzsatze. Folglich ist auch $\delta_1 = \beta_2$ und daher auch $AD \parallel CB$, also $ABCD$ ein Parallelogramm.

213) Die Diagonalen jedes Parallelogramms halbieren einander.

Beweis. In Fig. 54 sind die Dreiecke ABE und CDE nach dem zweiten Kongruenzsatze kongruent, denn $DC = AB$, $\delta = \beta$ und $\gamma = \alpha$, folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AE = EC$ und $DE = EB$.

Fig. 54.

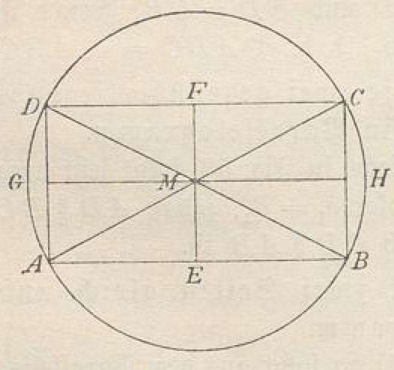


Bemerkung. Jedes Parallelogramm hat zwei Mittellinien (FG und HJ), die zu den Seiten parallel sind und durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gehen. Sie zerlegen das Parallelogramm in vier kongruente Parellelogramme, denn diese lassen sich mit den gleichliegenden Diagonalen so aufeinander decken, daß kongruente Dreiecke (zweiter Kongruenzsatz) aufeinander fallen. Die Mittellinien halbieren also die Seiten und sind ihnen bezüglich gleich. Jede durch den Mittelpunkt des Parallelogramms gelegte Gerade zerlegt das Parallelogramm in kongruente Hälften.

214) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Fig. 54 $DE = BE$ und $AE = CE$, so sind die Dreiecke ABE und CDE da auch die Scheitelwinkel übereinstimmen, kongruent (nach dem ersten Kongruenzsatze). Folglich ist $AB = CD$, und da auch die Wechselwinkel übereinstimmen, $AB \parallel CD$, also ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Fig. 55.



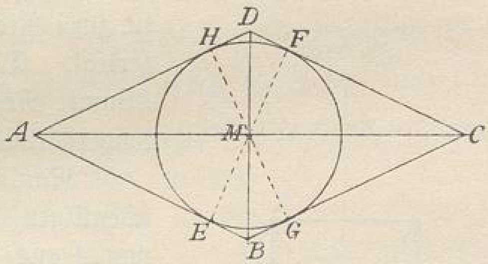
215) Ist im Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind sämtliche Winkel rechte (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rechteck. Im Rechteck sind beide Diagonalen gleich. Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen gleichlang, so ist es ein Rechteck. (Warum?) Durch die Ecken des Rechtecks läßt sich ein Kreis legen. Das Rechteck

hat zwei Symmetrieachsen, die Mittellinien des Rechtecks. (Vgl. Fig. 55.) Der dem Rechteck umbeschriebene Kreis ist gleichzeitig der den rechtwinkligen Dreiecken ABC, ABD usw. umbeschriebene. (Vgl. Winkel im Halbkreis.)

216) Sind in einem Parallelogramm zwei zusammenstoßende Seiten gleich, so sind alle Seiten gleich (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rhombus.

Der Rhombus wird durch die beiden Diagonalen in vier kongruente Dreiecke zerlegt. (Warum?) Folglich: Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Beide sind Symmetrieachsen des Rhombus. Die Winkel des Rhombus werden durch die Diagonalen halbiert. Die vom Schnittpunkte der Diagonalen auf die Seiten des Rhombus gefällten Lote sind gleich lang, in den Rhombus läßt sich also ein Kreis beschreiben (Beweise dies an Fig. 56.)

Fig. 56.



Stehen in einem Viereck die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren sie sich gegenseitig, so ist das Viereck ein Rhombus. (Warum?) Werden in einem Parallelogramm die Winkel durch die Diagonalen halbiert, so ist es ein Rhombus. (Warum?)

217) Das Quadrat ist Rhombus und Rechteck zugleich, seine Diagonalen sind also gleich, halbieren sich gegenseitig und stehen aufeinander senkrecht. Die Winkel des Quadrates werden durch die Diagonalen halbiert. In das Quadrat und um dasselbe läßt sich ein Kreis beschreiben.

β) Quadratkonstruktionen.

218) Folgende Konstruktionen sind schon durchgeführt worden: Über einer gegebenen Geraden ein Quadrat zu errichten. Ein Quadrat von gegebener Diagonale zu zeichnen; oder, was dasselbe ist, einem gegebenen Kreise ein Quadrat einzuzeichnen. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu zeichnen. Einem gegebenen Quadrate ein gegebenes kleineres einzuzeichnen (sodaß dessen Ecken auf seinen Seiten liegen). Um ein gegebenes Quadrat ein gegebenes größeres zu legen (sodaß dessen Seiten durch seine Ecken gehen).

219) **Folgende Konstruktionen sollen durchgeführt werden:**

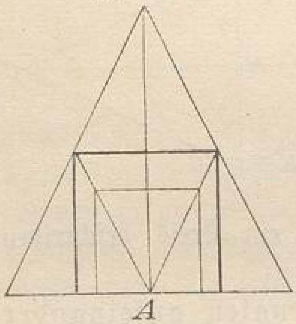
1) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Umfang gleich einer gegebenen Geraden ist.

2) In ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck ein auf der Grundlinie stehendes Quadrat so einzuzeichnen, daß dessen obere Ecken in die Schenkel fallen.

[Denkt man sich die Figur gezeichnet, so erkennt man, daß sie einfach symmetrisch ist.

Ist BC die Grundlinie des Dreiecks, AD die Höhe, $EFGH$ das Quadrat mit der Grundlinie EF, die auf BC liegt, so ist dieses in zwei Rechtecke vom Seitenverhältnis 1 : 2 zerlegt. Die Diagonale AG hat eine bestimmte Neigung gegen AC, die dem Kathetenverhältnis 1 : 2 entspricht.

Fig. 56 b.



Man hat also in dem gegebenen gleichschenkligen Dreieck das Lot DA zu fällen, von A aus von der Grundlinie ein beliebiges Stück AF_1 abzuschneiden und im Endpunkte ein Lot F_1G_1 von doppelter Länge zu errichten, AG_1 zu ziehen und so weit zu verlängern, bis es den Schenkel in G trifft, durch G die Parallele GH zur Grundlinie zu legen und das Quadrat zu vollenden.]

3) In einen gegebenen Halbkreis ein auf dem Durchmesser stehendes Quadrat einzuzeichnen, von dem zwei Ecken in die Kreislinie fallen.

4) In ein gegebenes Kreissegment ein Quadrat in entsprechender Weise einzuzeichnen.

5) In einen gegebenen Sektor ein Quadrat so einzuzeichnen, daß zwei Ecken auf den Kreisbogen, zwei in die Grenzradien fallen.

(Man zeichne in den Winkel des Sektors zunächst ein kleineres Quadrat symmetrisch ein und lege durch dessen Grundecken den zugehörigen konzentrischen Kreisbogen. Dann verbinde man die Spitze mit den Grundecken des Hilfsquadrates und verlängere die Geraden bis zum gegebenen Kreisbogen. Dies gibt die Grundecken des gesuchten Quadrates.)

6) In einen gegebenen Rhombus ein Quadrat einzuzeichnen.

7) Einem gegebenen Doppelsegmente*) ein Quadrat einzubeschreiben.

---

*) Es ist die Figur gemeint, die durch Aneinanderlegen zweier kongruenter Kreissegmente längs der Sehnen entsteht.

8) Durch den Mittelpunkt eines gegebenen Quadrates sei eine beliebige Gerade gelegt. Um das Quadrat soll ein anderes beschrieben werden, von dem zwei Gegenecken auf der Geraden liegen. (Man bilde von einer der gegebenen Quadratecken das Spiegelbild.)

γ) Rechteckskonstruktionen.

220) **Aufgaben ohne Kreise.**

1) Ein Rechteck von gegebenem Umfange zu konstruieren, bei dem das eine Seitenpaar doppelt so lang ist als das andere.

2) Dieselbe Aufgabe für das Seitenverhältnis 3 : 1 oder 4 : 1, oder 3 : 2, oder 4 : 3 usw. zu lösen.

3) Ein Rechteck von gegebenem Umfange u und gegebener Diagonale d zu zeichnen. (Man konstruiere zunächst ein Dreieck aus $\frac{u}{2}$, dem anliegenden Winkel 45^0 und der diesem gegenüber liegenden Seite d. — Unten wird sich noch ein anderer Weg ergeben.)

4) Ein Rechteck von gegebener Höhe in ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck so einzuzeichnen, daß es auf dessen Grundlinie steht und zwei seiner Ecken auf den Schenkeln hat.

5) Dieselbe Aufgabe für ein Rechteck mit gegebener Grundlinie zu lösen.

6) Dieselbe Aufgabe für ein Rechteck mit gegebenem Seitenverhältnis 2 : 1 oder 1 : 2 zu lösen. (Die Hälfte des Rechtecks, die durch die Dreieckshöhe begrenzt wird, hat eine Diagonale von bestimmter Neigung. Vgl. 151a.)

7) Dieselbe Aufgabe mit Rechtecken von beliebigen Seitenverhältnissen, z. B. 3 : 1 oder 1 : 3; 3 : 2 oder 2 : 3; 4 : 1 oder 1 : 4; 4 : 3 oder 3 : 4 usw. zu lösen.

8) Folgenden Hilfssatz zu beweisen: Sämtliche Rechtecke, die einem Quadrate einbeschrieben sind (wobei ihre Seiten paarweise parallel zu dessen Diagonalen sein müssen), haben denselben Umfang, nämlich die doppelte Diagonale. $\left(d = \frac{u}{2} \cdot\right)$

9) **Folgerung:** Denkt man sich diese Rechtecke so auf die eine Diagonale des Quadrates gestellt, daß die andere Diagonale gemeinschaftliche Symmetrieachse bleibt, so liegen die freien Ecken auf den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie ebenso wie die Höhe gleich der Quadratdiagonale ist. Daraus folgt: Hat ein gleichschenkliges Dreieck eine Höhe, die gleich der Grundlinie ist, so haben alle auf dem letzteren stehenden einbeschriebenen Rechtecke denselben Umfang, nämlich die

doppelte Höhe. (Beide Sätze lassen sich zu Konstruktionen benutzen, bei denen es sich um Rechtecke von gegebenem Umfang handelt.)

10) Die Aufgabe 3) mit Hilfe des unter 8) besprochenen Quadrates zu lösen.

11) Ein Rechteck von gegebenem Umfange und gegebenem Schnittwinkel der Diagonalen zu zeichnen. (Vgl. das unter 8) besprochene Quadrat; zwei Lösungen sind möglich.)

12) Die Aufgaben 1) und 2) mit Hilfe des unter 8) besprochenen Quadrates zu lösen.

13) Ein Rechteck von gegebenem Umfange in ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck so einzuzeichnen, daß es auf der Grundlinie steht und zwei Ecken auf den Schenkeln hat. (Man benutze das unter 9) genannte gleichschenklige Dreieck mit $b = h = \frac{u}{2}$. Wo die zusammengehörigen Schenkel beider Dreiecke einander schneiden, liegen zwei Ecken des gesuchten Rechtecks. Schneiden sich diese Schenkel nicht, so ist die Aufgabe unlösbar. Die Determination mit den Grenzfällen ist ausführlich zu bearbeiten.)

14) Ein Rechteck von gegebenem Umfange in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen. (Man ziehe das unter 8) besprochene Quadrat zu Hilfe. Die Determination ist ausführlich zu geben.)

15) Ein Rechteck von gegebenem Seitenverhältnis in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen. (Das Verhältnis sei z. B. 1 : 2 oder 2 : 1; 2 : 3 oder 3 : 2; 1 : 4 oder 4 : 1; 3 : 4 oder 4 : 3.)

16) Ein Rechteck von gegebener Diagonale in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen.

17) Ein Rechteck von gegebenem Schnittwinkel der Diagonalen in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen.

18) Ein Rechteck von gegebener Seite in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen. (Zwei Lösungen.)

19) Um einen Rhombus ein Rechteck zu beschreiben, von dem eine Seite der Richtung nach gegeben ist.

20) Um ein gegebenes Rechteck ein anderes zu legen, von dem eine Seite der Richtung nach gegeben ist.

21) In ein gegebenes Rechteck ein anderes von gegebener Diagonale einzuzeichnen. (Die Diagonale ist in enge Grenzen eingeschlossen.)

22) Folgenden Hilfssatz zu beweisen: Die einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke einbeschriebenen Rechtecke, die Stücke der Katheten zur Seite haben und deren eine Ecke in

die Hypotenuse fällt, haben sämtlich denselben Umfang. (Einfache Folgerung von 8.)

23) Einem beliebigen rechtwinkligen Dreiecke ein Rechteck gegebenen Umfangs einzuzeichnen. (Die Lösung beruht auf dem vorigen Hilfssatze. Man nehme ein gewisses rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck zur Hilfe.)

221) **Aufgaben mit Kreisen.**

1) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck einzubeschreiben, von dem eine Seite gegeben ist, die horizontal sein soll.

2) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck einzubeschreiben, für welches der Schnittwinkel der Diagonalen gegeben ist und dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll.

3) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck vom Seitenverhältnis 1 : 2 einzubeschreiben, dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll. (Man zeichne zunächst ein beliebiges Rechteck dieses Seitenverhältnisses mit einer Diagonale und benutze den dabei auftretenden Winkel.)

4) Dieselbe Aufgabe für beliebiges Seitenverhältnis zu lösen.

5) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck von gegebenem Umfang einzubeschreiben, dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll. (Man kann z. B. das in Nr. 220) unter 8) besprochene Quadrat benutzen, welches den Kreis schneiden wird, wenn die Aufgabe lösbar ist.)

6) bis 10) Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem Halbkreise so einbeschrieben werden soll, daß es auf dessen Durchmesser steht und zwei Ecken in den Kreisbogen fallen. (Die geänderte Aufgabe 1) gibt zwei Fälle, entweder ist die Grundlinie oder die Höhe des Rechtecks gegeben. Die geänderte Aufgabe 2) kann man so lösen, daß man zunächst ein beliebiges Rechteck mit dem gegebenen Schnittwinkel der Diagonalen zeichnet, dieses durch die eine Mittellinie halbiert und die eine Diagonale der Rechteckshälfte zeichnet. Die Neigung dieser Diagonale ist bei dem gegebenen Halbkreise zu benutzen. Ähnlich ist bei der geänderten dritten und vierten Aufgabe zu verfahren. Bei der geänderten fünften kann das in Nr. 220) unter 9) besprochene Dreieck benutzt werden.

11) bis 15). Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck in entsprechender Weise einem gegebenen Kreissegmente einbeschrieben werden soll.

16) bis 20) Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem Viertelkreise so einbeschrieben werden soll, daß

die Rechtecke Teile der beiden Grenzradien zur Seite haben und die freie Ecke in die Kreislinie fällt.

21) Man versuche einige dieser Aufgaben für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem gegebenen Kreissektor symmetrisch so einbeschrieben werden soll, daß das eine Eckenpaar in die Kreislinie, das andere in die Grenzradien fällt.

22) Einem gegebenen Doppelsegmente ein Rechteck nach Art der Aufgaben 1) bis 5) einzubeschreiben.

δ) Rhombuskonstruktionen.

222) **Aufgaben ohne Kreise.**

1) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem ein Winkel gegeben ist.

2) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem eine Diagonale gegeben ist.*)

3) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, dessen Diagonalenverhältnis gleich 1 : 2 ist. (Man zeichne die Mittellinien des Quadrates und zeichne einen beliebig großen Rhombus vom Diagonalenverhältnis 1 : 2, für die die Mittellinien die Symmetrieachsen sind. Zu seinen Seiten lege man Parallelen durch die Ecken des Quadrates. Die Konstruktion läßt sich erheblich abkürzen.)

4) Dieselbe Aufgabe für ein beliebiges Diagonalenverhältnis zu lösen.

5) bis 8) Die Aufgaben 1) bis 4) dahin abzuändern, daß der Rhombus einem gegebenen Rechteck umbeschrieben werden soll.

9) In einen gegebenen Rhombus einen anderen einzuzeichnen, von dem die Länge einer Diagonale gegeben ist.

10) In einen gegebenen Rhombus einen anderen einzuzeichnen, von dem die Richtung einer Diagonale gegeben ist.

11) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu legen, bei dem der eine Winkel das Doppelte, oder das Dreifache, oder das Fünffache des anderen ist. (Der gestreckte Winkel ist bezw. in 3, 4, 6 gleiche Teile zu zerlegen.)

12) Dieselbe Aufgabe für den Fall des Rechtecks statt des Quadrates zu lösen.

13) Einen Rhombus zu konstruieren, von dem eine Seite und die Summe der Diagonalen gegeben ist. (Man konstruiere zunächst

---

*) Die Aufgabe, um ein Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem eine Seite gegeben ist, läßt sich erst auf einem höheren Standpunkte lösen.

ein Hilfsdreieck aus der halben Diagonalensumme $\frac{s}{2}$, dem anliegenden Winkel 45^0 und der diesem gegenüber liegenden Rhombusseite a. Durch Zeichnung der zu $\frac{s}{2}$ gehörigen Dreieckshöhe wird der Quadrant des gesuchten Rhombus vollendet.)

14) Durch den Mittelpunkt eines Rhombus sei eine Gerade gelegt. Um den Rhombus einen anderen zu zeichnen, der zwei Gegenecken auf der Geraden hat. (Man bilde das Spiegelbild einer der Rhombusecken.)

223) **Aufgaben mit Kreisen.**

1) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen eine Diagonale nach Länge und Richtung gegeben ist.

2) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem ein Winkel gegeben ist, und dessen eine Diagonale eine gegebene Richtung haben soll. (Verschiedene Fälle sind möglich.)

3) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem eine Seite a nach Länge und Richtung gegeben ist. (Man konstruiere zunächst ein rechtwinkliges Dreieck von der Hypotenuse a und der zugehörigen Höhe ϱ.)

4) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus von gegebenem Umfang zu legen, dessen eine Diagonale gegebene Richtung haben soll.

5) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, für dessen Seiten zwei verschiedene Richtungen vorgeschrieben sind.

6) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem zwei Seiten oder ihre Verlängerungen durch zwei gegebene Raumpunkte gehen sollen.

7) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen eine Diagonale der Richtung nach gegeben ist, während eine seiner Seiten einen zweiten gegebenen Kreis berühren soll. (An Stelle des zweiten Kreises kann auch ein Punkt treten.)

8) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem zwei aneinander stoßende Seiten einen zweiten gegebenen Kreis berühren sollen. (Mehrere Fälle sind möglich.)

9) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen Diagonalen das Längenverhältnis $1:2$ haben. (An des letzteren Stelle kann auch ein beliebiges Längenverhältnis treten.)

10) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen Winkel im Verhältnis $1:2$ stehen, und dessen größere Diagonale eine vorgeschriebene Richtung hat. (An Stelle des Verhältnisses $1:2$

darf auch irgend ein anderes treten, welches mit den bisher bekannten Fällen der Kreisteilung erledigt werden kann, z. B. 1 : 3, 1 : 5, 1 : 7.)

11a) Um einen gegebenen Rhombus einen anderen zu legen, der einen um die Mitte des ersteren gelegten und dessen Seiten schneidenden Kreis berührt.

11b) Gegeben sei ein Rhombus und ein ganz in seinem Innern liegender konzentrischer Kreis. Um diesen Kreis soll ein Rhombus gelegt werden, dessen Seitenverlängerungen durch die Ecken des gegebenen Rhombus gehen.

Bemerkung. Nach diesen Aufgaben lassen sich durch die Ecken eines Rhombus die Seiten (bezw. Seitenverlängerungen) anderer Rhomben legen, deren Diagonalenrichtungen und Flächeninhalte ganz beliebige sein können, während die Radien der konzentrischen Berührungskreise zwischen Null und einem gewissen Höchstwerte liegen.

12) Einem gegebenen Doppelsegment einen Rhombus einzubeschreiben.

13) Einem gegebenen Doppelsegment einen Rhombus umzubeschreiben, von dem eine Diagonale (oder ein Winkel, oder eine Seitenrichtung, oder ein Diagonalenverhältnis, oder ein einfaches Winkelverhältnis) gegeben ist.

14) Um ein gegebenes Doppelsegment einen Rhombus zu legen, dessen eine Seite einen gegebenen Kreis berühren soll.

ε) Parallelogrammkonstruktionen.

224) **Einfache Aufgaben.**

1) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus zwei ungleichen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

2) Ein P. z. k. aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und einem Winkel.

3) Ein P. z. k. aus einer Seite und den beiden Diagonalen.

4) Ein P. z. k. aus zwei ungleichen Seiten und einer der Diagonalen.

5) Ein P. z. k. aus den Diagonalen und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

6) Ein P. z. k. aus den Diagonalen und dem Winkel, den die kleineren Diagonale mit der größeren Seite bildet.

7) Ein P. z. k. aus den Diagonalen und dem Winkel, den die größere Diagonale mit der größeren Seite bildet.

8) Ein P. z. k. aus einer Diagonale, dem dieser gegenüber liegenden Winkel und dem Umfange des Parallelogramms. (Man konstruiere zunächst ein Dreieck aus der Diagonale (d), dem halben

Umfange $\left(\frac{u}{2}\right)$ und der Hälfte des der Diagonale gegenüber liegenden Winkels $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

9) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus zwei ungleichen Seiten und der Vorschrift, daß der eine Winkel das Doppelte (oder das Dreifache, oder das Fünffache, oder das Siebenfache) des anderen sei.

10) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einem Winkel, dem Umfang und der Vorschrift, daß die eine Seite das Doppelte (oder das Dreifache, Vierfache usw.) des anderen sein soll.

225) **Aufgaben für um- und einzubeschreibende Parallelogramme.**

1) Einem gegebenen Viereck (beliebiger Art) ein Parallelogramm einzuschreiben, dessen Ecken drei von den Seiten des Vierecks halbieren. (Es ist zu zeigen, daß auch die vierte Seite halbiert wird und daß die Parallelogrammseiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind.)

2) Einem gegebenen Viereck ein Parallelogramm einzuzeichnen, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind, und von den Schenkeln des einen Viereckswinkels den dritten (oder den vierten, oder den fünften) Teil abschneiden. (Die Möglichkeit der Konstruktion ist nachzuweisen.)

3) Einem gegebenen Rhombus ein Parallelogramm einzubeschreiben, dessen Diagonalen gegeben sind. (Die Ecken des Parallelogramms sollen auf den vier Seiten des Rhombus liegen. Sind die Diagonalen des Parallelogramms zu groß, so können die Ecken des Parallelogramms auf die Verlängerungen der Rhombusseiten fallen. Der Rhombus kann auch ein Quadrat sein. An seine Stelle kann auch ein Rechteck oder ein Parallelogramm treten.)

Einem gegebenen Doppelsegment ein Parallelogramm einzubeschreiben, dessen Diagonalen gegeben sind.

5) Einem gegebenen Doppelsegment ein Parallelogramm einzuzeichnen, von dem eine Seite bereits eingezeichnet ist.

6) Um ein gegebenes Doppelsegment ein Parallelogramm von gegebenen Seitenrichtungen zu legen.

c) Anfangsgründe der Kreislehre.

α) Rückblick auf das schon Bekannte.

226) Bekannt sind bereits folgende Begriffe der Kreislehre: Kreislinie, Kreisfläche, Kreisumfang (Peripherie, die Zahl π), Sehne

(Chorde), Sekante, Durchmesser (Diameter), Halbmesser (Radius), Bogen, Zentriwinkel, Kreisausschnitt (Sektor), Kreisabschnitt (Segment), Berührende (Tangente), der umbeschriebene Kreis (Um-Kreis) des Dreiecks, der einbeschriebene Kreis (In-Kreis) des Dreiecks, die äußeren Berührungskreise (An-Kreise) des Dreiecks, die Kreisteilung, das regelmäßige Vieleck mit um- und einbeschriebenem Kreise. Der umbeschriebene Kreis des Rechtecks. Der einbeschriebene Kreis des Rhombus.

227) Bekannt sind bereits folgende Sätze der Kreislehre: Bei jedem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Mittelpunktsabstände, gleiche Bogen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren, gleiche Zentriwinkel. Auch sämtliche Umkehrungen dieses Satzes sind bekannt. Der Satz vom rechten Winkel im Halbkreise. Die Sätze über das vom Kreismittelpunkte auf die Sehne gefällte Lot und die entsprechenden Umkehrungen. Die Sätze über die Gleichheit der von einem Punkte aus an den Kreis gelegten Tangenten und die Halbierende ihres Schnittwinkels. Der Satz vom umbeschriebenen Kreise des Dreiecks. (Durch drei Punkte ist im allgemeinen nur ein Kreis möglich.) Durch zwei Punkte sind unendlich viele Kreise möglich, die ihre Mittelpunkte auf dem Mittellote haben. Einfache Sätze über das Kreisbüschel. Der Satz vom einbeschriebenen Kreise des Dreiecks. Der Satz von den anbeschriebenen Kreisen des Dreiecks. (An drei nicht parallele Geraden lassen sich vier Kreise legen.) An zwei Gerade lassen sich unendlich viele Kreise legen, die ihre Mittelpunkte auf den beiden Winkelhalbierenden haben. Jedes regelmäßige Vieleck hat einen um- und einen einbeschriebenen Kreis. Zu jedem Kreise gehört ein ein- und ein umbeschriebenes regelmäßiges Vieleck von gegebener Seitenzahl. Sätze über den Zusammenhang zwischen Winkeln und Bogen, z. B. $\widehat{\alpha} = \pi \frac{\alpha^0}{180^0}$, $\alpha^0 = \frac{\widehat{\alpha}}{\pi} 180^0$. Dabei ist $\pi = 3{,}14159265\ldots$

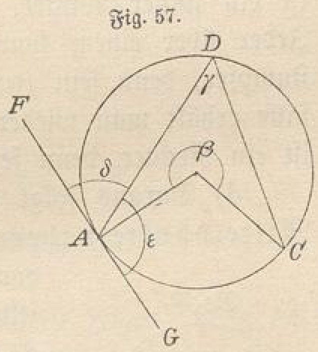
228) Bekannt sind bereits z. B. folgende Konstruktionen der Kreislehre: Vervielfachung des Kreisbogens, seine wiederholte Halbierung. Die Einteilung der Peripherie in 2, 4, 8, 16, 32, ... Teile, in 3, 6, 12, 24, 48, ... Teile. Die Konstruktion der entsprechenden Winkel. Die Konstruktion der entsprechenden regelmäßigen Vielecke, die dem Kreise ein- oder umbeschrieben sind. Die Konstruktion einiger regelmäßiger Vielecke über gegebenen Geraden (von gegebener Seite). Die Konstruktion des umbeschriebenen Kreises und der vier Berührungskreise für das Dreieck. Einige Dreiecks- und Vierecksko nstruktionen, die mit der Kreislehre zusammenhängen. Konstruktionen einiger Reihen von Berührungskreisen. Konstruktion der von einem Punkte

aus an einen gegebenen Kreis gehenden Tangente. Konstruktion der äußeren und der inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise.

β) Die Peripherie- und Zentriwinkel, der Tangenten-Sehnenwinkel.

229) Liegt der Scheitel eines Winkels auf der Kreislinie, und sind seine Schenkel Sehnen, so heißt der Winkel ein Peripheriewinkel. (Ein solcher ist z. B. $\measuredangle \gamma$ oder $\measuredangle ADC$ in Fig. 57.) Von diesem Winkel sagt man, daß er auf dem konkaven Bogen AC steht. Verbindet man einen Punkt E dieses Bogens mit A und C, so erhält man einen Peripheriewinkel, der auf dem konvexen Bogen AC steht. [So steht auch der konkave Zentriwinkel AMC auf dem konkaven Bogen AC, der konvexe Zentriwinkel AMC oder β auf dem konvexen Bogen AC. Über einer Sehne AC kann sowohl ein konkaver, als auch ein konvexer Zentriwinkel stehen.]

Fig. 57.



230) Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Zentriwinkels.

Beweis. Erster Fall. Schenkel AM (Fig. 58a) liegt auf AB. Dann ist $\alpha = \beta + \gamma$ (Außenwinkel), da aber $\beta = \gamma$ ist, so folgt $\alpha = 2\beta$ und $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Zweiter Fall. M liegt zwischen AB und BC. (Fig. 58b.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha_1 = 2\beta_1$ (soeben be-

Fig. 58a.

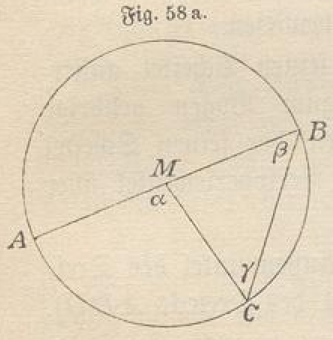


Fig. 58b.

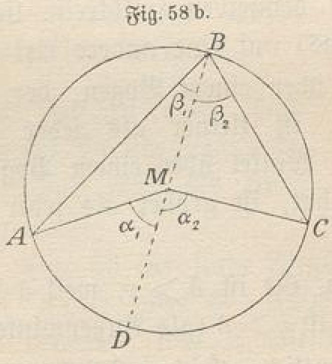
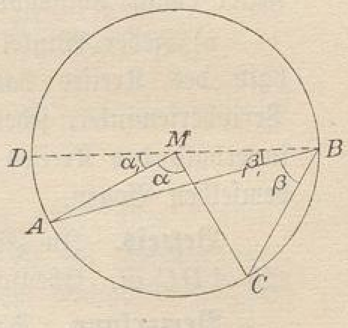


Fig. 58c.



wiesen) und $\alpha_2 = 2\beta_2$, folglich $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$, d. h. $\measuredangle AMC = 2 \cdot (\measuredangle ABC)$, also $\measuredangle ABC = \frac{1}{2}(\measuredangle AMC)$.

Dritter Fall. M liegt außerhalb ABC. (Fig. 58c.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$, aber $\alpha_1 = 2\beta_1$, folglich durch Subtraktion $\alpha = 2\beta$.

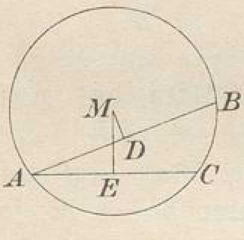
231) **Folgerungen.** a) Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen eines Kreises stehen, sind einander gleich. Denn sie sind Hälften desselben Zentriwinkels.

b) Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleicher Kreise sind einander gleich.

c) Jeder über einem konkaven Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein spitzer Winkel, denn sein Zentriwinkel ist kleiner als 180^0. Jeder über einem konvexen Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein stumpfer, denn sein Zentriwinkel ist größer als 180^0. Im Zwischenfalle erhält man wieder den Satz: der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter, denn sein Zentriwinkel ist gleich 180^0.

d) Daraus folgt der Satz: Von zwei Sehnen ist die dem Mittelpunkte nähere die größere. Man denke sich beide Sehnen von einem Punkte A ausgehend und in demselben Halbkreise liegend (Fig. 59). Dann ist $\sphericalangle ACB$ ein stumpfer. Folglich ist AB größer als AC, denn dem größten Dreieckswinkel liegt die größte Seite gegenüber. Nun ist aber $ME > MD$, denn der mit Radius MD um M gelegte Kreis schließt die ganze Linie AB (mit Ausnahme des Punktes D) aus, also auch alle Punkte des durch AB begrenzten Segmentes ACB. (Vgl. Nr. 75.) Also ist die dem Mittelpunkte nähere Sehne die größere.

Fig. 59.



Nun gehören aber zu gleichen Sehnen gleiche Abstände, also gilt der Satz auch dann, wenn die Sehnen nicht von demselben Punkte ausgehen und nicht in demselben Halbkreise liegen. Der Satz wird später (nach Pythagoras) auf eine andere Art bewiesen.

e) Jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel außerhalb des Kreises hat, ist kleiner als jeder zum Bogen gehörige Peripheriewinkel; jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel innerhalb des Kreises hat, ist größer als jeder Peripheriewinkel über demselben Bogen.

Beweis. In Fig. 60 ist $\delta > \gamma$, weil δ Außenwinkel des Dreiecks ADC ist. Ebenso ist $\varepsilon > \delta$ (als Außenwinkel des Dreiecks AED).

Bemerkung. Sämtliche gleichen Winkel über einer Geraden AB haben ihre Scheitel auf einem durch A und B gehenden Kreisbogen; kleinere Winkel über AB haben den Scheitel außerhalb dieses Bogens, größere dagegen innerhalb.

232) Zu jeder Sehne AB gehören zwei Bogen, folglich auch zwei Arten von Peripheriewinkeln, spitze und stumpfe. Die entsprechenden Winkel sind Supplementwinkel. In Fig. 61 z. B. ist die

Fig. 60.

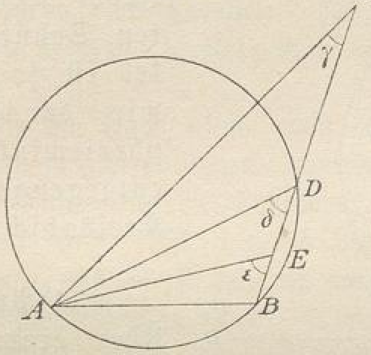
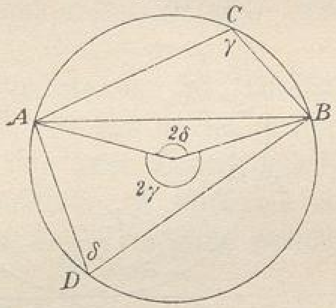


Fig. 61.



Summe des konkaven und des konvexen Zentriwinkels gleich 4 Rechten, folglich ist $\gamma + \delta = 2\,\mathrm{R}$.

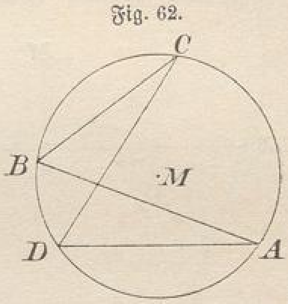
Jedes Viereck, dessen Ecken auf einem Kreise liegen, heißt ein Sehnenviereck. Demnach gilt für konvexe Sehnenvierecke der Satz:

Im Sehnenviereck ist die Summe gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten.

Umkehrung: Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten, so ist das Viereck ein Sehnenviereck; d. h. der durch drei seiner Eckpunkte gelegte Kreis geht auch durch den vierten. Warum? (Vgl. Nr. 231 e.)

Bemerkung. Ist das Sehnenviereck ein sog. überschlagenes, wie es durch Fig. 62 dargestellt ist, so sind die Gegenwinkel A und C gleich, ebenso B und D, an Stelle der Supplementwinkel treten also gleiche Winkel.

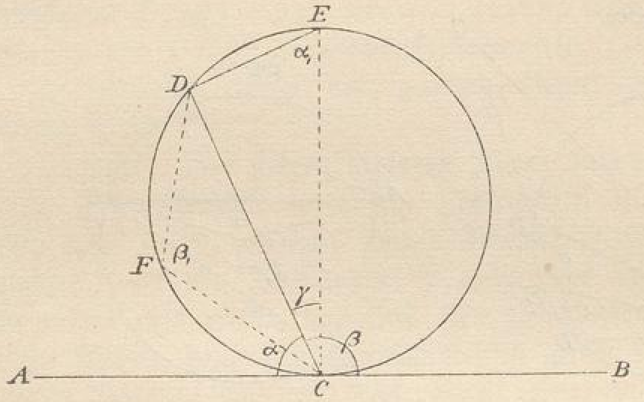
Fig. 62.



233) Den Winkel zwischen einer Tangente und einer von ihrem Berührungspunkte ausgehenden Sehne bezeichnet man als einen Tangenten-Sehnenwinkel.

Ein solcher ist in Fig. 63 der spitze Winkel ACD oder α, ebenso der stumpfe Winkel BCD oder β. Dort ist im Berührungspunkte C ein Lot CE errichtet, und E mit dem Endpunkte D der Sehne verbunden worden. Dadurch ist ein Peripheriewinkel α_1 entstanden, der als Komplementwinkel von γ ebenso groß sein muß, wie α, denn $\sphericalangle CDE = 90^0$, also $\alpha_1 = 90^0 - \gamma$. Demnach ist jeder Peripheriewinkel über CD, der auf derselben Seite von CD liegt, so groß wie α. Jeder auf der anderen Seite von CD liegende Peripheriewinkel über dieser Sehne ist aber gleich $180^0 - \alpha$, d. h. ebenso groß, wie β. Folglich gilt der Satz: **Jeder Tangenten-Sehnenwinkel ist so groß, wie der Periwinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.**

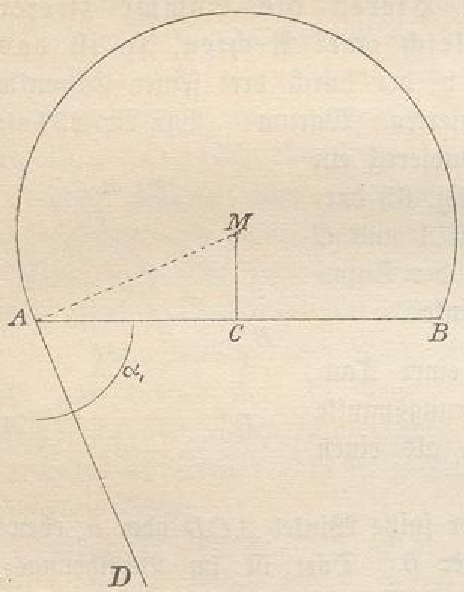
Fig. 63.



234) **Aufgabe.** Über einer Geraden AB einen Kreisbogen zu zeichnen, der einen gegebenen Winkel α als Peripheriewinkel über AB in sich faßt.

Auflösung. Ist AB die gegebene Gerade (Fig. 64) und α der gegebene Winkel, so trage man α als $\sphericalangle BAD$ an die Gerade AB an. In A errichte man ein Lot auf AD, ebenso auf AB im Halbierungspunkte C. Die Lote schneiden sich im Mittelpunkte des gesuchten Kreisbogens. (Warum?)

Fig. 64.



Bemerkungen. Ist α ein rechter Winkel, so hat man über AB als Durchmesser einen Halbkreis zu schlagen. — Der geometrische Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel, die sich über einer Geraden AB nach derselben zeichnen lassen, ist ein bestimmter Kreisbogen. Ein ebensolcher ist der Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel, die sich unterhalb der Geraden zeichnen lassen.

235) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem ihr gegenüberliegenden Winkel und der zu ihr gehörigen Höhe.

Auflösung. Ist AB die gegebene Seite und α der gegebene ihr gegenüberliegende Winkel, so konstruiere man den über AB stehenden Kreisbogen, der α als Peripheriewinkel faßt. Ist h die gegebene Höhe, so ziehe man zu AB im Abstande h auf der Seite des Bogens eine Parallele. Ist C ein Schnittpunkt der Parallelen und des Bogens, so ziehe man CA und CB. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

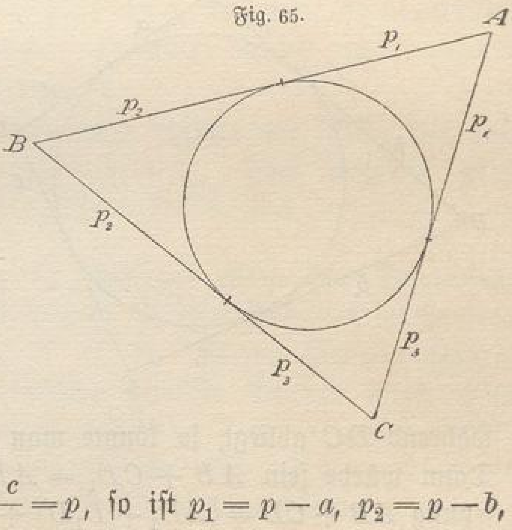
Ist die Höhe h zu groß (größer als die sog. Pfeilhöhe des Bogens), so gibt es keinen Schnittpunkt, und das Dreieck ist unmöglich. Ist h kleiner, als die Pfeilhöhe, so sind zwei Dreiecke möglich, die kongruent sind. Ist h gleich der Pfeilhöhe, so wird die Parallele Tangente, und es ist nur ein einziges Dreieck möglich, welches rechtwinklig-gleichschenklig ist.

Bemerkung. Der Kreisbogen ist zugleich der dem Dreiecke umbeschriebene Kreis. Sind also a und α gegeben, so ist der Radius des umbeschriebenen Kreises schon bestimmt. Man kann also nicht zugleich a, α und r geben, denn r ist nicht mehr unabhängig, sobald a und α gegeben sind. Es ist gleichgültig, ob ein Dreieck aus a, α und einem dritten Stück konstruiert werden soll, oder aus a, r und dem betreffenden Stück, oder aus α und r und dem betreffenden Stück. Nur können bei a und r zwei Lösungen eintreten.

γ) Tangentendreiecke und Tangentenvierecke.

236) **Aufgabe.** Ein Dreieck habe die Seiten a, b und c. Wie groß sind die Abschnitte p_1, p_2, p_3, die durch die Berührungspunkte des Inkreises entstehen?

Fig. 65.



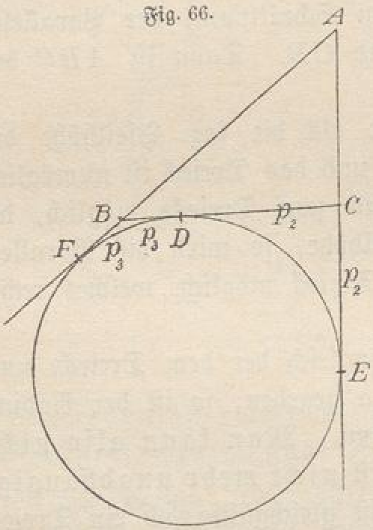
Auflösung. In Fig. 65 ist $2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = a + b + c$, zugleich ist $2p_2 + 2p_3 = 2a$, folglich durch Subtraktion: $2p_1 = a + b + c - 2a = b + c - a$, folglich $p_1 = \frac{-a+b+c}{2}$, ebenso $p_2 = \frac{a-b+c}{2}$ und $p_3 = \frac{a+b-c}{2}$.

Setzt man noch $\frac{a+b+c}{2} = p$, so ist $p_1 = p - a$, $p_2 = p - b$, $p_3 = p - c$.

237) Dieselbe Aufgabe für den An-Kreis mit Radius ϱ_1 zu lösen.

Auflösung. In Fig. 66 ist $AF = AB + BF = AB + BD$ und $AE = AC + CD$, folglich $AF + AE = AB + AC + BC = a + b + c$, also $AF = AE = \frac{a+b+c}{2} = p$. Jetzt ist $CE = AE - AC = p - b = p_2$ und ebenso $BF = AF - AB = p - c = p_3$.

Fig. 66.

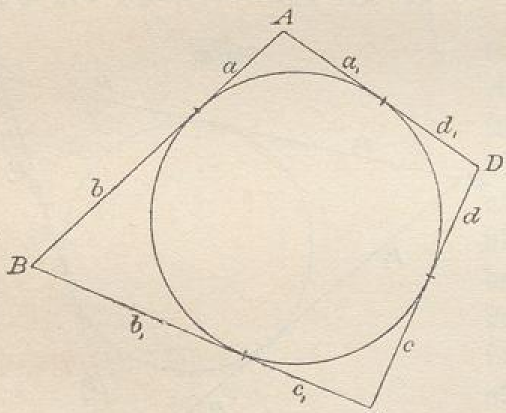


Folglich: Der An-Kreis teilt die unmittelbar berührte Dreiecksseite in dieselben Stücke, wie der In-Kreis, nur sind beide Stücke in der Lage vertauscht. Diese Beziehungen sind eine Quelle wichtiger Sätze.

238) **Satz.** Die Summe zweier Gegenseiten eines (gewöhnlichen) Tangentenvierecks ist gleich der Summe der beiden anderen Gegenseiten.

In Fig. 67 sind folgende Tangenten gleich: $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, $d = d_1$, folglich ist $a + b + c + d = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$, d. h. $AB + CD = BC + DA$.

Fig. 67.



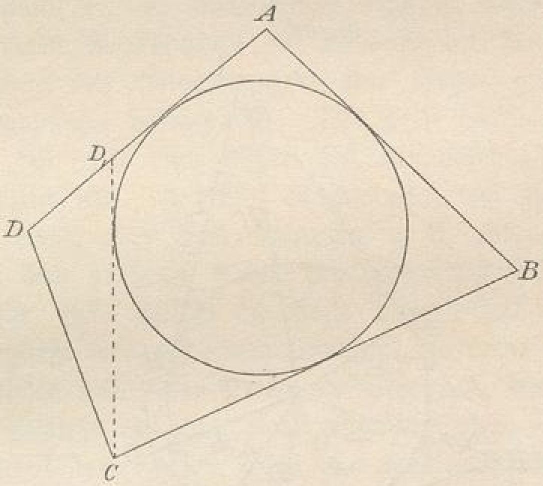
Umkehrung. Ist bei einem Viereck die Summe des einen Gegenseitenpaares gleich der des andern, so ist es ein Tangentenviereck.

Beweis. Angenommen, $ABCD$ in Fig. 68 hätte in dem angegebenen Sinne gleiche Seitensummen und würde von dem gezeichneten Kreise nur an drei Seiten berührt, während DC abliegt, so könnte man die vierte Tangente CD_1 ziehen. Dann würde sein $AB + CD_1 = AD_1 + BC$, und nach der Voraussetzung $AB + CD = (AD_1 + D_1D) + BC$, folglich durch Subtraktion $CD - CD_1 = D_1D$ oder $CD = CD_1 + D_1D$, d. h. die Summe zweier

Dreiecksseiten würde gleich der dritten sein. Dieser Widerspruch kann nur dadurch aufgehoben werden, daß D auf D_1 fällt. — Entsprechend wird der Beweis geführt, wenn man annimmt, CD schnitte den Kreis.

Bemerkungen. Man denke sich ein Tangentenviereck als Gelenkviereck, dann kann es beliebig viele verschiedene Gestalten annehmen. Solange es konvex bleibt, läßt sich ihm stets ein Kreis einbeschreiben. In zwei Sonderfällen geht es in ein Dreieck über. Dies geschieht, wenn zwei aneinanderstoßende Seiten einen Winkel von 180° bilden. — Jedes rechtwinklige Dreieck ist die Hälfte eines Tangenten-Sehnenvierecks. (Unter Tangenten-Sehnenviereck versteht man ein Viereck, welches sowohl einen umbeschriebenen, als auch einen einbeschriebenen Kreis hat. Man nennt solche Vierecke auch bizentrische Vierecke, womit auf die beiden Kreiszentra hingedeutet werden soll.)

Fig. 68.



239) **Aufgabe.** Folgender Satz soll bewiesen werden:

Verbindet man die Ecken eines Tangentenvierecks mit dem Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises, so entstehen vier Zentriwinkel, von denen je zwei nicht aneinanderliegende zusammen 180° betragen.

Bemerkung. Bezeichnet man diese Winkel der Reihe nach mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4, so ist $\xi_1 + \xi_3 = \xi_2 + \xi_4$. Dies entspricht ganz dem Satze für die Seiten $AB + CD = BC + DA$.

240) **Aufgabe.** In Fig. 69 sind die Ecken des Tangentenvierecks $ABCD$ mit dem Mittelpunkte M des Inkreises verbunden, ebenso die Berührungspunkte E, F, G, H. Es soll bewiesen werden, daß die folgenden Inhaltsunterschiede gewisser Dreiecke gleich groß sind: $\triangle AME - \triangle CMF = \triangle AMH - \triangle CMG = \triangle AMB - \triangle CMB$; ferner $\triangle BMF - \triangle DMG = \triangle BME - \triangle DMH = \triangle BMC - \triangle DMC$. Ferner sind folgende Inhaltssummen gleich: $\triangle AMB + \triangle CMD = \triangle BMC + \triangle DMA = \frac{1}{2} ABCD$.

Bemerkung. Nur Dreieckskongruenzen sollen zum Beweise benutzt werden. Die Sätze können später mit Hilfe der Inhaltssätze andere Beweise erhalten. (Sie werden später Anwendung finden.) Wie lauten diese Sätze für den Sonderfall des Tangentendreiecks?

Fig. 69.

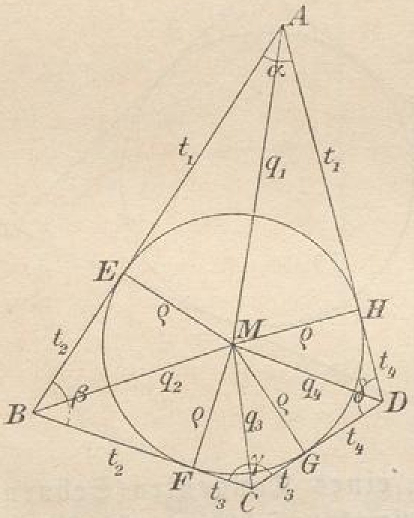
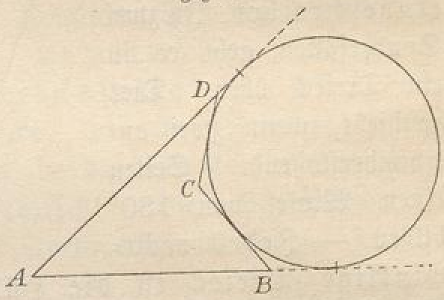


Fig. 70.



241) **Aufgabe.** Es soll versucht werden, die für das einem Kreise umbeschriebene Tangentenviereck geltenden Sätze auch für das einem Kreise anbeschriebene Tangentenviereck auszusprechen.

Bemerkung. Es gibt drei Arten anbeschriebener Tangentenvierecke, solche sind durch die Fig. 70, 71 und 72 dargestellt, das

Fig. 71.

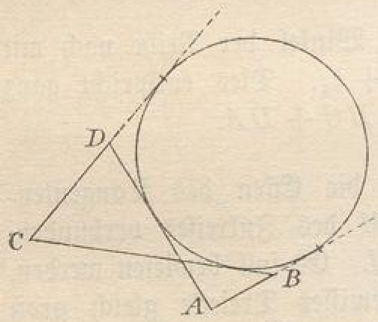
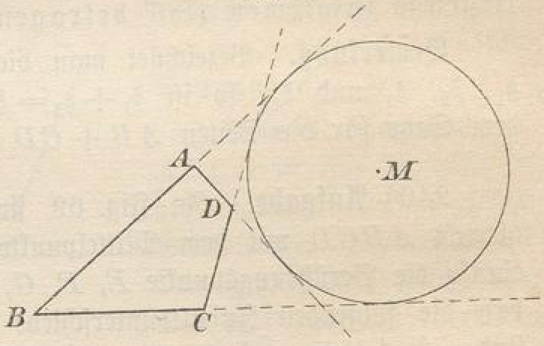


Fig. 72.



„Tangentenviereck mit einspringendem Winkel", das „überschlagene Tangentenviereck" und das nirgends unmittelbar berührende. Aufeinanderfolgende Seiten treten an die Stelle von gegenüberliegenden.

δ) Einfache Betrachtungen über mehrere Kreise.

242) **Eigenschaften konzentrischer Kreise.** Zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und r_1, wobei $r > r_1$ sein möge, haben überall denselben Abstand $r - r_1$ voneinander. Jeder Punkt des einen hat vom zugehörigen Gegenpunkte des anderen den Abstand $r + r_1$. Jede Tangente des kleineren gibt eine Sehne des größeren, die im Berührungspunkte halbiert ist. Alle diese Sehnen sind von derselben Länge. Ist AB eine dieser Berührungssehnen, BC eine zweite, CD eine dritte usw., so kann es kommen, daß die Reihe dieser Geraden nach einem oder nach mehreren, z. B. nach n Umgängen schließt. Wo auf dem größeren Kreise der Ausgangspunkt der Reihe auch gewählt werde, stets schließt die Reihe nach derselben Anzahl von Umgängen. Schließt sie nach einem Umgange, so entsteht ein regelmäßiges Vieleck, welches dem einen Kreise umbeschrieben, dem anderen einbeschrieben ist. Schließt sie nach mehreren Umgängen, so entsteht ein regelmäßiger Vielecksstern, dessen Ecken auf dem größeren Kreise liegen und den Ecken eines regelmäßigen Vielecks entsprechen, während die Seiten den kleineren Kreis berühren und ein diesem umbeschriebenes Vieleck bilden.

Fig. 73.

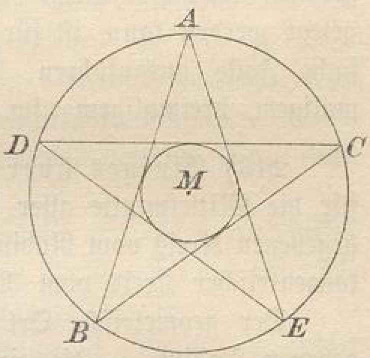


Fig. 73 stellt den regelmäßigen Fünfeckstern dar, der nach zwei Umgängen schließt. Man hat, wenn die Ecken A, D, B, E, C des regelmäßigen Fünfecks vorliegen, nur jedesmal eine Ecke zu überschlagen, um den Stern zu zeichnen und den zugehörigen konzentrischen Kreis zu erhalten. Man berechne die Winkel dieses Gebildes in Graden. Macht man dasselbe bei einem n-Eck von gerader Seitenzahl, so erhält man keinen eigentlichen Stern, sondern zwei übereinandergelegte regelmäßige Vielecke von halber Seitenzahl. Macht man dasselbe bei einem n-Eck von ungerader Seitenzahl, so entsteht ein Stern, der nach zwei Umgängen schließt.

Man führe dies aus für den Fall $n = 7$, wobei das Siebeneck nur versuchsweise zu zeichnen ist. Überschlägt man in diesem Falle jedesmal zwei Punkte, so entsteht der Stern des regelmäßigen Siebenecks, der erst nach drei Umgängen schließt. Man versuche dasselbe für $n = 8$ usw.

(Schließt bei zwei gegebenen konzentrischen Kreisen die Reihe der Berührungssehnen nie, so erhält der Stern unendlich viele Ecken.)

Für jeden regelmäßigen Stern solcher Art lassen sich die Winkel leicht berechnen.

In die Ringfläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen läßt sich zunächst ein beide berührender Kreis einlegen, dessen Radius gleich $\frac{r - r_1}{2}$ ist. Es läßt sich eine ganze Reihe solcher aufeinander folgender Berührungskreise einzeichnen, von denen jeder auch seine beiden Nachbarn berührt. Diese Reihe von Berührungskreisen kann nach einem Umgange schließen. Dann bilden die auf dem größeren Kreise liegenden Berührungspunkte ein regelmäßiges n=Eck, ebenso die auf dem kleineren Kreise liegenden. Die Mittelpunkte der Kreisreihe bilden ein regelmäßiges n=Eck auf dem Kreise mit dem Radius $\frac{r + r_1}{2}$. Die Berührungspunkte je zweier der Reihen Kreise bilden ein regelmäßiges n=Eck auf dem Kreise, dessen Radius gleich der Tangente ist, die vom Zentrum der konzentrischen Kreise aus an einen der Reihenkreise gelegt ist. Wie um einen gegebenen Kreis eine Reihe von Berührungskreisen für einfaches Schließen gelegt werden kann, ist für gewisse Fälle in § 186 gezeigt. Man versuche Fälle auszuführen, bei denen die Kreisreihe erst nach zweimaligem, dreimaligem usw. Umgange schließt.

243) Einiges über Kreisberührung. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius ϱ, die einen gegebenen Kreis vom Radius r äußerlich berühren, ist ein zum letzteren konzentrischer Kreis vom Radius $r + \varrho$.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenen Radius ϱ, die einen gegebenen Kreis vom Radius r innerlich berühren, ist ein zum letzteren konzentrischer Kreis vom Radius $(r - \varrho)$ bezw. $(\varrho - r)$, je nachdem r oder ϱ der größere Radius ist.

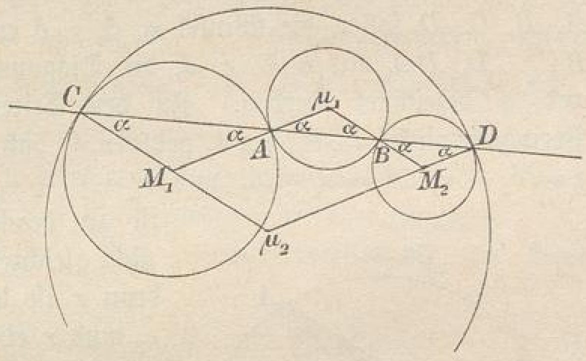
An Stelle des gegebenen Kreises kann eine gerade Linie treten.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte innerlich oder äußerlich berühren, ist der zu dem Punkte gehörige Durchmesser bezw. seine Verlängerung.

Auch hier kann an Stelle des gegebenen Kreises eine gerade Linie treten.

Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, so können die Berührungen gleichartige sein, d. h. beide äußerliche oder beide innerliche; sie können aber auch ungleichartige sein, d. h. die eine eine äußerliche, die andere eine innerliche. Die Berührungssekante gibt dabei zu paarweise parallelen Radien Anlaß. Für den Fall zweier gleichartiger Berührungen der Kreise M_1 und M_2 durch Kreise μ_1 und μ_2 ist dies in Fig. 74 dargestellt. Dabei zeigt sich, daß die Berührungssekante für die äußerlichen Berührungen in A und B zugleich Berührungssekante für die innerlichen Berührungen in C und D ist. Die Ausführung der entsprechenden Figur für ungleichartige Berührungen sei dem Schüler überlassen. (Über diesen Gegenstand ist später ausführlicher zu sprechen.)

Fig. 74.



244) Gegenseitiges Schneiden zweier Kreise. Schneiden einander zwei Kreise, so versteht man unter dem Schnittwinkel den Winkel, unter dem sich die in den Schnittpunkten an beide gelegten Tangenten schneiden. Man braucht nur von einem Schnittwinkel zu reden, da die beiden Schnitte aus Symmetriegründen denselben Winkel geben. Gewöhnlich soll der spitze Schnittwinkel gemeint sein, nicht sein Nebenwinkel.

Wichtig ist der Sonderfall, daß die Kreise einander rechtwinklig schneiden. Dann ist die Tangente des einen ein Durchmesser des anderen. Man nennt dann die beiden Kreise Orthogonalkreise.

Zieht man in Fig. 74 die Tangenten in A und B, so erhält man den Mittelpunkt eines Kreises, der die Kreise M_1 und M_2 in A und B (und außerdem in zwei anderen Punkten) rechtwinklig schneidet. Ebenso wird der Kreis μ_1 rechtwinklig geschnitten.

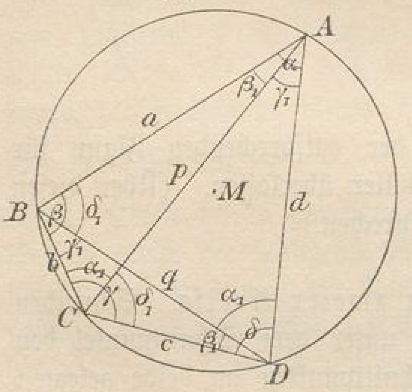
Zieht man die Tangenten in C und D, so erhält man den Mittelpunkt eines Kreises, der die Kreise M_1 und M_2 in C und D (und außerdem in zwei anderen Punkten) rechtwinklig schneidet. Auch Kreis μ_2 wird rechtwinklig geschnitten. —

Die Aufgaben über Kreisberührungen und orthogonales Schneiden hängen also eng miteinander zusammen. (Später wird alles unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte behandelt.)

ε) Konstruktionsübungen zur Kreislehre.

245) **Konstruktion von Sehnenvierecken.** Bezeichnungen: Der Radius des Um-Kreises sei r. Den aufeinander folgenden Ecken A, B, C, D sollen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entsprechen, die Seiten AB, BC, CD, DA mit a, b, c, d, die Diagonalen AC und BD mit p und q bezeichnet werden. Zu den Seiten a, b, c, d sollen die Peripheriewinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ gehören, so daß $\alpha = \beta_1 + \gamma_1$, $\beta = \gamma_1 + \delta_1$, $\gamma = \delta_1 + \alpha_1$, $\delta = \alpha_1 + \beta_1$ und $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 180^0$ ist. Dabei ist zu beachten, daß r, a und α_1 nicht gleichzeitig gegeben werden dürfen, denn r ist durch a und α_1, a durch α_1 und r eindeutig bestimmt, α_1 durch r und a zweideutig, da es sowohl spitz, als auch stumpf (nämlich der Supplementwinkel) sein darf. Im übrigen ist es gleichgültig, ob r und a, a und α_1, α_1 und r gegeben ist. Ebenso dürfen r, p und β, r, q und α nicht gleichzeitig gegeben sein. Aus a, b, p und a, b, β ist r bereits bestimmt, aus b, c, q und b, c, γ ebenfalls usw. Die verschiedenen Aufgabengruppen lassen also gewisse Vertauschungen gegebener Stücke zu, ohne daß neues entsteht. Man achte auf solche Wiederholungen in der folgenden Zusammenstellung von Aufgaben.

Fig. 75.



Man versuche, die angegebene Bezeichnungsart auch für überschlagene Sehnenvierecke durchzuführen und bei den Konstruktionen dieser zu berücksichtigen. —

245a) **Aufgaben.** Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus

1) r, a, b, c	2) r, a, α, β	3) r, a, p, q
4) r, a, b, q	5) r, α_1, b, c	6) $r, \alpha_1, \alpha, \beta$
7) r, α_1, p, q	8) r, α_1, b, q	9) a, α_1, b, c
10) $a, \alpha_1, \alpha, \beta$	11) a, α_1, p, q	12) a, α_1, b, q
13) p, a, b, c	14) β, a, b, c.	

Der Schüler versuche noch andere Aufgaben aufzustellen. So können z. B. die Entfernungen e_1, e_2, e_3, e_4 der Seiten a, b, c, d vom Kreiszentrum herangezogen werden. Schwierigere Aufgaben werden später folgen.

246) **Konstruktion von Tangentenvierecken.** Bezeichnungen: Der Radius des In-Kreises sei ϱ. Den aufeinander folgenden

Ecken A, B, C, D entsprechen die Winkel α, β, γ, δ. Die Seiten AB, BC, CD, DA sollen a, b, c, d heißen. Die Entfernungen der Ecken vom Kreiszentrum μ seien q_1, q_2, q_3, q_4, die Diagonalen AC und BD seien p_1 und p_2. Die von A, B, C, D ausgehenden Tangententeile mögen mit t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnet werden, sodaß $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = a + c = b + d = \frac{u}{2}$ ist, wenn u den Umfang bedeutet. E, F, G, H seien die Berührungspunkte. Man stelle die Bezeichnungen auch für anbeschriebene Tangentenvierecke der drei Arten fest und versuche diese bei den Konstruktionen zu berücksichtigen.

246a) **Konstruktionen.** Ein Tangentenviereck zu konstruieren aus

1) ϱ, α, β, b.	2) ϱ, α, β, γ.	3) ϱ, a, b, β.
4) ϱ, q_1, q_2, b.	5) ϱ, q_1, q_2, q_3.	6) a, α, β, b.
7) a, α, β, q_3.	8) a, α, β, γ.	9) a, b, c, α.

10) Ein Trapez zu konstruieren, welches einem Kreise mit Radius ϱ umbeschrieben ist und von dem die eine Grundlinie a gegeben ist. Seine Eigenschaften sollen untersucht werden.

Der Schüler versuche noch andere Aufgaben aufzustellen. Schwierigere kommen später zur Sprache.

247) **Einige Berührungsaufgaben.** 1) Gegeben seien zwei Kreise. Ein dritter Kreis von gegebenem Radius soll so gelegt werden, daß er beide äußerlich berührt.

2) Dieselbe Aufgabe, jedoch sollen beide Kreise innerlich berührt werden.

3) Dieselbe Aufgabe, jedoch soll der erste Kreis äußerlich, der zweite innerlich berührt werden. (Oder der erste innerlich, der zweite äußerlich.)

Bemerkung. In den drei Aufgaben kann der eine Kreis auch eine Gerade oder ein Punkt sein.

4) Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und außerdem eine gegebene Gerade berührt. (Zwei Fälle zu beachten, innerliche und äußerliche Berührung. Die Tangenten und die Gerade sollen berührt werden.)

5) Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise gleichartig berührt, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte. (Sind in Fig. 74 M_1 und M_2 die gegebenen Kreise und ist A der gegebene Berührungspunkt, so ziehe man M_1A und parallel gleichgerichtet dazu M_2D. Die Gerade AD schneidet dann den Kreis M_2 im gesuchten Berührungspunkte B. M_1A und M_1B geben verlängert den Schnittpunkt μ_1 als Mittelpunkt des gesuchten Kreises. — Ist C der gegebene Berührungspunkt, so konstruiere man entsprechend B, worauf CB den

zweiten Berührungspunkt D gibt, M_1C und M_2D aber verlängert μ_2 geben.

6) Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise ungleichartig berührt, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte A. (Man ziehe M_2D parallel und entgegengesetzt zu M_1A und ziehe AD, was den zweiten Berührungspunkt B gibt.)

247a) Einige Aufgaben über orthogonales Schneiden.

1) Gegeben seien zwei Kreise. Ein dritter Kreis von gegebenem Radius soll so gelegt werden, daß er beide rechtwinklig schneidet. (Der geometrische Ort seines Mittelpunktes ist in bezug auf jeden der gegebenen Kreise ein konzentrischer Kreis, von dem man einen Punkt findet, wenn man vom ersteren eine Tangente ausgehen läßt, die gleich dem gegebenen Radius ist. Wo beide Orte einander schneiden, liegt der Mittelpunkt. Der eine Kreis kann auch Gerade oder Punkt sein.)

2) Gegeben seien zwei Kreise. Ein Orthogonalkreis zu beiden soll konstruiert werden, der den einen in einem gegebenen Punkte schneidet. (Man beachte das über Berührungen Gesagte. Der andere Kreis kann auch Gerade oder Punkt sein.)

3) Man versuche diese Aufgaben für das Schneiden unter 45^0 oder unter beliebigem Winkel auszudehnen.

d) **Flächengleichheit geradliniger Gebilde.**

248) Kongruente Flächen sind inhaltsgleich. Dies ist derin begründet, daß sie sich zur Deckung bringen lassen.

Durch Zusammensetzen (Aneinanderlegen) von Flächen erhält man eine Fläche, deren Inhalt durch die Summe der Einzelflächen gegeben ist. Die Reihenfolge ist dabei gleichgültig. Das Zusammenlegen kann aber in verschiedener Weise erfolgen, sodaß die Schlußgebilde ein ganz verschiedenes Aussehen haben, also nicht kongruent sind. Trotzdem ist der Gesamtinhalt in allen Fällen derselbe. [$F = F_1 + F_2 + F_3 = F_1 + F_3 + F_2 = \cdots$] Die Flächengleichheit soll zum Unterschiede von der Kongruenz durch ein einfaches Gleichheitszeichen ausgedrückt werden.

Von einer Fläche kann eine andere abgezogen werden. Der Rest wird dann als der Unterschied (die Differenz) der Flächen bezeichnet. Man kann die zweite Fläche auf verschiedene Weise von der ersten abziehen (z. B. von ihr abschneiden), sodaß die Schlußgebilde ein ganz verschiedenes Aussehen haben können. Trotzdem hat der übrigbleibende Flächenteil stets denselben Inhalt. [$F = F_1 - F_2$, wobei $F_1 > F_2$ vorausgesetzt werde.] Von einer

Fläche können mehrere andere abgezogen werden. Die Reihenfolge des Abziehens und das Aussehen des Schlußgebildes sind dabei gleichgültig.

Diese Sätze ermöglichen es, die Flächengleichheit verschiedener Gebilde festzustellen. Dazu sollen einige Beispiele gegeben werden.

249) Satz: Jedes Parallelogramm ist flächengleich mit einem Rechteck von derselben Grundlinie und derselben Höhe.*)

Beweis. Die Grundlinie des Parallelogramms sei AB; über ihr zeichne man das Rechteck von derselben Höhe. Dann entsteht ent-

Fig. 76.

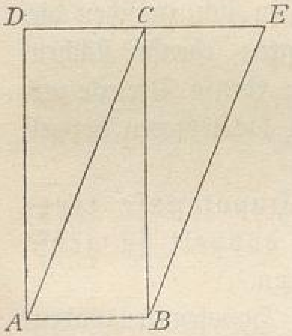


Fig. 77.

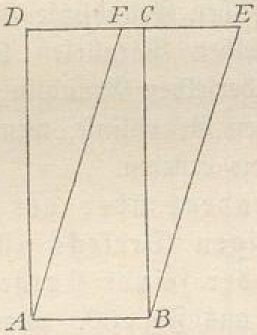
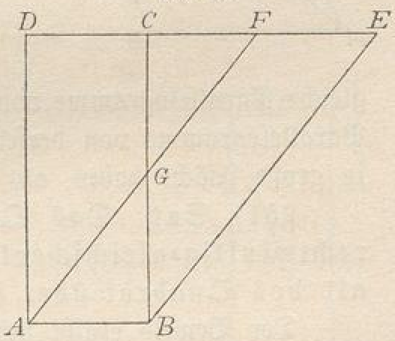


Fig. 78.



weder eine Figur nach Art von Fig. 76, wo zwei Eckpunkte beider Vierecke in C zusammenfallen, oder eine Figur nach Art von 77, wo F zwischen D und C liegt, oder eine Figur nach Art von 78, wo FE außerhalb DC liegt.

In Fig. 76 ist ▱ $ABEC = \triangle ABC + \triangle BCE$, oder, da $\triangle BCE \cong \triangle ADC$ ist, ▱ $ABEC = \triangle ABC + \triangle ADC$ $=$ ▯ $ABCD$, womit der Satz für diesen Fall bewiesen ist.

(An das Dreieck ABC ist das Dreieck BCE auf zwei verschiedene Arten angelegt worden, einmal als BCE, dann als ADC. Die Flächensumme muß beidemal dieselbe sein.)

In Fig. 77 ist ebenso ▱ $ABEF = ABCF + \triangle BCE$ $= ABCF + \triangle ADF =$ ▯ $ABCD$.

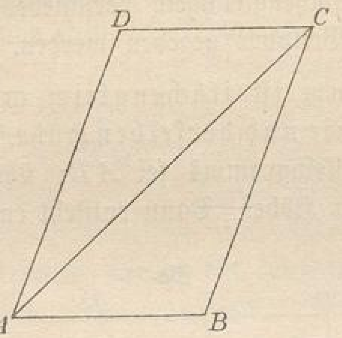
In Fig. 78 ist ▱ $ABEF = \triangle ABG + \triangle BCE - \triangle GCF$ $= \triangle ABG + \triangle ADF - \triangle GCF =$ ▯ $ABCD$.

250) Folgerungen: a) Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich. (Warum?)

*) Das Zeichen ▯ oder ▭ soll stets ein Rechteck, ▱ ein Parallelogramm bedeuten, ◇ einen Rhombus, □ ein Quadrat.

Da, wie Fig. 79 zeigt, jedes Dreieck als Hälfte eines bestimmten Parallelogramms von derselben Grundlinie und derselben Höhe betrachtet werden kann, so folgt ferner:

Fig. 79.



b) Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

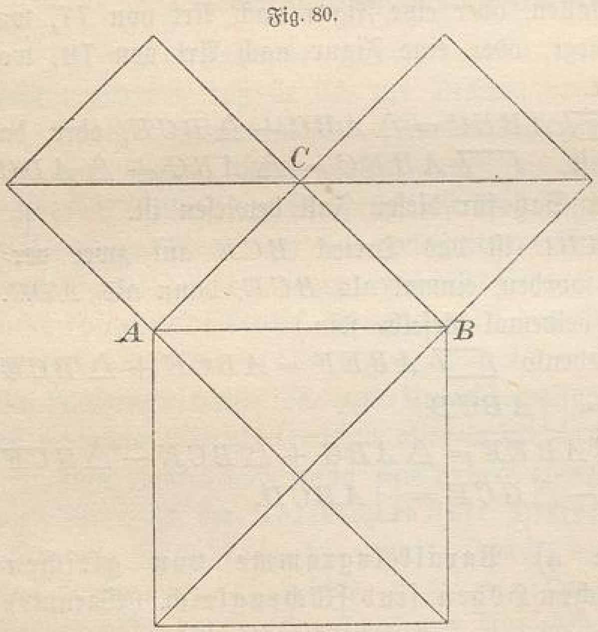
c) Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Rechtecks oder Parallelogramms von derselben Grundlinie und derselben Höhe.

d) Flächengleiche Dreiecke über derselben Grundlinie lassen sich zwischen dieselben Parallelen legen; ebenso flächengleiche Parallelogramme von derselben Grundlinie; ebenso Dreiecke und Parallelogramme von derselben Grundlinie, wenn die letzteren doppelt so große Fläche haben, als die ersteren.

251) Satz: Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß, als das Quadrat über jeder seiner Katheten.

Der Beweis ergibt sich aus Fig. 80. Das Hypotenusenquadrat besteht aus vier gleichen Dreiecken, jedes Kathetenquadrat aus zwei Dreiecken derselben Art. (Vorkursus § 70.)

Fig. 80.



Daraus ergibt sich die Lösung folgender Aufgaben:

a) Ein Quadrat zu konstruieren, welches den doppelten Flächeninhalt hat, wie ein gegebenes Quadrat.

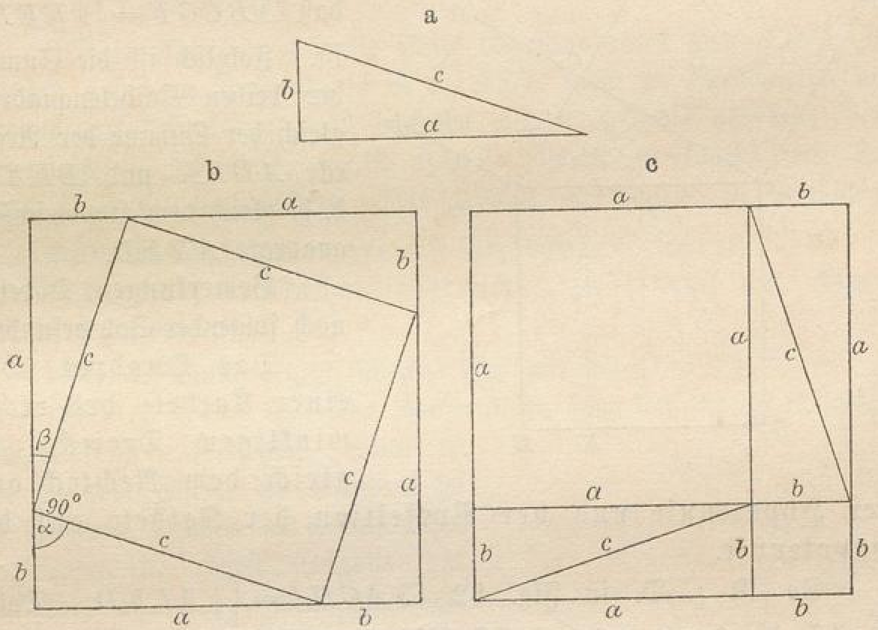
b) Ein Quadrat zu konstruieren, welches den halben Flächeninhalt hat, wie ein gegebenes Quadrat.

252) **Satz des Pythagoras.** In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

Erster Beweis. Der schon im Vorkursus § 71 gegebene Beweis ergibt sich aus Fig. 81 a, b, c.

Ist Fig. 81a das gegebene rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c, so zeichne man zwei Quadrate von der Seite $(a + b)$. In das eine lege man viermal das gegebene Dreieck so ein, wie es Fig. 81b zeigt, in das andere viermal so, wie es Fig. 81c zeigt. Der unbedeckte Rest der Fig. 81b muß

Fig. 81.



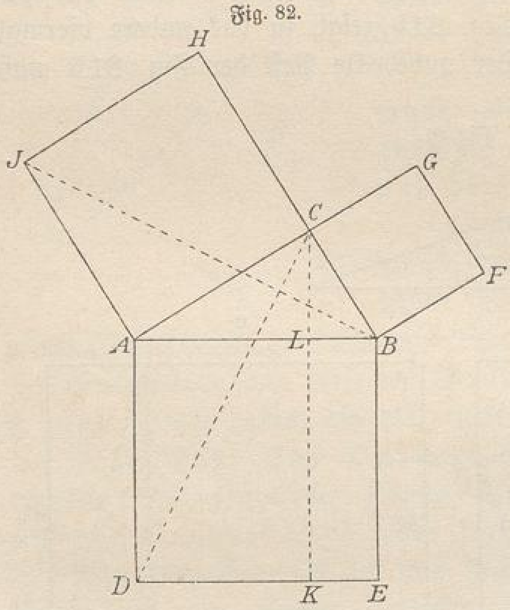
dann ebenso groß sein, wie der Rest in Fig. 81c. Das erstemal ist der Rest ein gleichseitiges Viereck mit der Seite c, dessen Winkel sich, da $\alpha + \beta = 90^0$ ist, als rechte ergeben, sodaß es sich um das Hypotenusenquadrat handelt. Das zweitemal ist der Rest die Summe der beiden Kathetenquadrate. Da die Reste gleich groß sind, so ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Man pflegt den Satz durch folgende Formel auszudrücken: $c^2 = a^2 + b^2$ (d. h. das Quadrat über c ist gleich der Summe der Quadrate über a und b. Dabei bedeutet c^2 das Produkt $c \cdot c$ usw.)

Zweiter Beweis (der des Euklid).

In Fig. 82 sind die Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC errichtet, dessen Winkel CAB mit α bezeichnet werde. Außerdem sind die Hilfslinien BJ und CD und CLK, letztere senkrecht zu AB gezogen. Dabei ist $\triangle JAB = \frac{1}{2} \square ACHJ$, denn beide stehen über derselben Grundlinie AJ und liegen zwischen den Parallelen AJ und BH. Ebenso ist $\triangle ACD = \frac{1}{2} \square ADKL$, denn beide stehen über der Grundlinie AD und liegen zwischen den Parallelen AD und CK. Nun ist aber $\triangle JAB \cong \triangle CAD$, denn $JA = CA$, $AB = AD$, $\sphericalangle JAB = 90^0 + \alpha = \sphericalangle CAD$. Weil die Dreiecke inhaltsgleich sind, ist nach obigem auch $\square ACHJ = \square ADKL$. Ebenso wird auf der anderen Seite gezeigt, daß $\square BCGF = \square KEBL$ ist. Folglich ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich der Summe der Rechtecke $ADKL$ und $BEKL$, d. h. gleich dem Hypotenusenquadrate $ABED$.

Fig. 82.



Bemerkungen. Dabei ist noch folgender Satz gefunden:

Das Quadrat über einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse.

So ist z. B. in Fig. 82 $\square ACHJ = \square ALKD$. Dabei ist AL die durch das Lot CL bestimmte „Projektion" von AC auf die Hypotenuse AB, und AD ist gleich der Hypotenuse AB.

Der kürzeste Beweis des Pythagoreischen Satzes wird in der Ähnlichkeitslehre gegeben.

253) Aus dem Pythagoreischen Lehrsatze ergibt sich die Auflösung folgender Aufgaben:

Aufgabe a) Gegeben seien zwei Quadrate; es soll ein Quadrat konstruiert werden, welches gleich der Summe der beiden gegebenen ist.

Aufgabe b) Gegeben seien drei Quadrate; es soll ein Quadrat konstruiert werden, welches gleich der Summe sämtlicher ist. (Kann auf n Quadrate ausgedehnt werden. Reihenfolge der Addition gleichgültig.)

Aufgabe c) Gegeben seien zwei Quadrate; es soll ein Quadrat konstruiert werden, welches gleich der Differenz der gegebenen ist.

Aufgabe d) Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. $ALKD$ in Fig. 82 sei das gegebene Rechteck. Man verlängere die kleine Seite AL so weit, daß $AB = AD$ wird. Über AB als Durchmesser zeichne man einen Halbkreis und verlängere KL bis zum Schnittpunkte C mit dem Halbkreise. Die Verbindungslinie CA ist dann die Seite des gesuchten Quadrates. (Der Beweis liegt im Satze vom Winkel im Halbkreise und dem des Pythagoras.)

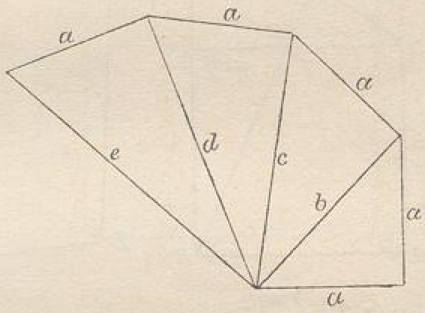
Aufgabe e) Ein Quadrat in ein Rechteck von gegebener Seite zu verwandeln.

(Ist in Fig. 82 AC die Seite des Quadrates und $AB > AC$ die des gesuchten Rechtecks, so ist $\triangle ABC$ leicht zu konstruieren und daraus AL abzuleiten. Ist dagegen $AL < AC$ die gegebene Seite des gesuchten Rechtecks, so ist $\triangle ALC$ leicht zu konstruieren und dann $\triangle ABC$ herzustellen. Das Übrige ist bequem zu erledigen.)

Aufgabe f) Gegeben sei ein Quadrat; es sollen Quadrate von doppelter, dreifacher, vierfacher, fünffacher usw. Fläche konstruiert werden.

(Die Auflösung ergibt sich aus Fig. 83, wo $b^2 = 2a^2$, $c^2 = 3a^2$, $d^2 = 4a^2$, $e^2 = 5a^2$ ist. Die Konstruktion läßt sich bis zu beliebiger ganzer Zahl n fortsetzen. Damit ist die Aufgabe gelöst, ein Quadrat zu konstruieren, welches das n-fache eines gegebenen ist. Diese Aufgabe läßt sich aber abkürzen, indem man mit der nächst kleineren Quadratzahl beginnt. Soll z. B. das gesuchte Quadrat das Zehnfache des gegebenen sein, so beginne man mit der dreifachen Seite, was das neunfache Quadrat gibt und fahre nach Pythagoras fort.)

Fig. 83.



Bemerkungen. In Fig. 83 ist $d^2 = \frac{4}{5}e^2$, $c^2 = \frac{3}{5}e^2$, $b^2 = \frac{2}{5}e^2$, $a^2 = \frac{1}{5}e^2$. Man kann also die Figur benutzen, ein Quadrat zu konstruieren, welches $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ eines gegebenen ist. Man hat nur nötig, die gegebene Quadratseite von dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Strahlen aus auf e aufzulegen und von dem freien Endpunkte aus auf den Strahl d ein Lot zu fällen, dann von dessen Fußpunkte aus ein Lot auf den Strahl c, von dessen Fußpunkte aus ein Lot auf b und von dessen Fußpunkte aus auf a. Die gefundenen Abschnitte der Strahlen geben die Seiten der gesuchten Quadrate. Entsprechend würde bei sieben Strahlen die Aufgabe für

$\frac{6}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$ zu lösen sein. Später werden weit kürzere Konstruktionen gelehrt werden. Aber schon hier lassen sich Abkürzungen ausfindig machen. —

Fig. 83 läßt sich auch durch die einfacher herzustellende Fig. 83a ersetzen, in der die Kreisbogen abwechselnd um A und B geschlagen werden und $ABCD_1$ ein Quadrat mit Seite a ist. Der Schüler zeige, daß $BD_1 = a\sqrt{2}$, $AD_2 = a\sqrt{3}$, $BD_3 = a\sqrt{4}$, $AD_4 = a\sqrt{5}$, $BD_5 = a\sqrt{6}$ usw. ist.

254) **Aufgabe.** Ein gegebenes Dreieck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man betrachte eine Seite des Dreiecks als Grundlinie und bilde die zugehörige Dreieckshöhe. Das leicht zu zeichnende

Fig. 83 a.

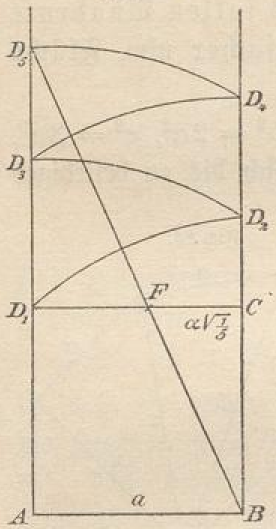
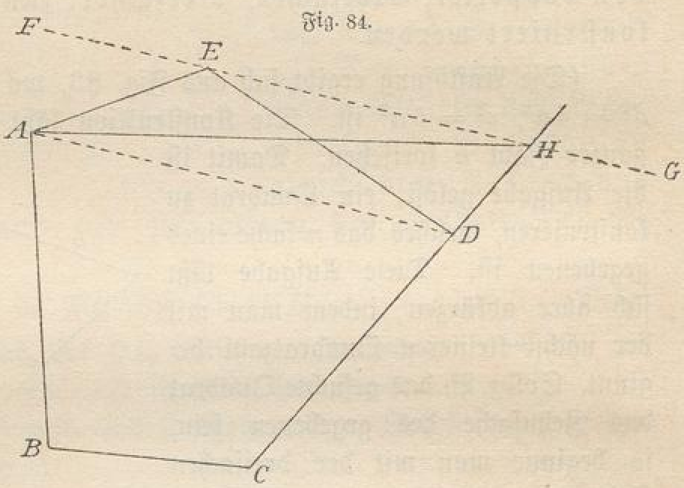


Fig. 84.



Rechteck aus der Höhe und der halben Grundlinie ist dann flächengleich mit dem Dreieck und nach Pythagoras in ein Quadrat zu verwandeln.

255) **Aufgabe.** Ein gegebenes n-Eck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Handelt es sich z. B. um ein gegebenes Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 84), so schneide man durch eine Diagonale, z. B. AD, ein Dreieck ADE ab. Durch E lege man eine Parallele FG zur Diagonale. Dann verlängere man z. B. die anstoßende Seite CD bis zur Parallelen und verbinde den Schnittpunkt H mit A. Dann wird behauptet, das Viereck $ABCH$ sei ebenso groß, wie das Fünfeck.

Der Beweis liegt darin, daß $\triangle ADH = \triangle ADE$ ist.

In entsprechender Weise ist das Viereck durch Abschneiden eines Dreiecks durch eine Diagonale in ein Dreieck zu verwandeln. Das Dreieck ist nach § 300 in ein Quadrat zu verwandeln. — Demnach läßt sich jedes n-Eck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.

Bemerkung. Der Schüler führe die Aufgaben dieser Art mit möglichster Ersparung von Linien aus. So ist es z. B. nicht nötig, das Rechteck vollständig zu zeichnen.

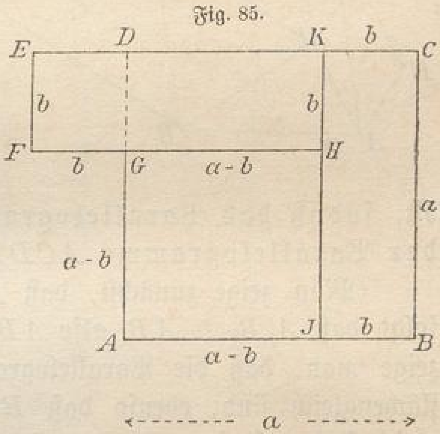
256a) In Fig. 81c ist das Quadrat über der Geraden $(a + b)$ so zerlegt werden, daß es aus dem Quadrate über a, dem Quadrate über b und zwei Rechtecken mit den Seiten a und b besteht. Daraus ergibt sich der Satz:

Das Quadrat über der Summe zweier Geraden ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Geraden, vermehrt um das doppelte Rechteck aus beiden Geraden.

Bemerkung. Setzt man im Anschluß an den Vorkursus (§ 63 und § 66) voraus, daß der Rechtecksinhalt gleich dem Produkte aus zwei aneinander stoßenden Seiten dieses Gebildes ist, so kann man den Satz durch folgende Formel ausdrücken:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.^{*)}$$

Fig. 85.



256b) In Fig. 85 ist eine Gerade $AB = a$ und eine Gerade $JB = b$ gegeben, sodaß $AJ = (a - b)$ ist. Über $(a - b)$ ist ein Quadrat $AJHG$ errichtet, ebenso ein Quadrat $ABCD$ über $AB = a$, und als $DEFG$ ist oben links das Quadrat über b angelegt. Dadurch ist erreicht, daß auch diese Figur das Rechteck aus a und b zweimal enthält, als $JBCK$ und als $EFHK$.

Die Fläche der Gesamtfigur ist gleich der Summe der Quadrate über a und über b. Zieht man davon die beiden genannten Rechtecke ab, so bleibt übrig das Quadrat $AJHG$ über $(a - b)$. Daraus folgt der Satz:

---

*) In der Arithmetik wird in der Tat gezeigt, daß $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ist. **Beispiel:** $(3 + 5)(3 + 5) = 9 + 15 + 15 + 25 = 64$. **Probe:** $8 \cdot 8 = 64$.

Das Quadrat über der Differenz zweier Geraden ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Geraden, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden Geraden.

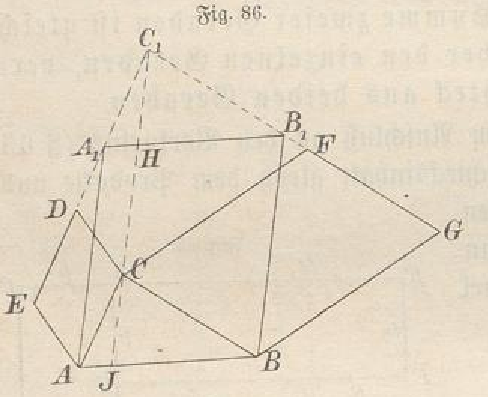
Bemerkung. Der Satz entspricht der Formel

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.^{*)}$$

257) **Aufgabe.** Die folgende, von Pappus gefundene Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes zu beweisen:

In Fig. 86 sind über den Seiten AC und BC eines beliebigen Dreiecks ganz beliebige Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ nach außen errichtet, deren Seiten ED und GF bis zum Durchschnitt C_1 verlängert, die Gerade C_1CJ gezogen, dann AA_1 und BB_1 parallel zu CC_1 bis zum Durchschnitt A_1 bezw. B_1 mit EC_1 und GC_1 gezogen, worauf noch A_1B_1 gezogen ist. Es soll gezeigt werden, daß auch ABB_1A_1 ein Parallelogramm ist, dessen Teil $AJHA_1 = ACDE$ ist, während $BJHB_1 = BCFG$ ist, sodaß das Parallelogramm ABB_1A_1 gleich der Summe der Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ ist.

Fig. 86.



(Man zeige zunächst, daß $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$ ist. Daraus folgt, daß $A_1B_1 \# AB$, also ABB_1A_1 ein Parallelogramm ist. Dann zeige man, daß die Parallelogramme $AJHA_1$, ACC_1A_1, $ACDE$ flächengleich sind, ebenso daß $BJHB_1$, BCC_1B_1, $BCFG$ flächengleich sind, usw.)

Bemerkung. Der Satz des Pappus enthält den des Pythagoras als einen besonderen Fall in sich. Macht man die Fig. 86 für das bei C rechtwinklige Dreieck und für Quadrate statt der Parallelogramme, so läßt sich der Satz des Pythagoras in neuer Art beweisen.

258) Zwei andere Verallgemeinerungen vom Satze des Pythagoras.

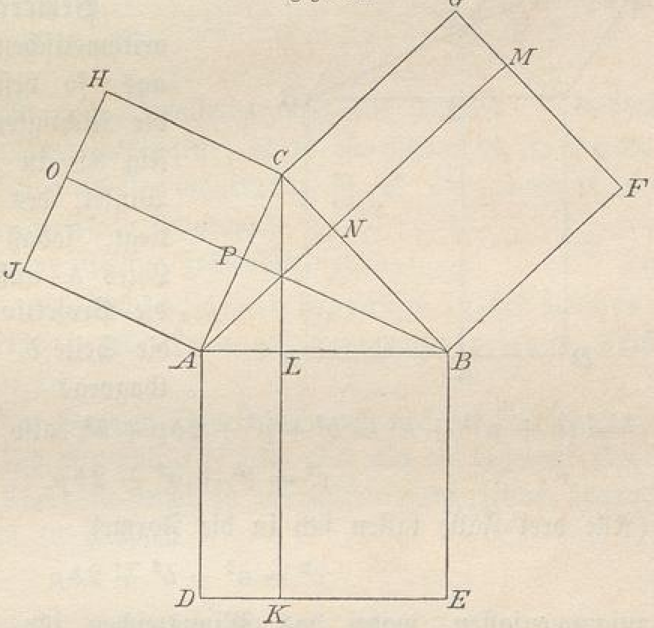
---

*) In der Arithmetik wird gezeigt, daß $(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ist. Beispiel: $(5-3)(5-3) = 25 - 15 - 15 + 9 = 4$. Probe $2 \cdot 2 = 4$.

a) Das Quadrat über einer Dreiecksseite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf diese. (Verallgemeinerter Pythagoreischer Lehrsatz.)

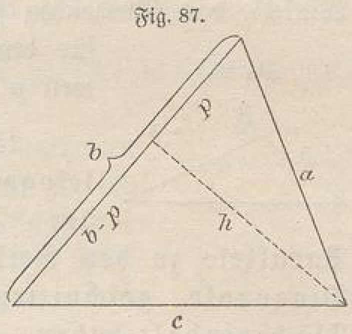
Beweis. Zeige an Fig. 86a (wie bei dem gewöhnlichen Pythagoreischen Lehrsatze), daß folgende Rechtecke gleich sind: $ADKL = APOJ$,*) $KEBL = FMNB$, $NMGC = CPOH$, daß also $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - (CPOH + NMGC)$, oder $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot CPOH$ ist. Hier ist aber $CPOH$ das Rechteck aus AC und der Projektion CP von CB auf CA. Ebenso ist $AB^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,CNMG$, wo CN die Projektion von AC auf BC ist.

Fig. 86 a.



Bemerkung. Setzt man die obigen arithmetischen Schreibweisen voraus, so läßt sich die Richtigkeit des Satzes an Fig. 87 bestätigen, wo c einem spitzen Winkel gegenüberliegt und die zu b gehörige Höhe h gezeichnet ist, sodaß man p als die Projektion von a auf b zu betrachten hat. Nach Pythagoras ist
$c^2 = (b-p)^2 + h^2 = b^2 + p^2 - 2bp + h^2$.
Setzt man dabei $p^2 + h^2 = a^2$, so erhält man $c^2 = b^2 + a^2 - 2bp$.

Fig. 87.



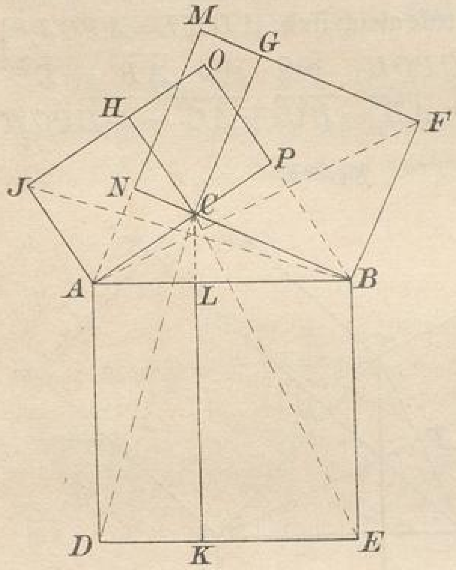
b) Das Quadrat über einer Dreiecksseite, die einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate

*) Ziehe die Hilfslinien JB und CD, für die anderen Rechtecke entsprechende Hilfslinien.

über den beiden anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf diese.

Beweis. Zeige an Fig. 88 (wie an Fig. 86a), daß die mit denselben Buchstaben bezeichneten Rechtecke gleich sind, wie beim Falle a). Da jedoch hier die Quadrate über AC und BC vergrößert werden, so erhält man statt des Obigen $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + (CPOH + NMGC) = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot CPOH.$

Fig. 88.



Bemerkung. Setzt man die arithmetischen Schreibweisen voraus, so bestätigt sich auch hier die Richtigkeit des Satzes an der Fig. 89, in der c dem stumpfen Winkel des Dreiecks gegenüber liegt, sodaß der Fußpunkt des Lotes h außerhalb fällt, ebenso die Projektion p der Seite a auf die Seite b. Hier wird nach Pythagoras

$c^2 = (b + p)^2 + h^2 = b^2 + p^2 + 2bp + h^2$, also, da $p^2 + h^2 = a^2$ ist,

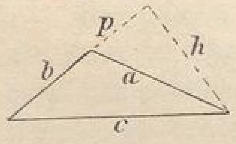
$$c^2 = b^2 + a^2 + 2bp.$$

(Alle drei Fälle lassen sich in die Formel

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bp$$

zusammenfassen, wobei das Minuszeichen für den Fall des spitzen Winkels, das Pluszeichen für den des stumpfen Winkels gilt, während für den rechten Winkel das letzte Glied wegfällt, weil $p = 0$ wird.)

Fig. 89.

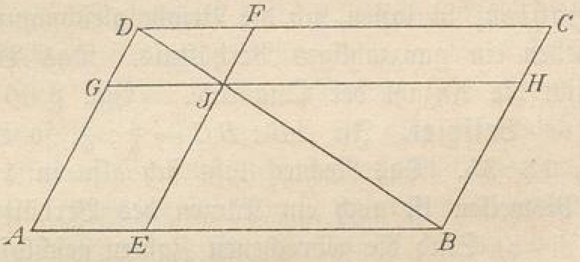


259) Satz von den Ergänzungsparallelogrammen. Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten, so entstehen zwei nicht von der Diagonale geschnittene Parallelogramme, die gleichen Flächeninhalt haben.

Beweis. In Fig. 90 sei $ABCD$ das Parallelogramm und J der Punkt der Diagonale, durch den EF und GH, die Parallelen zu den Seiten, gehen. Hier ist $\triangle ABD = \triangle BCD$. Vom ersten

Dreiecke ziehe man $\triangle BEJ$, von dem anderen das gleiche Dreieck BHJ ab, sodann von dem ersten noch $\triangle DGJ$, vom anderen das gleiche Dreieck DEJ, dann müssen von jedem der großen Dreiecke flächengleiche Stücke übrig bleiben, sodaß ▱ $AEJG$ = ▱ $JHCF$ ist. [Man nennt die beiden Parallelogramme Ergänzungsparallelogramme, weil sie nötig sind, um die beiden von der Diagonale geschnittenen Parallelogramme zum ganzen Parallelogramm $ABCD$ zu ergänzen.]

Fig. 90.



Bemerkung. Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so erhält man flächengleiche Ergänzungsrechtecke; ist es ein Rhombus, so werden die Ergänzungsparallelogramme kongruent; ist es ein Quadrat, so werden die Ergänzungsrechtecke kongruent.

Der Satz führt zur Lösung folgender

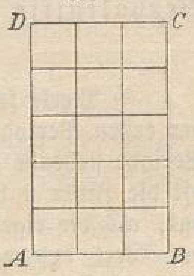
Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein flächengleiches mit denselben Winkeln zu verwandeln, von dem eine Seite gegeben ist.

Man betrachte das gegebene Parallelogramm als das Ergänzungsparallelogramm der Fig. 90 und JH oder JF als die gegebene Seite des gesuchten. Die Figur ist leicht zu vervollständigen, jedoch braucht man nicht alle Linien zu zeichnen.

e) Längen- und Flächenberechnungen an geradlinigen Gebilden.

260) Zerlegung des Rechtecks in gleiche Quadrate und Formel für die Rechtecksfläche.

Fig. 91.



a) Hat ein Rechteck Seiten, die sich verhalten wie zwei ganze Zahlen m und n, so läßt es sich insoviel Quadrate zerlegen, wie das Produkt der Zahlen angibt, also in $m \cdot n$ Quadrate. (Vgl. § 63 des Vorkursus.) Man nehme dabei an, daß m und n keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Das Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Teilers gehört in die Arithmetik.

Beispiel. Ist $AB:BC = 3:5$, so handelt es sich um $3 \cdot 5 = 15$

Quadrate. Dasselbe gilt für die Verhältnisse 6 : 10, 9 : 15 usw. Man verlangt stets die möglichst kleine Anzahl von Quadraten. (Fig. 91.)

Es fragt sich jedoch, ob die Einteilung in Quadrate auch für nicht ganze Zahlen möglich ist.

b) Verhalten sich die Rechtecksseiten wie zwei gebrochene Zahlen, so lassen sich die Brüche gleichnamig machen, und die Zähler geben ein ganzzahliges Verhältnis. Das Produkt der neuen Zahlen gibt die Anzahl der Quadrate. (Vgl. § 66 des Vorkursus.)

Beispiel. Ist $AB : BC = \frac{3}{5} : \frac{7}{6}$, so ist auch $AB : BC = \frac{18}{30} : \frac{35}{30} = 18 : 35$. Das Rechteck läßt sich also in $18 \cdot 35$ Quadrate einteilen. (Bisweilen ist noch ein Kürzen des Verhältnisses möglich.)

c) Sind die gebrochenen Zahlen geschlossene Dezimalbrüche, so ist das ganzzahlige Verhältnis leicht zu finden; z. B. $AB : BC = 1{,}23 : 2{,}156$ gibt $1230 : 2156$. Es kann noch in $615 : 1078$ gekürzt werden. Die Anzahl der Quadrate ist $615 \cdot 1078$.

d) Verhalten sich die Rechtecksseiten so, daß im Verhältnisse ein oder zwei endlose periodische Dezimalbrüche vorkommen, so verwandelt man diese in gewöhnliche Brüche und verfährt wie vorher.

Beispiel. Das Verhältnis sei $2 : 5{,}23\,8154\,8154\,8154 \ldots$.

Man setze den Dezimalbruch gleich x, sodaß

$$1\,000\,000x = 5\,23\,8154{,}8154\,8154 \ldots\ldots, \text{ und}$$

$$100x = 523{,}8154\,8154 \ldots\ldots,$$ also durch beiderseitige Subtraktion

$$999\,900x = 5\,237\,631{,}0000\,0000 \ldots\ldots,$$ und demnach der Dezimalbruch $x = \frac{5\,237\,631}{999\,900}$ ist.*) Jetzt ist das Verhältnis der Rechtecksseiten $2 : \frac{5\,237\,631}{999\,900}$, oder $1\,999\,800 : 5\,237\,631$. Die Anzahl der Quadrate ist demnach das Produkt der beiden letzten Zahlen. Dabei sei vorausgesetzt, daß Kürzungen nicht mehr möglich sind.

In allen diesen Fällen war das Verhältnis in ein ganzzahliges zu verwandeln, und die Quadratteilung war theoretisch möglich. Solche Verhältnisse nennt man rationale Verhältnisse. Die Seite des gefundenen Quadrates heißt das ge-

*) Merke folgende kurzgefaßte Regel: Schreibe die Zahl bis zum Schluß der ersten Periode als ganze Zahl hin, ziehe von ihr ab die vor der ersten Periode stehende Zahl, und dividiere den Rest durch eine Zahl, die vorn so oft die Ziffer 9 hat, als die Periode Stellen zählt, und hinten soviel Nullen hat, als die eigentliche Vorperiode Stellen zählt. Der entstehende Bruch ist der Wert des periodischen Dezimalbruchs in gewöhnlicher Bruchform und kann häufig noch gekürzt werden. Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens ergibt sich aus dem obigen Beispiele.

meinschaftliche Maß der beiden Rechtecksseiten. Sind die möglichen Kürzungen durchgeführt, so handelt es sich um das größte gemeinschaftliche Maß.

[e) Unmöglich wird die Einteilung des Rechtecks in kleine Quadrate, sobald das Verhältnis kein rationales, also ein irrationales ist. Dies findet z. B. statt, wenn die eine Zahl eine ganze, die andere ein endloser Dezimalbruch ohne Periode, d. h. eine Irrationalzahl ist. Solche sind z. B. die Quadratwurzeln aus den Primzahlen, die Kubikwurzeln usw. aus solchen und die durch Multiplikation mit ganzen Zahlen aus diesen Irrationalzahlen entstehenden. Es gibt aber noch Irrationalzahlen, die nicht mit der Wurzelausziehung zusammenhängen. Eine solche ist z. B. die mit dem Kreisumfange zusammenhängende Zahl $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$ Der Nachweis dafür, daß eine Zahl der letzteren Gruppe eine Irrationalzahl ist, läßt sich nur schwierig führen und geht über den Standpunkt der Klasse hinaus. Man kann π als einen Dezimalbruch mit unendlich langer Periode, aber auch als Dezimalbruch mit unendlich langer Vorperiode betrachten. Im ersteren Falle kann man daher $\pi = \frac{314\,159\,265\cdots}{99\,999\,999\cdots}$ setzen, was einen Bruch gibt, der im Zähler und im Nenner unendlich viele Stellen hat. Denkt man sich die letzte (unendlich fern liegende) 9 gestrichen, so erhält man als gleichwertig $\pi = \frac{314\,195\,265\cdots}{100\,000\,000\cdots}$. Auch hier sind Zähler und Nenner bis ins Unendliche fortzusetzen. Ein irrationales Verhältnis kann also nicht als Verhältnis zweier endlicher ganzen Zahlen dargestellt werden

Stehen demnach die Seiten eines Rechtecks in einem irrationalen Verhältnis, so müßte jede Seite in unendlich viele unendlich kleine Teile zerlegt werden, wenn man eine Einteilung in kleine Quadrate erzielen wollte, die Quadrate würden unendlich klein und unendlich zahlreich werden. Die beiden Seiten haben also kein gemeinschaftliches Maß von endlicher Größe, man nennt sie daher inkommensurabel. So sind z. B. zwei Gerade von den Längen 1 und $\sqrt{2}$ inkommensurabel.

In solchen Fällen begnügt man sich im praktischen Leben mit Annäherungswerten. Entweder beschränkt man den Dezimalbruch auf eine endliche Anzahl von Stellen, was z. B. bei $1:\pi$ auf $100:314$, oder auf $1\,000\,000 : 3\,141\,593$, oder auf $1\,000\,000\,000 : 3\,141\,592\,654$ usw. führt. Oder man sucht Näherungswerte, wie $\frac{22}{7} = 3{,}142\,857\ldots$, was allerdings zu groß ist, oder wie $\frac{355}{113} = 3{,}141\,592\,9\ldots$, was nur sehr wenig abweicht. Der Wert $\frac{22}{7}$ war schon dem Archimedes bekannt. Zur Aufsuchung des zweiten und anderer Näherungswerte gibt die Arithmetik geeignete Methoden an.]

f) Als Flächenmaß kann man ein Quadrat von beliebiger Seitenlänge wählen. Im praktischen Leben wählt man die Seitenlänge als eine der Längeneinheiten des metrischen Systems. Quadrate von 1, 2, 3, 4, ... cm Seitenlänge haben dabei Flächen von $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$, ... qcm oder $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$, ... qcm oder cm^2. Ein Quadrat von vierfacher Fläche erhält man durch geeignetes Anlegen von drei Quadraten derselben Größe, ein Quadrat von neunfacher Fläche durch geeignetes Anlegen von noch fünf solchen Quadraten an das vorige usw. So ergibt sich folgende Tabelle der Quadratzahlen:

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 1 + 3 \\
3^2 &= 1 + 3 + 5 \\
4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\
5^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

sodaß jede Quadratzahl gleich einer Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen ist. Die Arithmetik lehrt, daß, wenn n eine beliebige ungerade Zahl ist, $1+3+5+\cdots+n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ist, was an der Tabelle auf die Richtigkeit erprobt werden kann. (Darüber und über die Anwendungen vergleiche man den Vorkursus § 58 bis § 61.)

g) Ist das Rechteck in kleine Quadrate zerlegt, sodaß z. B. die Grundlinie in 3, die Höhe in 5 gleiche Teile zerlegt ist, also $3 \cdot 5 = 15$ Quadrate vorhanden sind, und betrachtet man jedes Quadrat als Flächeneinheit, so handelt es sich um $3 \cdot 5 = 15$ Flächeneinheiten. Ist allgemeiner die Grundlinie des Rechtecks von der Länge b, die Höhe von der Länge h, beides in Zentimetern gegeben, so ist die Fläche gleich bh Quadratzentimetern, oder, wie man einfacher sagt,

$$F = bh.$$

Diese Formel*) gilt nach obigem auch für gebrochene Zahlen. Ist z. B. $b = 3\frac{1}{2}$ cm $= \frac{7}{2}$ cm, $h = 5\frac{2}{3}$ cm $= \frac{17}{3}$ cm, so mache man die Brüche gleichnamig, sodaß $b = \frac{21}{6}$ cm, $h = \frac{34}{6}$ cm ist. Jetzt teile

*) Da zu jedem Rechteck oder Parallelogramm, überhaupt zu jeder geradlinig begrenzten Fläche ein gleich großes Quadrat gehört, dessen Seite gleich f, dessen Fläche gleich f^2 sei, so wird statt F vielfach geschrieben f^2, sodaß die Formel lautet $f^2 = bh$. Dadurch wird angedeutet, daß es sich links, wie rechts, um einen Ausdruck zweiter Dimension handelt. Diese sehr zu empfehlende Schreibweise ist leider noch nicht allgemein geworden.

man b in 21, h in 34 gleiche Teile ein und konstruiere die zugehörigen $21 \cdot 34 = 714$ Quadrate von je $\frac{1}{6}$ cm Seitenlänge, also von $\frac{1}{36}$ qcm Fläche. Das ganze Rechteck hat also $\frac{714}{36}$ qcm $= \frac{21}{6} \cdot \frac{34}{6}$ qcm $= \frac{7}{2} \cdot \frac{17}{3}$ qcm $= bh$ Quadratzentimeter Fläche. Die Formel $F = bh$ gilt also auch für gebrochene **„Maßzahlen"** b und h, also auch für endliche Dezimalbrüche und für unendliche Dezimalbrüche mit Periode, also für rationales Verhältnis $b : h$.

[Für irrationales Verhältnis kann man sie ebenfalls als streng richtig beweisen, hier aber soll im Anschluß an e) nur gesagt werden, daß sie um so richtiger ist, je mehr Dezimalstellen man bei b und h berücksichtigt.]

261) Jedes Parallelogramm ist inhaltsgleich einem Rechteck von derselben Grundlinie b und derselben Höhe h. Sein Inhalt ist daher ebenfalls gegeben durch

$$F = bh.$$

262) a) Jedes Dreieck von der Grundlinie b und der Höhe h ist die Hälfte eines entsprechenden Parallelogramms bezw. Rechtecks. Die Inhaltsformel ist also

$$(1) \qquad F = \frac{bh}{2}.$$

b) Bezeichnet man die Dreiecksseiten als a, b, c, die zugehörigen Höhen als h_1, h_2, h_3, so folgt, daß $\frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2}$ oder $ah_1 = bh_2 = ch_3$ ist. Daraus aber folgt

$$(2) \qquad a : b = h_2 : h_1, \quad b : c = h_3 : h_2, \quad c : a = h_1 : h_3,$$

d. h. zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Höhen.

c) Statt der ersten dieser Proportionen kann man auch schreiben:

$$a : b = 1 : \frac{h_1}{h_2} \quad \text{oder} \quad a : b = \frac{h_1}{h_1} : \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2},$$

demnach lassen sich diese Proportionen in folgende gemeinschaftliche Formel zusammenfassen:

$$(3) \qquad a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3},$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die umgekehrten (reziproken) Werte der Höhen oder wie $h_2 h_3 : h_3 h_1 : h_1 h_2$.

d) Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, und ist ϱ der Radius des In-Kreises, so ergibt sich eine weitere Flächenformel. Verbindet man nämlich in Fig. 65 den Mittelpunkt M des Kreises mit den

Ecken A, B, C des Dreiecks und mit den Berührungspunkten, so wird $\triangle AMB = \frac{a\varrho}{2}$, $\triangle BMC = \frac{b\varrho}{2}$, $\triangle CMA = \frac{c\varrho}{2}$, der Gesamtinhalt wird also $\frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} = \frac{(a+b+c)\varrho}{2}$, wofür man, da $a + b + c$ gleich dem Umfange u ist, auch schreiben kann $F = \frac{u\varrho}{2}$. Der Ausdruck $\frac{a+b+c}{2}$ war aber dort mit p bezeichnet, also ist der Dreiecksinhalt auch

$$F = \frac{a+b+c}{2}\varrho = \frac{u}{2}\varrho = p\varrho. \tag{4}$$

(In Worten?)

e) Verbindet man in Fig. 66 den Mittelpunkt M_1 des die Seite berührenden An-Kreises, dessen Radius ϱ_1 sei, mit den Ecken des Dreiecks und den Berührungspunkten, so ist

$$\triangle ABC = \triangle BMC + \triangle CMA - \triangle BMC = \frac{b\varrho_1}{2} + \frac{c\varrho_1}{2} - \frac{a\varrho_1}{2}$$
$$= \frac{\varrho_1}{2}(b + c - a).$$

Der Ausdruck $\frac{b+c-a}{2}$ wurde aber dort mit p_1 bezeichnet, also ist

$$F = \frac{b+c-a}{2}\varrho_1 = p_1\varrho_1. \tag{5}$$

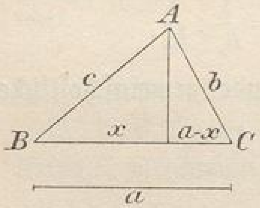
Ebenso ist es mit p_2, p_3, bezw. ϱ_2, ϱ_3. Man hat also die Gesamtformel

$$F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3 \tag{6}$$

oder

$$F = \frac{a+b+c}{2}\varrho = \frac{-a+b+c}{2}\varrho_1 = \frac{a-b+c}{2}\varrho_2 \tag{6)*}$$
$$= \frac{a+b-c}{2}\varrho_3.$$

Fig. 92.



f) Daraus ergibt sich noch eine andere Formel:*) Fig. 92 stellt ein Dreieck mit der Höhe $h_1 = AD$ dar.**) Diese soll aus den Seiten a, b, c berechnet werden. Man setze $BD = x$, also $DC = a - x$ dann ist nach Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken

---

*) Der Abschnitt f) kann vorläufig zurückgestellt werden, wenn die Lehre von den Quadratwurzeln noch nicht besprochen ist.

**) D ist in die Zeichnung einzutragen.

$$x^2 = c^2 - h_1^2$$
$$(a - x)^2 = b^2 - h_1^2$$

oder

$$a^2 + x^2 - 2ax = b^2 - h_1^2.$$

Setzt man hier den Wert von x^2 aus der ersten Gleichung ein, so folgt

$$a^2 + c^2 - h_1^2 - 2ax = b^2 - h_1^2,$$

oder, wenn man h_1^2 beiderseits streicht,

$$a^2 + c^2 - 2ax = b^2.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Dies setze man ein in die erste Gleichung, die sich auch schreiben läßt als

$$h_1^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)^{*)}$$
$$= \left[c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right] \cdot \left[c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right].$$

Macht man die Ausdrücke in jeder Klammer gleichnamig, so erhält man

$$h_1^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$
$$= \frac{[(a + c)^2 - b^2] \cdot [b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}.$$

In jeder Klammer steht die Differenz zweier Quadrate, die sich wieder in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen läßt, und so folgt

$$h_1^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)^{*)}}{4a^2}$$

oder

$$h_1^2 = \frac{16}{4a^2} \cdot \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} = \frac{4}{a^2} p p_1 p_2 p_3.$$

Demnach ist die Höhe h_1

7) $$h_1 = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}}$$
$$= \frac{2}{a}\sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Ebenso ist

$$h_2 = \frac{2}{b}\sqrt{p p_1 p_2 p_3}, \quad h_3 = \frac{2}{c}\sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Schafft man in Gleichung (7) $\frac{2}{a}$ nach links, so steht dort $\frac{a h_1}{2} = F$,

*) Summe mal Differenz zweier Zahlen gibt die Differenz ihrer Quadrate.

also die Fläche des Dreiecks. So erhält man die berühmte Heronische Formel für den Inhalt des Dreiecks:

$$(8)\qquad F=\sqrt{pp_1p_2p_3}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Vergleicht man diese mit

$$F=p\varrho=p_1\varrho_1=p_2\varrho_2=p_3\varrho_3,$$

so findet man zunächst

$$p\varrho=\sqrt{pp_1p_2p_3} \text{ oder } \varrho=\frac{1}{p}\sqrt{pp_1p_2p_3}=\sqrt{\frac{pp_1p_2p_3}{p^2}}=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}.$$

In ähnlicher Weise sind die anderen Formeln zu behandeln. Im ganzen ergibt sich

$$(9)\quad \varrho=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}},\ \varrho_1=\sqrt{\frac{pp_2p_3}{p_1}},\ \varrho_2=\sqrt{\frac{pp_1p_3}{p_2}},\ \varrho_3=\sqrt{\frac{pp_1p_2}{p_3}},$$

wo für die p die aus den Seiten hergestellten Ausdrücke $\frac{a+b+c}{2}$ usw. eingesetzt werden können. Man halte dabei fest, daß nach den Fig. 65 und 66 p den halben Umfang des Dreiecks, p_1, p_2, p_3 einfache Tangentenlängen bedeuten.

Bemerkung. Bildet man aus (9) das Produkt der vier Radien und kürzt man den entstehenden Bruch, so läßt sich die Wurzel ausziehen und es entsteht

$$\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3=pp_1p_2p_3=F^2$$

oder

$$(10)\qquad F=\sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}=\sqrt{pp_1p_2p_3},$$

sodaß sich die Fläche des Dreiecks auch aus den Radien der Berührungskreise berechnen läßt und das Produkt der Radien gleich dem Produkte der p ist. — Noch andere Formeln lassen sich durch Multiplikation und Division finden, z. B. $\varrho\varrho_1=p_2p_3$, $\frac{\varrho}{\varrho_1}=\frac{p_1}{p}$ usw. Ferner ist nach (7)

$$h_1h_2h_3=\frac{8}{abc}\sqrt{(pp_1p_2p_3)^3}=\frac{8}{abc}\sqrt{(\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3)^3}=\frac{8}{abc}F^3,$$

sodaß z. B.

$$F=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{abch_1h_2h_3} \text{ ist.}$$

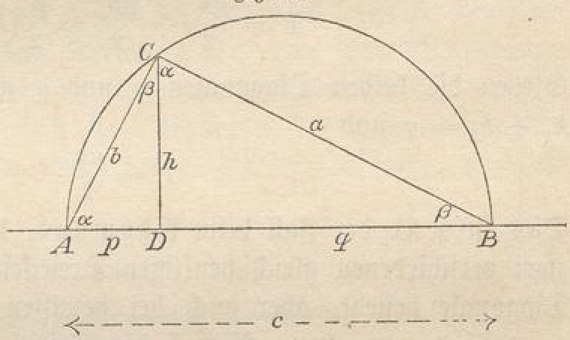
Die Heronische Formel soll in der Ähnlichkeitslehre kürzer abgeleitet werden. Sie bedeutet einen großen Fortschritt in der Lehre vom Dreieck.

263) **Eine Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks.** Fällt man von einem beliebigen Punkte P innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks Lote l_1, l_2, l_3 auf dessen Seiten und verbindet man P mit den Ecken des Dreiecks, so ist die Fläche des Dreiecks $F = \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CAP = \frac{al_1}{2} + \frac{al_2}{2} + \frac{al_3}{2} = \frac{a}{2}(l_1 + l_2 + l_3)$. Also ist $l_1 + l_2 + l_3 = \frac{2F}{a} = h$. Folglich gilt der Satz:

Die Summe der von einem beliebigen Punkte innerhalb des gleichseitigen Dreiecks auf dessen Seite gefällten Lote ist konstant und zwar gleich der Höhe des Dreiecks.

Liegt der Punkt P außerhalb des Dreiecks, so ist entweder eins der Lote, oder es sind zwei solche von außen her auf die Dreieckseiten zu fällen. Dann bleibt der Satz bestehen, sobald man diese Lote als negativ auffaßt. (Man versuche den Satz auch ohne Rechnung, d. h. rein geometrisch zu beweisen.)

Fig. 93.



264) **Eine Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks.** Fig. 93 stelle ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe h (auf der Hypotenuse) dar. Die Abschnitte der Hypotenuse bezeichne man mit p und q. Dabei ist

$$h^2 = a^2 - q^2,$$

$$h^2 = b^2 - p^2,$$

also durch beiderseitige Addition

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2 = c^2 - p^2 - q^2$$

oder, da $c = p + q$ ist,

$$2h^2 = (p+q)^2 - (p^2 + q^2) = p^2 + q^2 + 2pq - (p^2 + q^2) = 2pq.$$

Daraus folgt $h^2 = pq$, d. h.:

Das Produkt aus den Abschnitten der Hypotenuse ist gleich dem Quadrate der Höhe.

Aus $h \cdot h = p \cdot q$ folgt $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ oder $p : h = h : q$. Daher nennt man h die mittlere Proportionale zu p und q. Diese kann daher konstruiert werden, indem man p und q aneinanderlegt, darüber einen Halbkreis zeichnet und im Teilpunkte ein bis zum Kreise reichendes

Lot errichtet. Eine Proportion, in der das zweite und dritte Glied übereinstimmen, nennt man eine stetige Proportion.

In Fig. 82 war das Quadrat über BC gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte der letzteren. In der Bezeichnungsweise der Fig. 93 folgt also $a^2 = q \cdot c$ und $b^2 = p \cdot c$. Demnach ist a mittlere Proportionale zu p und c; ebenso ist b mittlere Proportionale zu p und c. Dies gibt eine neue Konstruktion der mittleren Proportionale zweier Geraden. (Welche?)

(In der Ähnlichkeitslehre ergeben sich diese Sätze in sehr einfacher Weise.)

265) Das allgemeine Viereck gewöhnlicher Art läßt sich durch jede Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Seine Fläche läßt sich z. B. berechnen, wenn die Diagonale $BD = p$ und die von A und C auf diese gefällten Lote h_1 und h_3 bekannt sind. Dann ist

$$F = \frac{ph_1}{2} + \frac{ph_3}{2} = \frac{p}{2}(h_1 + h_3).$$

Stehen die beiden Diagonalen p und q aufeinander senkrecht, so ist $h_1 + h_3 = q$ und

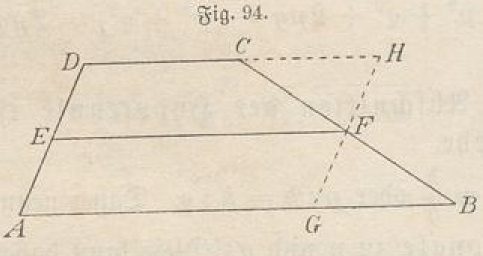
$$F = \frac{pq}{2}.$$

Dies ist z. B. der Fall beim Rhombus, beim Deltoid, welches aus zwei verschiedenen gleichschenkligen Dreiecken über bezw. unter derselben Diagonale besteht, aber auch bei gewissen unsymmetrischen Vierecken.

Sind von einem Viereck die Seiten a, b, c, d und die eine Diagonale gegeben, so läßt sich jedes durch die letztere abgeschnittene Dreieck nach der Heronischen Dreiecksformel berechnen, also ist auch die Viereckfläche bekannt.

266) Über das Trapez, bei dem ein paralleles Seitenpaar vorhanden ist, muß für die Flächenberechnung folgendes als bekannt vorausgesetzt werden: Halbiert man in einem Trapez die nicht parallelen Seiten, und zieht man die Verbindungslinie der Halbierungspunkte, so ist diese zu dem anderen Seitenpaare parallel und gleich der halben Summe dieser Seiten.

Fig. 94.



Beweis. In Fig. 94 sei $ABCD$ das Trapez, E und F seien die Halbierungspunkte der nicht parallelen Seiten AD und BC. Man lege durch F eine Parallele GH zu AD von der einen Parallelen bis zur Verlängerung der anderen, dann ist $\triangle FBG \cong \triangle FCH$ (zweiter Kongruenzsatz), also $GF = FH$ und somit EF Mittellinie des Parallelogramms $AGHD$. Daraus folgt $EF \# AG \# DH$. Ferner ist

$$EF = DC + CH,$$

und zugleich

$$EF = AB - GB,$$

folglich durch beiderseitige Addition $2EF = AB + DC + (CH - GB)$, oder, da $CH - GB = 0$ ist, $2\,EF = AB + DC$

und
$$EF = \frac{AB + DC}{2}.$$

Man nennt $\frac{AB + DC}{2}$ das arithmetische Mittel der beiden Grundlinien AB und DC oder auch die mittlere Grundlinie. Sind $AB = a$, $DC = b$ und die Höhe h (der Abstand der beiden Parallelen) bekannt, so ist die Fläche des Trapezes leicht zu berechnen. Denkt man sich nämlich das Dreieck FHC von Parallelogrammen abgeschnitten und in der Form des kongruenten Dreiecks FGB an FG angelegt, so erkennt man, daß das Trapez $ABCD$ dem Parallelogramm flächengleich ist. Da aber $AG = EF$ ist, so folgt als Fläche für beide Figuren

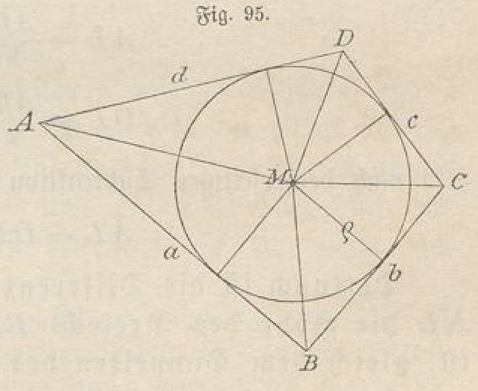
$$F = \frac{a + b}{2} h.$$

Die Trapezfläche ist also gleich dem Produkte aus der mittleren Grundlinie und der Höhe.

Zu den Trapezen gehört ein gegen die Mittellinie symmetrisches, das Antiparallelogramm oder gleichschenklige Trapez.

267) Das gewöhnliche Tangentenviereck. Hat das Tangentenviereck den Umfang $u = a + b + c + d$, wobei $a + c = b + d = \frac{u}{2}$ ist, und hat sein Inkreis den Radius ϱ, so läßt sich seine Fläche leicht berechnen. Denn es ist $\triangle AMB + \triangle BMC + \triangle CMD + \triangle DMA = \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} + \frac{d\varrho}{2}$, also ist die Gesamtfläche

Fig. 95.



$$F = \frac{\varrho}{2}(a + b + c + d) = \frac{\varrho}{2} u = \varrho(a + c) = \varrho(b + d).$$

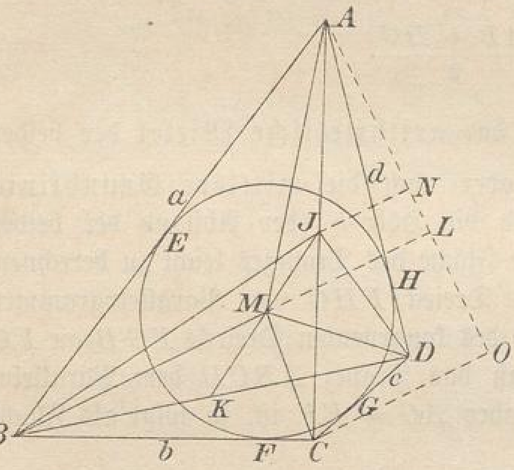
268) Eine merkwürdige Eigenschaft des Tangentenvierecks ergibt sich aus dem Verhalten der vier Teilvierecke.

In Fig. 96 ist

(1) $$\triangle AMB - \triangle CMB = \frac{a\varrho}{2} - \frac{b\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(a-b),$$

(2) $$\triangle AMD - \triangle CMD = \frac{d\varrho}{2} - \frac{c\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(d-c).$$

Fig. 96.



Aus $a + c = b + d$ folgt aber $a - b = d - c$, folglich stimmen beide Differenzen überein. (Vgl. Nr. 286.)

Ist nun J der Halbierungspunkt der Diagonale AC, so wird behauptet, daß die Differenz (1) das Doppelte vom Dreieck BMJ sei.

Fällt man nämlich von A aus ein Lot AL auf die Verlängerung von BM, so ist $\triangle ABM = \frac{BM \cdot AL}{2}$. Fällt man von C ein Lot CO auf AL, so ist OL die Höhe des Dreiecks BMC für die Grundlinie BM, also $\triangle BMC = \frac{BM \cdot OL}{2}$. Die Differenz (1) ist also gleich $\frac{BM \cdot AL}{2} - \frac{BM \cdot OL}{2} = \frac{BM(AL - OL)}{2}$. Fällt man von J aus ein Lot JN auf AO, so ist $AN = \frac{AO}{2}$, also

$$AL = \frac{AO}{2} + NL,$$

$$OL = \frac{AO}{2} - NL,$$

also nach beiderseitiger Subtraktion

$$AL - OL = 2\,NL.$$

Demnach ist die Differenz (1) gleich $BM \cdot NL$, oder, da NL die Höhe des Dreiecks BMJ für die Grundlinie BM ist, gleich dem Doppelten des Dreiecks BMJ.

Ganz ebenso läßt sich mit Hilfe der entsprechenden Hilfslinien beweisen, daß die Differenz (2) gleich dem Doppelten des

Dreiecks DMJ ist. Da aber beide Differenzen übereinstimmen, so folgt, daß

(3) $$\triangle BMJ = \triangle DMJ \text{ ist.}$$

Ist nun K die Mitte der Diagonale BD, so ist auch $\triangle BKM = \triangle DKM$. Wäre also JMK eine gebrochene Linie, so würde Viereck $BKMJ$ = Viereck $DKMJ$ sein. Zieht man aber die Gerade KJ, so ist auch $\triangle BKJ = \triangle DKJ$. Folglich muß M auf JK liegen. (Läge nämlich M rechts vor KJ, so würde $BKMJ > DKMJ$ sein, läge es links von JK, so würde es kleiner als dieses sein.) Oder: $\triangle JMK$ hat den Inhalt Null, demnach liegen J, K und M auf einer Geraden.

Folglich gilt der Satz:

Die Verbindungslinie der Diagonalenmitten eines Tangentenvierecks geht stets durch den Mittelpunkt des In-Kreises.*)

Bemerkungen. a) Ist der Winkel bei D ein solcher von 180^0, so wird das Tangentenviereck zum Tangentendreieck und D wird Berührungspunkt des In-Kreises. Jetzt wird J der Halbierungspunkt der Dreiecksseite AC. Daraus folgt:

Die Mitte der Berührungstransversale (BD) eines Dreiecks und die Mitte der zugehörigen Dreiecksseite (AC) haben eine Verbindungslinie, die durch den Mittelpunkt des In-Kreises geht. Dort also schneiden einander die drei entsprechenden Verbindungslinien für das ganze Dreieck.

b) Bezeichnet man die vier Teildreiecke AMB, BMC, CMD, DMA des Tangentenvierecks als J_1, J_2, J_3, J_4, so folgt aus ihren Inhaltsformeln $J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = a : b : c : d$. Aus der obigen Formel $J_1 - J_2 = J_4 - J_3$ folgt noch $J_1 + J_3 = J_2 + J_4$. Man beweise noch, daß $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = 180^0$ ist, ebenso $\sphericalangle BMC + \sphericalangle DMA = 180^0$. (Vgl. Nr. 286.)

c) Verlängert man die Gegenseiten a und c, ebenso b und d bis zum Durchschnitte P bezw. Q, so hat man in der Figur $APCQ$ ein Viereck mit einspringendem Winkel, in $BPDQ$ ein überschlagenes Viereck. Bei dem ersteren sind AC und PQ Diagonalen, bei dem anderen PD und PQ. Beiden ist der Kreis M ein- bezw. an-

*) Dies scheint der einfachste Elementarbeweis dieses Satzes zu sein. In Teil III, 2. Auflage dieses Lehrbuchs ist ein umständlicherer Nachweis geliefert. Der Satz ist ein Sonderfall eines Satzes von Gauß über die drei Diagonalenmitten des vollständigen Vierseits und über die Mittelpunkte der einem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte. (Vgl. Teil III.)

beschrieben. Man versuche ebenso zu zeigen, daß die Halbierungspunkte aller drei Diagonalen AC, BD und PQ auf der durch M gehenden Geraden JK liegen. (Gaußsche Gerade.)

269) Flächen der drei Arten anbeschriebener Tangentenvierecke.

a) Für das Tangentenviereck mit einspringendem Winkel (bei D) ist $F = \triangle AMB + \triangle BMC - \triangle CMD - \triangle DMA = a\frac{\varrho}{2} + b\frac{\varrho}{2} - c\frac{\varrho}{2} - d\frac{\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(a + b - c - d)$. (Vgl. Fig. 97.)

b) Das überschlagene Tangentenviereck $ABCD$ hat keinen Inhalt im gewöhnlichen Sinne. Man versteht unter seinem Inhalte den

Fig. 98.

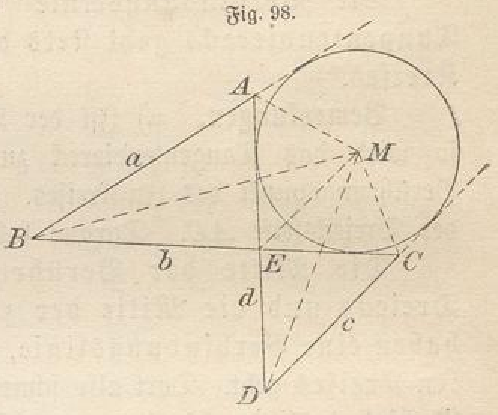
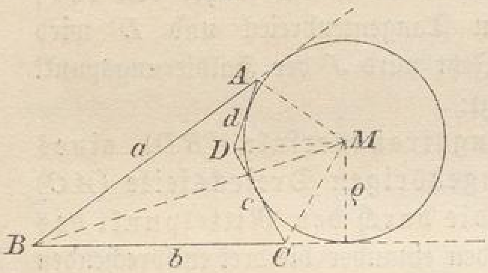


Fig. 97.



Unterschied der Dreiecke ABE und CDE. (Die Fläche des einen Dreiecks wird gewissermaßen als negativ aufgefaßt.) Dann ist wieder $F = \triangle AMB + \triangle BMC - \triangle CMD - \triangle AMD = \frac{\varrho}{2}(a + b - c - d) = \triangle ABE - \triangle CDE$. (Vgl. Fig. 98.)

c) Auch für die dritte Art von Tangentenvierecken, bei der keine Seite unmittelbar berührt, gilt die genannte Flächenformel. (Vgl. Fig. 72.)

370) Die Fläche jedes einem Kreise umbeschriebenen Vielecks gewöhnlicher Art ist

$$F = \frac{\varrho}{2}(a + b + c + d + \cdots) = \frac{\varrho}{2} u.$$

Verbindet man die Ecken eines allgemeinen konvexen Vielecks (n-Ecks) mit einem Punkte P seines Innern, so zerlegt man es in n Dreiecke. Sind a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$ die Seiten, h_1, h_2, $h_3, \ldots, h_n$ die zugehörigen Höhen der Dreiecke, so ist die Fläche

$$F = \tfrac{1}{2}[a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \cdots + a_n h_n].$$

271) Bemerkungen über Pythagoreische Zahlen.

Im Vorkursus § 72 wurde eine Reihe von Gruppen ganzer Zahlen zu je dreien angegeben, von denen jede den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechen konnte. Diese Pythagoreischen Zahlen sollen hier wiederholt und ergänzt werden.

3, 4, 5	16, 63, 65	27, 364, 365	36, 77, 85
5, 12, 13	17, 144, 145	28, 45, 53	36, 323, 325
7, 24, 25	19, 180, 181	28, 195, 197	37, 684, 685
8, 15, 17	20, 21, 29	29, 420, 421	39, 80, 89
9, 40, 41	20, 99, 101	31, 480, 481	39, 760, 761
11, 60, 61	21, 220, 221	32, 255, 257	40, 399, 401
12, 35, 37	23, 264, 265	33, 56, 65	41, 840, 841
13, 84, 85	24, 143, 145	33, 544, 545	43, 924, 925
15, 112, 113	25, 312, 313	35, 612, 613	44, 117, 125
			44, 483, 485

Multipliziert man die Zahlen einer solchen Gruppe mit einer beliebigen ganzen Zahl, so erhält man wieder eine solche Gruppe, die aber nichts neues bietet. Nur unabhängige Pythagoreische Zahlen sind hier bis zur Zahl 44 für die kleinste Seite angegeben.

Die im Vorkursus angegebene vorläufige Regel, für jede beliebige Zahl $n\,(> 5)$ zwei zugehörige größere zu finden, wird jetzt verständlich sein.

a) Ist n ungerade, so setze man in $p^2 - q^2 = n^2$ die Zahl $p = q + 1$. Dann wird $(q+1)^2 - q^2 = n^2$ oder $2q + 1 = n^2$, d. h. $q = \frac{n^2 - 1}{2}$, $p = \frac{n^2 - 1}{2} + 1 = \frac{n^2 - 1 + 2}{2} = \frac{n^2 + 1}{2}$. Die Lösung gibt also die Zahlengruppe n, $\frac{n^2 - 1}{2}$, $\frac{n^2 + 1}{2}$.

b) Ist n gerade, so setze man in $p^2 - q^2 = n^2$ die Zahl $p = q + 2$. Dann wird $(q+2)^2 - q^2 = n^2$ oder $4q + 4 = n^2$, d. h. $q = \frac{n^2 - 4}{4}$, $p = \frac{n^2 - 4}{4} + 2 = \frac{n^2 + 4}{4}$. Die Lösung ist also n, $\frac{n^2 - 4}{4}$, $\frac{n^2 + 4}{4}$.

Man findet aber dabei nicht sämtliche unabhängigen Pythagoreischen Zahlen, sondern nur solche Gruppen, bei denen die beiden größeren Zahlen nur um 1 oder 2 voneinander unterschieden sind. (Beispiele findet man im Vorkursus.) Eine allgemeinere Lösung gibt folgendes:

c) Sind a und b beliebig gegebene ganze Zahlen und ist dabei $a > b$, so ist leicht zu zeigen, daß die Zahlen

$$(a^2 - b^2), \quad (2ab), \quad (a^2 + b^2)$$

eine Gruppe Pythagoreischer Zahlen sind. Es ist nämlich:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

weil

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$$

ist.

Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 1$, so findet man $a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$, $2ab = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, $a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$, also die erste Gruppe 3, 4, 5.

Setzt man $a = 3$, $b = 1$, so folgt $a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$, $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$, $a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10$, also die Gruppe 6, 8, 10, die aber nichts neues gibt, da sie aus der ersten durch Multiplikation mit 2 hervorgeht.

Setzt man $a = 3$, $b = 2$, so folgt $a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, $a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$, also die Gruppe 5, 12, 13. Ebenso kann man der Reihe nach $a = 4$, $b = 1$, oder $a = 4$, $b = 2$, oder $a = 4$, $b = 3$ setzen. Das erste gibt die Gruppe 8, 15, 17, das dritte die Gruppe 7, 24, 25. Das zweite gibt nichts neues, da 12, 16, 20 aus der ersten Gruppe durch Multiplikation mit 3 hervorgeht.

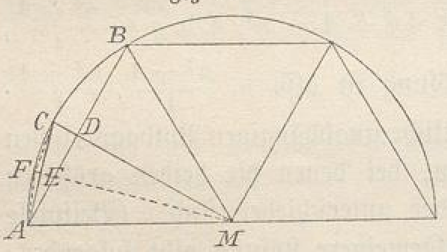
Auf diese Weise findet man sämtliche Pythagoreischen Zahlen bis zu einer beliebigen Anfangszahl a hin.

[Damit ist eine wichtige Gruppe von unbestimmten Gleichungen zweiten Grades (Diophantische Gleichungen zweiten Grades) von der Form $x^2 + y^2 = n^2$, wo x, y und n ganze Zahlen sein sollen, ohne besondere Vorkenntnisse zur Lösung gebracht.]

[272) Vorläufige Methode, die Zahl π mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes bis auf 6 Stellen Genauigkeit zu berechnen.*)

Auflösung. In Fig. 99 sei der Radius des Halbkreises gleich 1. Da sich der Radius dreimal als Sehne eintragen läßt, ist zunächst die Halbkreislinie größer als **3.**

Fig. 99.



Man halbiere den Bogen AB in C. Dann ist $AD = \frac{1}{2}$, $AM = 1$, folglich $MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich ist $CD = MC - MD = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich ist die Seite des regelmäßigen 12-Ecks

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(1 + \tfrac{3}{4} - 2\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)}$$
$$= \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

*) In der Ähnlichkeitslehre wird eine bequemere Methode angegeben. Hier handelt es sich nur um eine Übung in der Berechnung des Umfangs

Da $\sqrt{3} = 1{,}732051\cdots$, also $2 - \sqrt{3} = 0{,}267949\cdots$ und daher $AC = \sqrt{0{,}267949\cdots} = 0{,}5176380\cdots$ ist, so folgt als halber Umfang des regelmäßigen Zwölfecks das Sechsfache davon, d. h. $3{,}10528\cdots$. Dies ist schon ein besserer Näherungswert für π als die Zahl 3.

Jetzt halbiere man den Bogen AC, was F gibt, dann wird durch FM die Sehne AC in E halbiert, und es wird

$$AE = \frac{AC}{2} = 0{,}2588190\cdots,$$

$$EM = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{1 - AE^2},$$

$$FE = 1 - EM = 1 - \sqrt{1 - AE^2},$$

also die Sehne

$$AF = \sqrt{AE^2 + FE^2} = \sqrt{AE^2 + \left(1 - \sqrt{1 - AE^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{AE^2 + 1 + 1 - AE^2 - 2\sqrt{1 - AE^2}} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - AE^2}\right)}.$$

Hier ist $AE^2 = 0{,}06698728\cdots$, also $1 - AE^2 = 0{,}9330127\cdots$ und $AF = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{0{,}9330127\cdots}\right)}$, oder, da $\sqrt{0{,}9330127\cdots}$ $= 0{,}9659258\cdots$ ist, $AF = \sqrt{2 \cdot 0{,}0340742\cdots} = \sqrt{0{,}0681484\cdots}$ $= 0{,}2610525\cdots$. Der halbe Umfang des 24-Ecks ist das Zwölffache davon oder $3{,}132630$, was noch näher an π liegt. So kann man, die Halbierung der Bogen wiederholend, fortfahren.

In derselben Weise kann man den halben Umfang der umbeschriebenen regelmäßigen Vielflache der angegebenen Seitenzahl berechnen. Während die einbeschriebenen Vielflache einen zu kleinen Näherungswert geben, geben die umbeschriebenen einen zu großen, aber π wird immer enger zwischen zwei Zahlen eingeschnürt. Die Resultate bis zur sechsten Stelle sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	Einbeschrieben:	Umbeschrieben:	Folglich:
6-Eck	3,00000	3,46410	$3 < \pi < 3{,}4\ldots.$
12-Eck	3,10583	3,21539	$3{,}1 < \pi < 3{,}2\ldots.$
24-Eck	3,13263	3,15966	$3{,}13 < \pi < 3{,}15\ldots$
48-Eck	3,13935	3,14609	$3{,}139 < \pi < 3{,}146\ldots$
96-Eck	3,14103	3,14271	$3{,}1410 < \pi < 3{,}142\ldots$
192-Eck	3,14145	3,14187	$3{,}1414 < \pi < 3{,}1418.$
384-Eck	3,14156	3,14166	$3{,}14156 < \pi < 3{,}14166$
768-Eck	3,14158	3,14161	$3{,}14158 < \pi < 3{,}14161$
1536-Eck	3,14159	3,14160	$3{,}14159 < \pi < 3{,}14160$

Damit ist $\pi = 3{,}14159$ auf sechs Stellen richtig berechnet.]

regelmäßiger Vielecke, deren ein- oder umbeschriebener Kreis den Radius 1 hat. Ist das Wurzelausziehen noch nicht geübt, so ist dieser Paragraph zu überschlagen.

f) Schlußbemerkungen zur planimetrischen Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

a) Ein wesentlicher Bestandteil der Planimetrie liegt in den Erklärungen (Definitionen) der in ihr zu behandelnden Begriffe.

Diese Begriffe sind entweder Grundbegriffe oder zusammengesetzte Begriffe.

Grundbegriffe sind z. B. Punkt, Linie, Fläche.

Zusammengesetzte Begriffe sind z. B. rechtwinkliges Dreieck, Parallelogramm.

Eine Erklärung soll alles Notwendige enthalten, aber nur das Notwendige. Sie ist entweder eine sachliche Erklärung (Realerklärung) oder eine Entstehungserklärung (genetische Erklärung). So kann man z. B. die Gerade folgendermaßen erklären: Die Gerade ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten. Man kann aber auch sagen: Die Gerade entsteht durch die Bewegung eines stets in derselben Richtung wandernden Punktes.

Aus der Erklärung eines planimetrischen Gebildes müssen sich dessen wesentliche Eigenschaften ableiten lassen. Die Ableitung der Eigenschaften der Gebilde ist eine Hauptaufgabe der Mathematik. Sie muß in streng logischer Weise erfolgen. (Die Logik ist die Wissenschaft, die sich mit den Denkformen, besonders mit den Schlußfolgerungen beschäftigt.)

b) Dasjenige, was über einen planimetrischen (allgemeiner einen mathematischen) Begriff ausgesagt wird, nennt man einen Satz. Ein solcher Satz kann eine allgemein anerkannte Grundwahrheit (ein Axiom) sein oder ein des Beweises bedürftiger Lehrsatz.

α) Als allgemeine Grundsätze werden in der Regel folgende angegeben.*)

1) Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie untereinander gleich. Ist $a = c$ und $b = c$, so ist $a = b$.
2) Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a + b = a_1 + b_1$.
3) Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a - b = a_1 - b_1$.
4) Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a \cdot b = a_1 \cdot b_1$.

---

*) Als erster Grundsatz wird häufig folgender angegeben: „Jede Größe ist sich selbst gleich.“ Da jedoch zur Gleichheit mindestens zwei Größen gehören, wird er besser übergangen.

5) Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

Jedem dieser Gleichheitssätze kann ein Ungleichheitssatz zur Seite gestellt werden, z. B. Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches. Ist z. B. $a = a_1$, aber $b > b_1$, so ist $a + b > a_1 + b_1$; ist $a = a_1$, aber $b < b_1$, so ist $a + b < a_1 + b_1$.

Dem ersten Grundsatze wird häufig folgender Ungleichheitssatz zur Seite gestellt:

6) Ist von zwei gleichen Größen die eine größer (bezw. kleiner) als eine dritte, so ist auch die andere größer (bezw. kleiner) als die dritte.

Im Bereiche der positiven Größen gilt noch folgender Grundsatz:

7) Der Teil ist kleiner als das Ganze, oder das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

Diese Grundsätze sind teils schon zur Anwendung gekommen, teils werden sie noch Anwendung finden.

Jeder der ersten sechs Sätze enthält eine Bedingung, unter der das Ausgesagte richtig ist. Die Bedingung nennt man die Voraussetzung, die Aussage heißt die Behauptung. Auf einen Beweis der letzteren wird, wie schon gesagt, verzichtet, weil es sich um allgemein als richtig anerkannte Denkformen (Schlußfolgerungen) handelt.

β) Neben den allgemeinen Grundsätzen gibt es planimetrische Grundsätze (planimetrische Axiome), bei denen auch auf einen Beweis verzichtet wird. So sagt man z. B.: „In der Ebene lassen sich durch jeden Punkt unendlich viele gerade Linien legen."

[Bei manchen Sätzen solcher Art können Zweifel herrschen, ob sie zu den Grundsätzen oder zu den eines Beweises bedürftigen Lehrsätzen gehören.*) Gerade in neuerer Zeit sind in dieser Beziehung über die Grundlagen der Geometrie umfangreiche Untersuchungen scharfsinnigster Art gemacht worden. Zu allgemeiner Einigung ist man noch nicht gelangt. Die Schule kann auf diese kritischen Streitfragen nicht eingehen. Sie nimmt daher manche Sätze als planimetrische Axiome an, die vielleicht später von der strengen Systematik nicht als solche anerkannt werden.

Unter diesen Axiomen hat das sogenannte elfte Axiom des Euklid eine hervorragende Rolle gespielt. Es handelt sich um

---

*) Die eingeklammerten Bemerkungen können vorläufig überschlagen werden, müssen aber dann später besprochen werden.

den bekannten Satz, daß, wenn bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden korrespondierende Winkel gleich sind, die letzteren Geraden einander nicht schneiden können, wie weit man sie auch verlängere. Zweitausend Jahre lang haben auch bedeutende Mathematiker den Satz streng zu beweisen versucht. Erst Gauß und einige seiner Zeitgenossen haben erkannt, daß ein strenger Beweis des Satzes unmöglich ist, daß also jener scharfsinnige Grieche ihn mit vollem Rechte als Axiom hingestellt hat. (Nimmt man diesen Satz nicht als richtig an, so kommt man auf die verschiedenen Formen nichteuklidischer Geometrien.) Der Satz kann übrigens durch den Satz ersetzt werden, daß die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten sei. Geschieht dies, so ist dieser Satz als Axiom zu betrachten.

Im allgemeinen wird anerkannt, daß die Schule eine größere Anzahl von Axiomen nötig hat als die Wissenschaft.

γ) Bei einem Lehrsatze dagegen handelt es sich um Voraussetzung, Behauptung und Beweis.

Soll z. B. bewiesen werden, daß gleichen Seiten eines Dreiecks gleiche Winkel gegenüberliegen, so wird z. B. vorausgesetzt, daß ABC ein Dreieck und daß $AC = BC$ ist. Behauptet wird, daß $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\alpha$ sei. Um den Beweis zu liefern, hat man im vorliegenden Falle eine Hilfskonstruktion nötig. Entweder fällt man von C aus auf die Gegenseite ein Lot oder man verbindet C mit der Mitte der Gegenseite oder man halbiert den Winkel bei C. Dann beweist man, daß durch die Hilfslinie das Dreieck in zwei kongruente Teile zerlegt wird. Daraus folgt die Gleichheit der homologen Winkel β und α.

So ergibt sich für jeden Lehrsatz ein bestimmtes Schema: 1) Der Lehrsatz selbst, 2) die Voraussetzung, 3) die Behauptung, 4) die etwa nötige Hilfskonstruktion, 5) der Beweis.

Zur Übung im streng logischen Denken ist es durchaus erforderlich, dieses Schema an vielen Beispielen durchzuführen. Auch ist alles, was im Beweise gesagt wird, zu begründen, sei es durch Verweisung auf den entsprechenden Grundsatz oder durch Angabe eines bereits bewiesenen Lehrsatzes. Im obigen Beispiele ist z. B. der angewandte Kongruenzsatz zu nennen. Nur der Kürze halber ist in diesem Buche das angegebene Schema nicht durchgängig angewandt.

Der Beweis ist entweder ein unmittelbarer, d. h. ein direkter Beweis, oder ein mittelbarer, d. h. ein indirekter Beweis. Bei dem ersteren wird der Nachweis der Richtigkeit wirk-