Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

γ) Symmetrisches über das gleichschenklige Dreieck

Dabei sind also $ABCE$ und $ACBF$ Parallelogramme, sodaß $CB = EA = AF$ ist. Demnach ist das Lot AH die Mittelsenkrechte von EF. Ebenso zeigt sich, daß BJ die Mittelsenkrechte von FD und CK die Mittelsenkrechte von DE ist. Diese Mittelsenkrechten müssen sich aber in einem Punkte schneiden. Demnach schneiden einander die Höhen des Dreiecks DEF und überhaupt jedes Dreiecks in **einem** Punkte. Der bereits ausgesprochene Satz über die Dreieckshöhen ist damit bestätigt. — Der Höhenschnittpunkt M hat also noch zweierlei Bedeutung. Er ist Mittelpunkt des Um-Kreises vom Dreieck DEF und zugleich Mittelpunkt des In-Kreises vom Dreieck HJK.

Bildet man jedoch ein stumpfwinkliges Dreieck ABC und dazu die Figur, so fällt M außerhalb der Dreiecke ABC, DEF und HJK und ist nicht In-Kreis, sondern An-Kreis des letzteren.

Der Durchschnittspunkt S der Mittellinien des Dreiecks, der Mittelpunkt M des Um-Kreises, die Mittelpunkte μ, μ_1, μ_2, μ_3 des In-Kreises und der An-Kreise und der Höhenschnittpunkt H werden als merkwürdige Punkte des Dreiecks bezeichnet

γ) Symmetrisches über das gleichschenklige Dreieck.

170) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks war als dessen Symmetrielinie nachgewiesen, sodaß es aus zwei kongruenten Hälften besteht. Zunächst folgte der Satz: Die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks (die Basiswinkel) sind einander gleich; oder: Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

171) Umgekehrt folgt: Sind zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Oder: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. (Sind nämlich die Winkel bei A und B einander gleich, so sind sie symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte, müssen also einander in demselben Punkte C der Mittelsenkrechten schneiden, sodaß auch $AC = BC$ ist.)

172) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks halbiert die Grundlinie und steht auf dieser senkrecht; die Mittelsenkrechte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze und halbiert den dortigen Winkel. Die Verbindungslinie der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie steht auf dieser senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

Alle diese Sätze sind nur Ausdrucksweisen dafür, daß das gleichschenklige Dreieck aus zwei kongruenten Teilen besteht.

Jedes Lot auf der Symmetrielinie des gleichschenkligen Dreiecks schneidet von den Schenkeln gleiche Stücke ab, von der Fläche ein Antiparallelogramm. Legt man an eine Gerade AB in A und B nach derselben Seite gleiche Winkel so an, daß die Schenkel einander in einem Punkte C schneiden, gibt man den Schenkeln dieselbe Länge $AD = BE$ und verbindet man A mit E und B mit D, so geben die Verbindungslinien gleichschenklige Dreiecke ABF und DEF. Warum?

173) Der Mittelpunkt des Um-Kreises, des In-Kreises, des An-Kreises für die Grundlinie, der Höhendurchschnitt, der Durchschnitt der Mittellinien liegen beim gleichschenkligen Dreieck auf dessen Symmetrielinie. Die Mittelpunkte der beiden anderen An-Kreise sind symmetrisch gegen die Symmetrielinie. Ihre Verbindungslinie geht durch die Spitze des Dreiecks.

174) Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht stets durch die Mitte des Kreises. Daraus folgt wieder der Satz: Das durch zwei Punkte gehende Büschel von Kreisen hat die Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten. Man konstruiere die betreffenden Linien und einige der Kreise. (Vgl. Nr. 167.)

175) Stehen, wie in Fig. 34, zwei ungleiche gleichschenklige Dreiecke über derselben Grundlinie, so haben sie eine gemeinschaftliche Symmetrielinie, denn die Symmetrielinien beider fallen mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen. Dabei können die beiden gleichschenkligen Dreiecke ihre Spitze auf verschiedenen Seiten der Grundlinie oder auf derselben Seite haben. Stimmen dagegen die beiden gleichschenkligen Dreiecke überein, so hat das Gebilde zwei Symmetrieachsen und ist eine Raute (oder Rhombus).

176) **Aufgaben.** Die mehrfache Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks, des Quadrates, des regelmäßigen Fünfecks, des regelmäßigen Sechsecks usw. eingehender zu untersuchen.

(Es soll z. B. untersucht werden, ob parallele Seiten vorhanden sind, ob Diagonalen vorhanden sind, die zu einer Seite parallel sind, wie sich beliebige Diagonalen paarweise verhalten, ob sich kongruente Flächenteile vorfinden. Die Zerlegung jedes regelmäßigen Vielecks in gleichschenklige Dreiecke, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammenfallen, ist gleichfalls zu untersuchen. Die Winkel dieser Dreiecke sind zu bestimmen. Die ein- und umbeschriebenen Kreise sind zu untersuchen, besonders hinsichtlich ihrer Sektoren, Segmente und Bogen.