Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

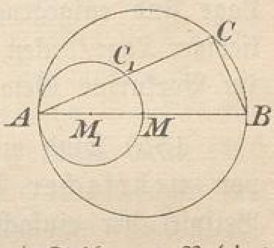
α) Erklärung und Grundsätze der einfachen und mehrfachen Symmetrie bogen, der A_2B_2 in D_2 schneidet. Dann sind $D_1E_1F_1$ die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks. (Letzteres kann noch auf eine zweite Art, links von F_1 liegend, gezeichnet werden, wozu nur die Vervollständigung des letzten Kreisbogens nötig ist.)

Der Beweis der Richtigkeit soll dem Schüler überlassen bleiben. Dieser wird dann auch imstande sein, die Aufgabe für beliebige Abstandsverhältnisse zu lösen. — Die Konstruktion kann erheblich abgekürzt werden, denn eigentlich ist die Aufgabe gelöst, sobald man im Hilfsdreieck FG gezogen und den Winkel α in die Hauptfigur übertragen hat.]*)

153) Zeichnet man in einen Kreis einen ihn berührenden vom halben Radius, so ist jede durch den Berührungspunkt gelegte Sehne durch den kleineren Kreis halbiert.

Beweis. Der kleinere Kreis geht durch den Mittelpunkt M des größeren. Ist A Berührungspunkt, so ist AMB ein Durchmesser, der durch die Mitten beider Kreise geht. Wird eine beliebige Sehne AC in C_1 vom kleineren Kreise geschnitten und zieht man CB und C_1M, so sind die Winkel AC_1M und ACB Rechte als Winkel im Halbkreis, also ist $C_1M \parallel CB$; da ferner AB in M halbiert ist, muß auch AC in C_1 halbiert sein.

Fig. 30.



Entsprechendes findet statt mit einem inneren Berührungskreise, dessen Radius der dritte, vierte, n^{te} Teil vom Radius des größeren ist.

Was geschieht, wenn der Berührungskreis außerhalb des gegebenen liegt?

(Der angegebene Satz läßt sich bei vielen Konstruktionsaufgaben anwenden.)

e) Begriff der Symmetrie in der Ebene.

α) Erklärung und Grundgesetze der einfachen und mehrfachen Symmetrie.

154) Bei den grundlegenden Konstruktionen drängte sich der Begriff der Symmetrie auf, bei dessen Beachtung viele Sätze und Konstruktionen sich als selbstverständlich ergeben.

Man bezeichnet ein planimetrisches Gebilde als einfach

*) Die Aufgabe kann natürlich überschlagen werden. Der Beweis der Richtigkeit soll nur eine Scharfsinnsprobe für begabtere Schüler sein.

symmetrisch, wenn es durch eine und nur eine Gerade so in zwei Hälften zerlegt wird, daß die eine Hälfte durch Umklappung um diese Gerade mit der anderen Hälfte zur Deckung gebracht werden kann.

Jede Hälfte bezeichnet man als das Spiegelbild der anderen. Die Gerade heißt die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Gebildes, oder auch die spiegelnde Gerade, die als unbegrenzt zu denken ist. Jeder Punkt dieser Geraden ist sein eigenes Spiegelbild. Das Spiegelbild jedes anderen Punktes wird gefunden, indem man von ihm auf die Gerade ein Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Die spiegelnde Gerade ist ihr eigenes Spiegelbild. Jede Parallele zur spiegelnden Geraden wird eine Parallele entgegengesetzten Abstandes. Jede die spiegelnde Gerade schneidende Gerade wird eine sie in demselben Punkte unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneidende Gerade. Jedes Lot zur spiegelnden Geraden gibt seine eigene Verlängerung. Symmetrische Stücke von Geraden sind dabei gleich lang; symmetrische Winkel von beliebiger Lage sind entgegengesetzt gleich. Symmetrische Kreisbogen von beliebiger Lage decken einander. (Vgl. zu diesem Abschnitte das unter V im Vorkursus Gesagte.)

155) Sind mehrere Symmetrieachsen vorhanden, so spricht man von mehrfacher Symmetrie. Das gleichschenklige Dreieck ist ein Beispiel der einfachen Symmetrie; die Halbierende des Winkels an der Spitze ist die Symmetrieachse. Das Rechteck ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Mittellinien sind seine Symmetrieachsen. Auch der Rhombus ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Diagonalen sind seine Symmetrieachsen. Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen, die Halbierenden der Winkel. Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen, die Diagonalen und die Mittellinien. Das regelmäßige Fünfeck hat fünf Symmetrieachsen, die Winkelhalbierenden. Das regelmäßige Sechseck hat sechs Symmetrieachsen, die drei Hauptdiagonalen und die drei Mittellinien usw. Der Kreis hat unendlich viele Symmetrieachsen, nämlich sämtliche Durchmesser.

156) Beim Rechteck und Rhombus schneiden die Symmetrieachsen einander rechtwinklig in einem Punkte, den man als den Mittelpunkt der Figur bezeichnet. Beim Rechteck ist dieser Punkt der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, beim Rhombus ist er der des einbeschriebenen Kreises. Bei allen genannten regelmäßigen Vielecken schneiden einander die Symmetrieachsen in einem Punkte, dem Mittel-

punkte des Vielecks, der zugleich Mittelpunkt des um- und des einbeschriebenen Kreises ist. Dort folgen sie unter gleichen Winkeln aufeinander, beim gleichseitigen Dreieck bilden sie Winkel von $\frac{180^0}{3} = 60^0$, beim Quadrat solche von $\frac{180^0}{4} = 45^0$, beim Fünfeck solche von $\frac{180^0}{5} = 36^0$, beim Sechseck solche von $\frac{180^0}{6} = 30^0$ usw.

157) Diese Einfachheit erklärt sich folgendermaßen: Das Spiegelbild einer Symmetrieachse gegen eine Symmetrieachse ist wieder eine Symmetrieachse. Schneiden einander die beiden ersten im Endlichen, so muß die dritte durch denselben Punkt gehen. Spiegelt man die beiden ersten Symmetrieachsen gegen die dritte, so müssen die Spiegelbilder wieder durch denselben Punkt gehen usw. Daraus folgt: Bei mehrfacher Symmetrie gehen alle Symmetrieachsen durch denselben Punkt. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Gebildes.

158) Sollen nur zwei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen diese aufeinander senkrecht stehen, denn sonst würde durch die Spiegelung gegen die eine eine dritte Symmetrieachse entstehen usw. Sollen nur drei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen sie einander unter 60^0 schneiden, denn sonst würden durch Spiegelung gegen eine davon neue Symmetrieachsen entstehen. Das Entsprechende gilt von vier, fünf, sechs usw. Symmetrieachsen. Eine Symmetrieachse teilt die Ebene in zwei übereinstimmende Hälften, zwei geben vier übereinstimmende „Quadranten", drei geben sechs übereinstimmende Sextanten der Ebene, n Symmetrieachsen geben $2n$ Zentriwinkel von der Größe $\frac{360^0}{2n}$ oder $\frac{180^0}{n}$. Das regelmäßige n-Eck hat n Symmetrieebenen. Ist n eine gerade Zahl, so sind die Symmetrieebenen zur Hälfte Hauptdiagonalen, zur Hälfte winkelhalbierende Mittellinien. Ist n ungerade, so sind sämtliche Winkelhalbierenden Mittellinien. Eine eigentümliche Stellung nehmen die unbegrenzten Parallelen ein. Jedes gemeinschaftliche Lot ist für sie eine Symmetrieachse. Es sind also unendlich viele Symmetrieachsen vorhanden, die einander im Endlichen nicht schneiden. Der Streif zwischen zwei Parallelen hat außerdem noch eine vereinzelte parallele Symmetrieachse.

159) Von der Zeichnung eines kunstgewerblichen ebenen Musters (Flachornament) von mehrfacher Symmetrie braucht nur der einem solchen Zentriwinkel entsprechende Teil gegeben zu sein. Der Rest ist

leicht zu konstruieren, sei es Punkt für Punkt oder Linie für Linie. (Hat man statt des Flachornaments ein mehrfach symmetrisches Relief auf ebener Grundlage, so braucht man auch nur den entsprechenden Teil zu geben, jedoch sind benachbarte symmetrische Teile nicht mehr kongruent, sondern räumlich symmetrisch. Vgl. Vorkursus V, 112 und 113.)

Fig. 31.

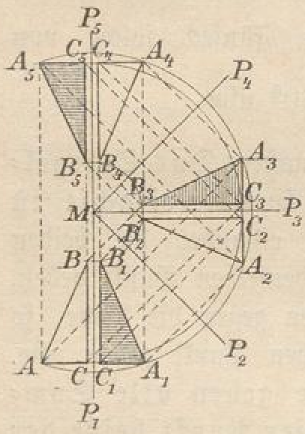
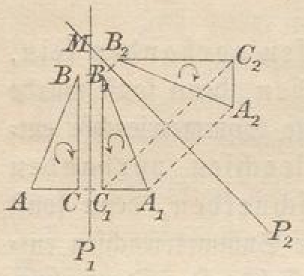


Fig. 32.



160) Die Umklappung eines mehrfach symmetrischen (planimetrischen) Gebildes gibt dessen Teilen entgegengesetzten Drehungssinn; die Umklappung des Bildes um die zweite Achse stellt den ursprünglichen Drehungssinn wieder her; die Umklappung des neuen Bildes um die dritte Achse gibt wieder den entgegengesetzten Drehungssinn usw. Eine gerade Anzahl von Spiegelungen läßt den Drehungssinn ungeändert, eine ungerade Anzahl gibt den entgegengesetzten Drehungssinn.

Fig. 31 und 32 veranschaulichen dies an einem mehrfach gespiegelten rechtwinkligen Dreieck. Die schraffierten Dreiecke sind nicht symmetrisch zu einander. Man könnte sie als verkehrtsymmetrisch bezeichnen.

β) Ableitung einfacher Sätze und Konstruktionen mit Hilfe der Symmetrie.

161) Das Spiegelbild zweier Punkte. In Fig. 33 sind zwei Punkte D und E gegen die Gerade AB gespiegelt, was D_1 und E_1 gegeben hat. Dadurch ist zugleich die Gerade DE gespiegelt und ihr Spiegelbild D_1E_1 entstanden. Schneidet nun DE die spiegelnde Gerade in einem im Endlichen liegenden Punkte G, so muß auch D_1E_1 durch den Punkt G gehen und AB unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneiden.

Man kann aber auch D und E_1 als die gespiegelten Punkte, D_1 und E als die Spiegelbilder betrachten. Demnach müssen auch DE_1 und D_1E einander auf der Geraden AB schneiden.

Zwei Geraden, die gegen eine dritte Gerade symmetrisch sind, bezeichnet man bisweilen als antiparallel in bezug auf die spiegelnde