UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

η) Einige Vergrößerungs- und Verkleinerungsaufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

Visual Library

Hindernis durch drei Seiten eines Rechtecks, die sich um das Hindernis herumlegen lassen und konstruiere statt der vierten Seite ihre Verlängerung als Lot auf der dritten.

Statt der drei Rechtecksseiten kann man auch zwei Seiten eines gleichseitigen oder gleichschenkligen Dreiecks benutzen, die das Hindernis umgehen.

Später wird eine von Winkeln unabhängige Konstruktion gelehrt.]

144) Den jenseits eines Hindernisses liegenden Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen.

[Die Geraden sind (zunächst nach der vorigen Methode) über das Hindernis hinaus zu verlängern. Dann ist der Schnittpunkt leicht zu bestimmen.]

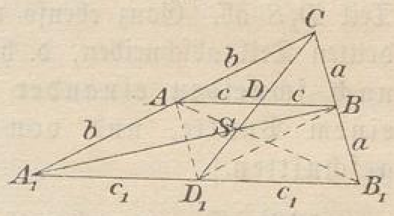
Bemerkung. Ist das Hindernis z. B. ein Fluß, der nicht umgangen werden kann, so benutzt der Landmesser Stäbe, von denen zwei auf der zu verlängernden Geraden senkrecht in die Erde gestoßen werden, während ein dritter Stab jenseits des Flusses so eingestellt wird, daß er dem über den ersten Stab hinblickenden Beobachter durch den zweiten Stab verdeckt wird. So findet man einen ersten Punkt für die Verlängerung der Geraden, einen zweiten kann man in derselben Weise bestimmen. In ähnlicher Weise kann mit der zweiten Aufgabe verfahren werden.

η) Einfache Vergrößerungs- und Verkleinerungsaufgaben.*)

145) Ein gegebenes Dreieck im doppelten Maßstabe zu zeichnen.

Auflösung. Ist in Fig. 27 ABC das gegebene Dreieck, so verlängere man CA über A hinaus um sich selbst, was A_1 gibt. Dann lege man durch A_1 eine Parallele zu AB, welche die Verlängerung von CB in einem Punkte B_1 schneidet. Dann ist A_1B_1C das verlangte Dreieck.

Fig. 27.



Beweis. Weil CA_1 in A halbiert und $A_1B_1 \parallel AB$ ist, so ist auch CB_1 in B halbiert, d. h. CB_1 ist doppelt so groß als CB. Zieht man ferner die Gerade $BD_1 \parallel AA_1$, so ist AB gleich A_1D_1, denn Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. Weil aber CB_1 in B hal-

*) Eigentlich gehören solche Aufgaben in die Ähnlichkeitslehre. Um jedoch die Konstruktionsübungen mannigfaltiger zu machen, sind sie schon hier eingeschaltet worden.

biert und $BD_1 \parallel CA_1$ ist, so ist auch A_1B_1 in D_1 halbiert, also ist $AB_1 = 2 \cdot A_1D_1 = 2 \cdot AB$. Alle Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind also doppelt so groß als die Dreiecks ABC. Zugleich sind alle Winkel des Dreiecks A_1B_1C gleich den entsprechend liegenden Winkel des Dreiecks ABC. (Warum?)

Bemerkungen. Die Auflösung kann folgendermaßen umgestaltet werden. Man verlängere CA über A hinaus um sich selbst, ebenso CB über B hinaus um sich selbst und verbinde die neuen Endpunkte A_1 und B_1 durch eine Gerade. Diese muß von selbst parallel zu AB und doppelt so lang wie AB werden. —

Zum Beweise konnte man auch $AD_1 \parallel CB_1$ ziehen.

Dann hat man vier übereinstimmende Dreiecke und sieht daraus, daß der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C viermal so groß ist als der von ABC.

Sind also die Seiten eines Dreiecks doppelt so groß wie die eines anderen, so haben beide Dreiecke dieselben Winkel und der Inhalt des größeren Dreiecks ist das Vierfache von dem des kleineren.

[In der Figur ist ganz ebenso Dreieck A_1SC die Vergrößerung des Dreiecks BSD_1 auf den doppelten Maßstab; also ist SC das Doppelte von SD_1, und SA_1 das Doppelte von SB. (Die Geraden SB und SD_1 sind jetzt über die Ecke S hinaus verdoppelt gezeichnet worden.) Demnach ist D_1S der dritte Teil von D_1C und BS der dritte Teil von BA_1. (Dies bestätigt sich auch, wenn man durch A und B Parallelen zu CD_1 legt, welche die halbierte Linie A_1B_1 in vier gleiche Teile zerlegen, von denen drei Teile durch Parallelen auf A_1B übertragen werden, sodaß diese Linie in drei gleiche Teile geteilt ist.)

Man nennt die Geraden, die von der Ecke des Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten gehen, *Mittellinien* des Dreiecks. Die Mittellinie A_1B schneidet also von der Mittellinie CD_1 den dritten Teil D_1S ab. Ganz ebenso muß die Mittellinie B_1A von CD_1 den dritten Teil abschneiden, d. h. sie muß auch durch S gehen. *Demnach schneiden einander die Mittellinien des Dreiecks in einem Punkte, und von jeder wird der dritte Teil abgeschnitten.*]

146) *Ein gegebenes Dreieck im halben Maßstabe zu zeichnen.*

Die Auflösung ergibt sich aus Fig. 27 und ist dem Schüler zu überlassen.

147) *Ein gegebenes Dreieck im dreifachen Maßstabe zu zeichnen.*

Die Auflösung geschieht ähnlich wie bei Aufgabe 145. Sie ist dem Schüler zu überlassen. Dieser soll die Richtigkeit der Konstruktion beweisen und durch Zeichnen geeigneter Parallelen das große Dreieck in neun mit dem gegebenen übereinstimmende Dreiecke zerlegen um so zu zeigen, daß der Flächeninhalt der neunfache des ursprünglichen ist.

148) [Ein gegebenes Dreieck im $n$fachen Maßstabe (wo n eine beliebige ganze Zahl ist) oder im $\frac{3}{2}$fachen Maßstabe, oder im $\frac{3}{4}$fachen Maßstabe, oder im $\frac{m}{n}$fachen Maßstabe (m und n ganze Zahlen) zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt des neuen Dreiecks der n^2fache bezw. $\frac{9}{4}$fache, bezw. $\frac{9}{16}$fache, bezw. der $\left(\frac{m}{n}\right)^2$fache geworden ist.]

149) Ein gegebenes Quadrat im doppelten, dreifachen, vierfachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt der vierfache, bezw. neunfache, bezw. 16fache ist. [Das Quadrat ferner im $\frac{2}{3}$fachen, $\frac{5}{4}$fachen, $\frac{m}{n}$fachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt das $\frac{4}{9}$fache, $\frac{25}{16}$fache, $\left(\frac{m}{n}\right)^2$fache geworden ist.]

150) Ein gegebenes regelmäßiges 6-Eck, oder 8-Eck, oder 12-Eck, oder 16-Eck im doppelten, oder dreifachen, oder vierfachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt das 4fache, bezw. 9fache, bezw. 16fache geworden ist.

(Die Auflösung geschieht am einfachsten, indem man um den Mittelpunkt des Vielecks einen Kreis mit dem doppelten, dreifachen, vierfachen Radius des umbeschriebenen Kreises schlägt und die nach den Ecken des ursprünglichen Vielflachs gezogenen Radien bis zum Kreise verlängert, worauf die Sehnen einzutragen sind.

Weil jedes der gleichschenkligen Dreiecke auf das Vierfache, Neunfache, Sechzehnfache des ursprünglichen Inhalts gelangt, so gilt dasselbe auch vom Gesamtinhalte des Vielecks.)

151a) Ein gegebenes Rechteck im doppelten, dreifachen, vierfachen usw. Maßstabe zu zeichnen.

(**Auflösung.** Man zeichne eine Diagonale und bringe sie nach derselben Richtung hin auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Länge. Von den gefundenen Endpunkten fälle man Lote auf die vom Anfangspunkte der Diagonale ausgehenden Rechtecksseiten. Es entstehen so Rechtecke von den Seiten $2a$ und $2b$, $3a$ und $3b$, $4a$ und $4b$ usw. oder, wie man auch sagt, von demselben Seitenverhältnis $a:b$. In allen diesen Rechtecken bildet die Diagonale mit den Rechtecksseiten dieselben beiden Winkel.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

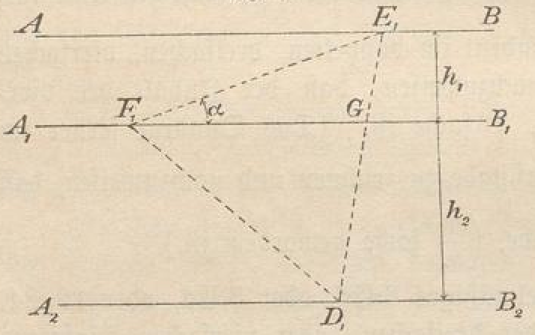
151b) Ein beliebiges gegebenes Viereck im doppelten Maßstabe zu zeichnen.

(Die Auflösung ist dem Schüler zu überlassen, der mehrere Wege aufzusuchen hat, z. B. auch den Weg, die Abschnitte der Diagonalen vom Schnittpunkte aus zu verdoppeln, wobei jedes Dreieck auf den vierfachen Inhalt kommt, also auch der Gesamtinhalt vervierfacht wird.)

Auch der dreifache, vierfache usw. Maßstab macht keine Schwierigkeiten.

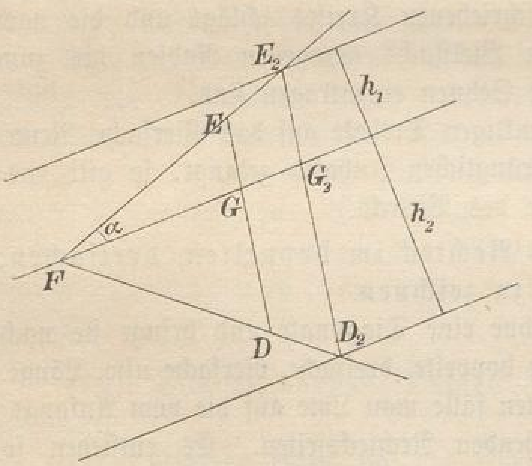
152) [Eine schwierigere Vergrößerungsaufgabe: Gegeben seien drei Parallelen, von denen die beiden letzten den doppelten gegenseitigen Abstand haben wie die beiden ersten. Es soll ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet werden, welches seine Ecken auf den Parallelen hat. Eine seiner Ecken soll vorgeschrieben sein.

Fig. 28.



Auflösung. In Fig. 28 seien AB, A_1B_1, A_2B_2 die Parallelen mit den Abständen h_1 und $h_2 = 2h_1$; F_1 soll der gegebene Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks sein. Man zeichne zunächst irgendwo ein gleichseitiges Dreieck DEF von beliebiger, z. B. kleiner Größe und mache in diesem $EG = \frac{1}{3}ED$ (Fig. 29). Dann verlängere man FE und FD und die zu ziehende Gerade FG über E, D, G hinaus. Zu FG ziehe man Parallele in den entgegengesetzten Abständen h_1 und h_2, welche die verlängerten Dreiecksseiten in E_2 und D_2 schneiden. Zieht man D_2E_2, so hat man ein gleichseitiges Dreieck FD_2E_2, welches den Forderungen genügt und nur noch in die richtige Lage zu bringen ist. Man lege den Winkel $EFG = \alpha$ an A_1B_1 im Punkte F_1 nach der Seite des kleineren Abstandes an, was den Schnittpunkt E_1 gibt und schlage um F_1 mit F_1E_1 einen Kreis-

Fig. 29.



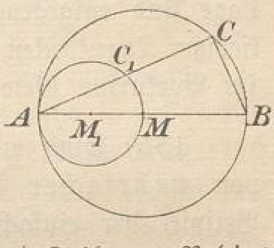
bogen, der $A_2 B_2$ in D_2 schneidet. Dann sind $D_1 E_1 F_1$ die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks. (Letzteres kann noch auf eine zweite Art, links von F_1 liegend, gezeichnet werden, wozu nur die Vervollständigung des letzten Kreisbogens nötig ist.)

Der Beweis der Richtigkeit soll dem Schüler überlassen bleiben. Dieser wird dann auch imstande sein, die Aufgabe für beliebige Abstandsverhältnisse zu lösen. — Die Konstruktion kann erheblich abgekürzt werden, denn eigentlich ist die Aufgabe gelöst, sobald man im Hilfsdreieck FG gezogen und den Winkel α in die Hauptfigur übertragen hat.]*)

153) Zeichnet man in einen Kreis einen ihn berührenden vom halben Radius, so ist jede durch den Berührungspunkt gelegte Sehne durch den kleineren Kreis halbiert.

Beweis. Der kleinere Kreis geht durch den Mittelpunkt M des größeren. Ist A Berührungspunkt, so ist AMB ein Durchmesser, der durch die Mitten beider Kreise geht. Wird eine beliebige Sehne AC in C_1 vom kleineren Kreise geschnitten und zieht man CB und $C_1 M$, so sind die Winkel AC_1M und ACB Rechte als Winkel im Halbkreis, also ist $C_1 M \parallel CB$; da ferner AB in M halbiert ist, muß auch AC in C_1 halbiert sein.

Fig. 30.



Entsprechendes findet statt mit einem inneren Berührungskreise, dessen Radius der dritte, vierte, n^{te} Teil vom Radius des größeren ist.

Was geschieht, wenn der Berührungskreis außerhalb des gegebenen liegt?

(Der angegebene Satz läßt sich bei vielen Konstruktionsaufgaben anwenden.)

e) Begriff der Symmetrie in der Ebene.

α) Erklärung und Grundgesetze der einfachen und mehrfachen Symmetrie.

154) Bei den grundlegenden Konstruktionen drängte sich der Begriff der Symmetrie auf, bei dessen Beachtung viele Sätze und Konstruktionen sich als selbstverständlich ergeben.

Man bezeichnet ein planimetrisches Gebilde als einfach

*) Die Aufgabe kann natürlich überschlagen werden. Der Beweis der Richtigkeit soll nur eine Scharfsinnsprobe für begabtere Schüler sein.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN