Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

α) Die Parallelensätze

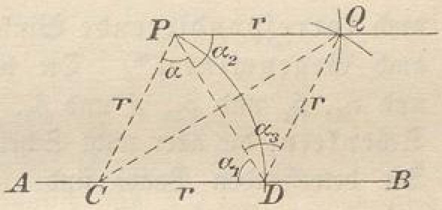
urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

Dabei decken einander auch die Mittelsenkrechten von CD und PQ, sodaß der Abstand PE auf den Abstand DF fällt. Da demnach die Lote EP und DF gleich lang sind, ist PF und damit PQ parallel zu AB.

Bemerkungen. In Fig. 15 ist (nach 71a) $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$, ebenso $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha_3$, also der Deckung wegen $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und $\sphericalangle CPD = \sphericalangle PDQ$. Man erhält demnach die Linie PQ auch dadurch, daß man den Winkel DPQ oder α_2 gleich dem Winkel CDP oder α_1 macht. Der Schüler zeige, daß auch $\sphericalangle QDB = \alpha$, also $DQ \parallel CP$ ist, sodaß die Berechtigung vorliegt, das Viereck $CDQP$ als ein Parallelogramm zu bezeichnen. Er versuche schon jetzt selbstständig Eigenschaften des Parallelogramms und seiner Diagonalen aufzufinden. Besonders gilt der Satz: Die Gegenseiten eines Parallelogramms sind gleich und parallel, oder: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. — Auch die Winkel α_4 und α_5 sind gleich α. KL und AB sind also parallel, wenn gewisse Winkel gleich sind. Welche?

γ) Man kann auch mit einer einer einzigen Zirkelöffnung zum Ziele kommen: Man nehme auf AB einen beliebigen Punkt C an, schlage um C mit der Zirkelöffnung CP einen Kreisbogen, der in D schneidet, um P und D schlage man Kreisbogen mit derselben Öffnung, die den Schnittpunkt Q geben. PQ ist die gesuchte Parallele.

Fig. 16.



Die Richtigkeit folgt daraus, daß CQ die Mittelsenkrechte zu PD ist, wobei, wie früher, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$ ist. Weil nämlich wieder $\alpha_2 = \alpha_1$ ist, muß $PQ \parallel CD$ sein.

Bemerkung. Ist umgekehrt $PQ \# CD$, so muß $PC \# DQ$, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und $PD \perp CQ$ sein ($\#$ soll heißen gleich und parallel). Das Viereck $CDQP$ hat lauter gleiche und paarweise parallele Seiten. Es heißt eine Raute oder ein Rhombus. Der Schüler versuche schon jetzt selbständig Eigenschaften des Rhombus und seiner Diagonalen aufzufinden.

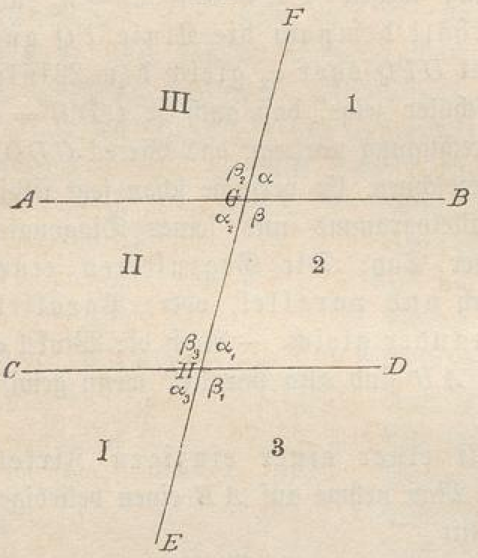
c) Bemerkungen über parallele Geraden und über die Winkelsumme des Dreiecks.

α) Die Parallelensätze.

78) Aus den letzten Konstruktionen und der Schlußbemerkung ergibt sich für Fig. 17 folgendes:

Ist $AB \parallel CD$, so ist $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_3$. Demnach ist im ganzen, weil auch Scheitelwinkel gleich sind, $\sphericalangle \beta_2 = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_3 = \sphericalangle \beta_1$. Da ferner zu gleichen Winkeln gleiche Nebenwinkel gehören, so ist auch $\sphericalangle \alpha = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_3$. Die Summe aus je einem α und je einem β ist gleich zwei Rechten. Finden umgekehrt die genannten Winkelgleichheiten statt, so sind AB und CD parallel.

Fig. 17.



79) Man teilt die genannten acht Winkel der Fig. 17 in gewisse Gruppen ein. 1) β, α_2, β_3, α_1 liegen zwischen den Parallelen und werden daher *innere* Winkel genannt, die übrigen sind *äußere* Winkel. 2) Winkel wie α und α_1, die paarweise *gleichgerichtete* Schenkel haben, nennt man *gleichliegende* Winkel, auch *korrespondierende* Winkel (d. h. einander entsprechende), wohl auch *Gegenwinkel*.*) Die betreffenden Paare sind α und α_1, α_2 und α_3, β_1 und β_3, β und β_1. 3) *Winkel mit entgegengesetzten Schenkeln*, die aber nicht Scheitelwinkel sind, heißen *Wechselwinkel*. Die betreffenden Paare sind: α und α_3, α_2 und α_1, β und β_3, β_1 und β_2. 4) *Winkel mit einem gleichgerichteten und einem entgegengesetzt gerichteten Schenkelpaare*, die aber keine Nebenwinkel sind, bezeichnet man als *entgegengesetzte* Winkel.**) Die betreffenden Paare sind: α und β_1, β und α_1, β_1 und α_3, α_1 und β_3.

(Man kann diese Winkelgruppen auch so definieren, daß die Winkel entweder auf derselben Seite der die Parallelen schneidenden Geraden, oder auf verschiedenen Seiten liegen, daß sie ferner zugleich äußere bezw. zugleich innere Winkel sind, oder daß sie nicht zugleich innere bezw. äußere sind. Diese Definitionen sollen dem Schüler überlassen werden.)

80) Über diese Winkelpaare lassen sich nach obigem folgende Sätze aussprechen:

*) Diese allgemein übliche Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt.

**) Auch diese Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt, aber sie ist allgemein gebräuchlich. Sie soll beibehalten werden, weil diese Winkel von geringerer Bedeutung sind.

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei gleichliegende Winkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich, je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zusammen zwei Rechte.

Umgekehrt: Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, und sind dabei zwei gleichliegende Winkel gleich, oder sind zwei Wechselwinkel gleich, oder betragen zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte, so sind die beiden ersten Geraden parallel.*)

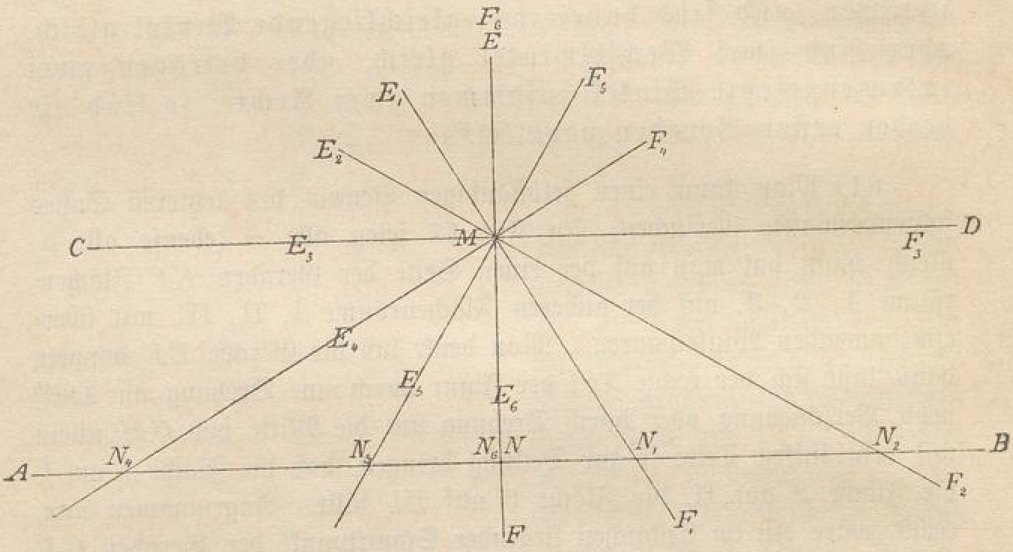
81) Man kann einen selbständigen Beweis des letzteren Satzes folgendermaßen versuchen: In Fig. 17 seien alle α (ebenso alle β) gleich, dann hat man auf der einen Seite der Geraden EF Flächenräume 1, 2, 3, auf der anderen Flächenräume I, II, III mit übereinstimmenden Winkelpaaren. Man denke sich die Gerade EF doppelt, dann läßt sich der rechte Teil der Figur durch eine Drehung um 180^0 nebst Verschiebung oder durch Drehung um die Mitte von GH allein mit dem linken Teile so zur Deckung bringen, daß die Fläche 1 auf I, die Fläche 2 auf II, die Fläche 3 auf III fällt. Angenommen nun, rechts wäre ein im Endlichen liegender Schnittpunkt der Geraden GB und HD vorhanden, so müßte er bei der Deckung mit einem dann notwendig vorhandenen Schnittpunkte der Geraden HC und GA zusammenfallen. Dann aber hätte man zwischen zwei endlichen Punkten zwei getrennte Geraden, was unmöglich ist. Demnach kann weder rechts noch links von der schneidenden Geraden ein im Endlichen liegender Schnittpunkt möglich sein, folglich sind AB und CD parallel.

82) Das gegenseitige Verhalten zweier Parallelen läßt sich noch auf folgendem Wege verdeutlichen. In Fig. 18 ist eine feste Gerade AB und eine um M drehbare Gerade dargestellt. Die Anfangslage der letzteren sei EF. Bewegt sich EF linksdrehend um M, so nimmt die Gerade z. B. die Lagen E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, ... E_6F_6 an, wobei sie eine halbe Umdrehung gemacht hat und sich entgegengesetzt zur Anfangslage befindet. Dabei ist der Durchschnittspunkt N mit der festen Geraden auf dieser über N_1 und N_2 nach unendlicher Entfernung gewandert, die der Lage E_3F_3 entspricht. Dann ist er plötzlich nach einem in entgegengesetzter Richtung liegenden unendlich fernen Punkte übergesprungen und von dort her über N_4, N_5 nach N_6, d. h.

*) Es ist gerechtfertigt, auch dann von gleichliegenden Winkeln usw. zu sprechen, wenn die beiden Geraden nur nahezu parallel sind. Die Behauptung des Parallelismus rechtfertigt die Benennung.

in die Anfangslage N zurückgelangt. Macht von jetzt ab die Linie noch eine Drehung von 180^0, so wiederholt sich der Vorgang und EF kommt in die eigentliche Anfangslage und Anfangsrichtung zurück.

Fig. 18.



Überall also ist die Bewegung von N eine ununterbrochene, *nur beim Passieren der parallelen Lage macht der Schnittpunkt auch bei der geringsten Drehung einen unendlich großen Sprung.*

[83)*) Dies führt auf die Frage, *wie man sich das Verhalten der Parallelen im Unendlichen selbst denken soll.* Der Satz, daß die beiden Geraden AB und EF für jede Lage einen und nur diesen einen Schnittpunkt haben, wird plötzlich zweifelhaft für den Fall des Parallelismus. Oben wurde absichtlich stets nur gesagt, dabei wäre im Endlichen kein Schnittpunkt vorhanden. Man kann ihn auch für das Unendliche ableugnen; man kann aber auch sagen, er befinde sich im Unendlichen, nur bleibe es zweifelhaft, ob er nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung zu denken sei; man kann aber auf Grund der besprochenen Symmetrie auch behaupten, es seien in unendlichen entgegengesetzten Entfernungen zwei Schnittpunkte vorhanden.

*) Dieser Abschnitt kann vorläufig übergangen werden, muß aber jedenfalls irgendwann zur Sprache kommen. Für den Zeitpunkt ist die Qualität der Schüler entscheidend.

Im Grunde genommen sind alle diese Redewendungen gleichberechtigt, und dies kann man folgendermaßen aufklären. Weil in Fig. 17 $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ ist, sagt man, die beiden Parallelen GB und HD hätten gegen die Gerade EF denselben Richtungsunterschied. Daher ist die Behauptung berechtigt, sie hätten dieselbe Richtung.

Denkt man sich einmal, die beiden Geraden hätten im Unendlichen denselben Abstand wie im Endlichen, so bedeutet dies den Richtungsunterschied Null; denkt man sich, sie hätten dort einen Schnittpunkt, so bedeutet dies einen unendlich kleinen Richtungsunterschied, dessen Folgen im Endlichen durchaus nicht wahrnehmbar sein können. Beide Annahmen bedeuten also für die nur im Endlichen arbeitende Mathematik ganz dasselbe. Ob das eine, ob das andere der Fall ist, ein Richtungsunterschied oder eine Änderung des Abstandes ist im Endlichen nicht wahrnehmbar.

Für die nur im Endlichen arbeitende Mathematik gilt daher auch der Satz, daß durch einen endlichen Punkt nur eine einzige Parallele gelegt werden könne, mit voller Bestimmtheit. Für die mit dem Unendlichen arbeitende Mathematik wird aber der Satz zweifelhaft, denn es können für das Unendliche die Fälle des Schneidens und des Nichtschneidens nicht auseinander gehalten werden. Man kann sogar für das Unendliche den Fall eines Auseinandergehens annehmen, ohne daß die Geltung jenes Satzes im Endlichen gestört wird. Daraus ergibt sich, daß dem Satze eine Geltung für das Unendliche sowohl zugesprochen, als auch abgesprochen werden kann; streng beweisen läßt er sich dafür nicht.

Euklid hat dies erkannt. Trotzdem sprach er ihn mit Bestimmtheit aus, jedoch ohne Beweis. Er sprach ihn aus als ein Axiom, d. h. als eine selbstverständliche aber unbeweisbare Annahme. Er dachte sich eben seinen mathematischen Raum so, daß der Satz Geltung haben sollte.*) Wir gehen sicher, wenn wir ihn vorläufig als für das Endliche geltend annehmen.]

*) Zahlreiche, auch bedeutende Mathematiker haben versucht, diesen Satz und die obigen Parallelensätze in ihrer vollen Geltung zu beweisen. Stets aber wurde von anderen nachgewiesen, daß der angebliche Beweis Trugschlüsse enthielt. Im allgemeinen verwechselte man den wirklichen Weltraum mit dem mathematischen Raume, den man sich willkürlich als den des Euklid, aber auch anders denken kann, ohne daß für die Mathematik des Endlichen Unterschiede entstehen. So kann man sich z. B. die endliche Ebene als ein Stück einer unendlich großen Kugelfläche denken, dann aber läuft die so gedachte Ebene im Unendlichen in sich zurück. Zwei Parallelen verhalten sich dann wie zwei Meridiane, die einander in den beiden unendlich fernen Polen schneiden. Man