Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

b) Die einfachsten geometrischen Konstruktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

(In vielen Lehrbüchern, besonders in den physikalischen, wird von Winkeln π oder $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ usw. gesprochen. Man meint damit Winkel von 180°, bezw. 90°, 60°, 45° usw., denn dabei ist die Größe des am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogens angegeben. Hier soll bei einem Winkel α stets der Winkel in Graden und seinen Bruchteilen gemeint sein, während $\widehat{\alpha}$ den am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogen bedeuten soll. Bogenlängen an Kreisen von beliebigem Radius sollen dagegen mit lateinischen Buchstaben nebst Bogen, z. B. mit $\widehat{a}$ bezeichnet werden, gegebenenfalls mit $\widehat{a}_r$, wenn der Radius r bekannt ist. Es handelt sich bei diesen Unterscheidungen nur um die Vermeidung von Mißverständnissen.)

b) **Die einfachsten planimetrischen Konstruktionen.**

α) Die Zeichengeräte.

57) Die unentbehrlichsten Zeichengeräte sind das Lineal und der Zirkel. Das erstere dient zum Zeichnen gerader Linien mittels des Bleistiftes oder der mit Tusche gefüllten Handreißfeder*). Der Handzirkel dient zum Messen der Längen und zur Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnungen, der Einsatzzirkel mit den Einsatzteilen zum Zeichnen der Kreise und Kreisbogen mit Bleistift oder Reißfeder.

(Daß es auch krummlinige oder Kurvenlineale und Schablonen zum Zeichnen bestimmter Kurven gibt, sei beiläufig bemerkt).

58) Sollen Geraden von gegebener Länge gezeichnet werden, so ist die Länge unmittelbar mit Hilfe eines Maßstabes, oder mittelbar mit Hilfe des Zirkels zu bestimmen, dem man an einem Maßstabe die geforderte Öffnung gibt. Der Maßstab ist entweder nur auf dem Blatte gezeichnet, oder er ist ein Lineal mit metrischer Einteilung, welches also Meter, Dezimeter, Zentimeter, Millimeter angibt. (Vorkursus § 14 bis 16.)

59) Bei technischen Zeichnungen stellt man die Gebilde meist nicht in der wirklichen Größe, sondern in „verkleinertem Maßstabe" dar. Dann wird auf dem Rande des Zeichenblattes ein „verjüngter"

---

*) Die Vorsilbe Reiß hängt mit dem Worte Riß zusammen, denn man spricht vom Grundriß oder Aufriß eines Gebäudes oder einer Maschine oder eines Apparates oder irgend eines räumlichen Gebildes. Solche Risse werden auf dem Reißbrett gezeichnet. Die Zeicheninstrumente gehören zum Reißzeug.

oder „verkleinerter Maßstab" gezeichnet, der angibt, welche Länge z. B. 1 m bedeuten soll. Auf Landkarten für nicht allzugroße Gebiete wird durch den Maßstab angegeben, welche Länge ein Kilometer oder eine geographische Meile bedeuten soll. Man spricht dann vom Maßstabe $\frac{1}{10}$ oder 1 : 10; vom Maßstabe $\frac{1}{10000}$ oder 1 : 10 000 usw. Kleinere Gebilde werden in den naturwissenschaftlichen Lehrbüchern oft in vergrößertem Maßstabe dargestellt, z. B. im zehnfachen Maßstabe ($\frac{10}{1}$ oder 10 : 1) usw.

60) Zur Zeichnung von Kreisen erhält der Einsatzzirkel bestimmte Einsatzteile, für das Zeichnen mit Bleistift den Blei- oder Stifteinsatz, für das Zeichnen mit Tusche oder einer sonstigen gefärbten Flüssigkeit den Reißfeder- oder Federeinsatz.

61) Soll die Zeichnung genau werden, so ist ein ebenes, genau rechtwinkliges Reißbrett mit aufgespanntem Zeichenbogen zu benutzen, auf dem mit Hilfe der Reißschiene senkrechte und wagerechte Linien bequem zu zeichnen sind. Zu den senkrechten Linien benutzt man aber meist das längs der wagerechten Reißschiene bewegliche Winkeldreieck oder den Winkelhaken (Rechtwinkellineal), welches außerdem das bequeme Zeichnen von Linien gestattet, die 45° bezw. 30° und 60° Neigung haben. Lineal und Winkelhaken oder die beiden Arten von Winkelhaken dienen auch zum bequemen Zeichnen von Loten und Parallelen.

62) Schwierig ist das Zeichnen sehr kleiner Kreise. Für diese hat man sogenannte Nullzirkel (oder Nullenzirkel) mit Mikrometerschraube zum Regulieren der Zirkelöffnung und mit feinem Nadeleinsatz zur schärfsten Einhaltung des Kreismittelpunktes konstruiert. Der Einsatz wird durch eine elastische Feder nach dem Zirkel hingedrängt, durch die Schraube von ihm weggedrängt. Federzirkel mit Schraube benutzt man auch zum genauen Messen kleiner Abstände.

63) Zur Zeichnung bezw. Messung von beliebigen Winkeln dient der Transporteur des Reißzeugs, bei dem der Halbkreis in 180 gleiche Teile eingeteilt ist, die also den Winkelgraden entsprechen.*)

64) Das Bestimmen der Längen mit Hilfe des Maßstabs und das der Winkel mit Hilfe des Transporteurs fällt in der Regel ungenau aus. Zur Verschärfung der Ablesung benutzt man den sog. Nonius, womöglich mit mikroskopischer Vorrichtung zum Ablesen.

---

*) Sehr brauchbar zu Längen- und Winkelmessungen ist Simons durchsichtige Meßtafel. D. R. G. M. 80 166.

Darüber ist in der Physik zu sprechen, wohin die Vorrichtungen der Feldmeß- und der astronomischen Instrumente gehören.

65) Selbst beim genauesten Zeichnen mathematischer Figuren stellen sich in der Regel Ungenauigkeiten ein. Diese beruhen teils in den Ungenauigkeiten der Lineale, Winkelhaken und der sonstigen Zeichengeräte, teils im ungenauen Anlegen des Lineals oder Einsetzen der Zirkelspitze, im ungenauen Einstellen der Zirkelöffnung, teils im ungenauen Beurteilen des Schnittpunktes zweier Geraden oder zweier Kreisbogen. Letzteres ist namentlich dann der Fall, wenn die Geraden oder Kreisbogen einander unter sehr kleinen Winkeln schneiden. Daher ist danach zu streben, daß die betreffenden Bestimmungslinien einander möglichst rechtwinklig schneiden. Auch die Breite der gezeichneten Linien gibt zu Ungenauigkeiten Anlaß, ebenso die Ausdehnung der veranschaulichten Punkte.

Im allgemeinen ist das Zirkelzeichnen*) genauer als das Linealzeichnen. Erstrebt man möglichste Genauigkeit, so ist es gut, während der Arbeit Kontrollkonstruktionen (oder Messungen) vorzunehmen und bei der Entdeckung von Abweichungen den Grundfehler aufzusuchen oder wenigstens für möglichste Ausgleichung der Ungenauigkeiten zu sorgen.**)

Man pflegt die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen als exakte zu bezeichnen. Sie sind aber nur in der Vorstellung genau ausführbar, weil, wie schon gesagt, in der Wirklichkeit die gezeichneten Linien eine gewisse Breite haben müssen, um sichtbar zu werden, und weil ebenso die Punkte der Zeichnung durchaus nicht mathematische, ausdehnungslose Gebilde sind. Die praktische Konstruktion ist nur eine rohe Veranschaulichung der mathematischen Konstruktion. Diese setzt gewisse in der Wirklichkeit unerfüllbare Forderungen oder Postulate voraus, die in folgendem besprochen werden.

β) Drei Forderungen (Postulate) der Konstruktionslehre.

66) Erste Forderung: Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden.

---

*) Deshalb hat der italienische Mathematiker Mascheroni (sprich Maskeróni) den erfolgreichen Versuch gemacht, alle Grundkonstruktionen nur mit Hilfe des Zirkels auszuführen. Andere machten den Versuch, alle Konstruktionen mit Hilfe des Lineals allein auszuführen, was aber, wie Steiner fand, nur möglich war, sobald man einen festen Kreis als gegeben annahm.

**) Die sogenannte Geometrographie versucht die Konstruktionen so kurz als möglich auszuführen und mit der Verminderung der Zahl der Ope-

Die Aufgabe ist nur mit Hilfe eines sehr genauen und genau an die Punkte angelegten Lineals und mit scharf gespitztem Bleistift bezw. scharfer Reißfeder mit einiger Genauigkeit auf dem Reißbrett lösbar. Dabei sind folgende Bedingungen zu beachten: 1) Beide Punkte müssen im Endlichen (z. B. auf dem Reißbrett) liegen; 2) die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte darf nicht unendlich klein sein, denn dabei hat man kein hinreichendes Urteil über die dem Lineal zu gebende Richtung. —

Die Gerade kann mit Hilfe des Lineals über die beiden Punkte hinaus verlängert werden.*) Das zwischen den gegebenen Punkten liegende Stück gibt zugleich den gegenseitigen Abstand der Punkte an. Liegt zwischen den Punkten ein Hindernis, soll z. B. auf dem Fußboden einer Werkstätte eine Gerade über eine im Wege stehende Maschine hinaus gezogen werden, so sind besondere Konstruktionen nötig.

67) Zweite Forderung**): Den Schnittpunkt zweier Geraden zu konstruieren.

Die Verlängerung der Geraden muß mit möglichster Genauigkeit erfolgen. Sonst ist über die Genauigkeit der Lösungen dasselbe zu sagen wie vorher. Bedingungen: a) Die beiden Geraden müssen im Endlichen liegen; b) sie dürfen nicht unendlich nahe aneinander liegen, denn dann wird der Schnittpunkt unbestimmt; c) sie dürfen nicht parallel sein, denn dann fällt der Schnittpunkt in unendliche Entfernung. Die Parallelen geben dann nur die Richtung an, in der er liegt. — Der Schnittpunkt wird um so genauer bestimmt, je näher der Schnittwinkel an 90^0 liegt. Von etwaigen Hindernissen gilt dasselbe wie vorher.

68) Dritte Forderung: Um einen gegebenen Punkt einen Kreis von gegebenem Radius zu legen.

---

rationen zugleich die Anzahl der Fehlermöglichkeiten zu verringern. In der Praxis sind aber Kontrollkonstruktionen und Probemessungen nicht zu entbehren.

*) Die Verlängerung wird bisweilen als ein zweites Postulat genannt.

**) Diese zweite Forderung wird in der Regel nicht mit genannt, sie ist aber ebenso wesentlich wie die erste. Das eine Mal handelt es sich um die Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte, das andere Mal um die Bestimmung eines Punktes durch zwei Geraden. Die zweite Forderung ist die reziproke der anderen. (Vertauschung der Worte Linie und Punkt.) Es müssen auch Konstruktionen dafür gelehrt werden, eine Gerade über ein Hindernis hinaus zu verlängern, oder den Schnittpunkt zweier Geraden, der jenseits eines Hindernisses liegt, zu bestimmen.

Der Zirkel ist genau in den Punkt einzusetzen, nachdem die Zirkelöffnung genau gleich der Länge des Radius gemacht ist. Bedingungen: 1) Der Punkt muß im Endlichen liegen. 2) Der Radius darf weder unendlich groß noch unendlich klein sein. — Einen Sonderfall bildet die Aufgabe, um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der durch einen gegebenen Punkt geht.

69) Man könnte noch Nebenforderungen aufstellen, die sich auf die Benutzung des metrisch eingeteilten Maßstabes, des Transporteurs, des Winkeldreiecks beziehen.

γ) Die grundlegenden Konstruktionen.

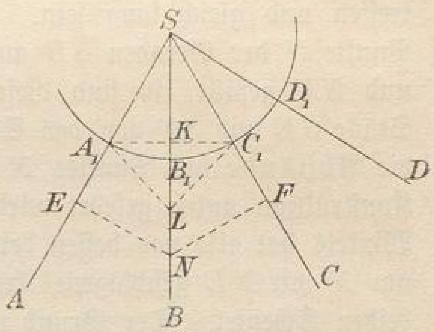
70) Erste Grundkonstruktion: Eine gegebene Gerade (nach der einen ihrer Richtungen) um sich selbst zu verlängern, ihre Länge zu verdreifachen, zu vervierfachen usw.

Der Schüler beschreibe die mit Lineal und Zirkel auszuführende Konstruktion selbst. (Die Teilpunkte sollen durch kleine Kreisbogen markiert werden.)

71) Zweite Grundkonstruktion*): Einen gegebenen Winkel (in einem der beiden Drehungssinne) zu verdoppeln, zu verdreifachen, zu vervierfachen usw.

Auflösung. In Fig. 8 sei ASB der zu vervielfachende Winkel. Man lege um den Scheitel S einen Kreis von beliebigem Radius, der die Schenkel in A_1 und B_1 schneidet, dann schlage man mit der Zirkelöffnung B_1A_1 um B_1 einen Bogen, der den Kreis in C_1 schneidet, dann um C_1 mit derselben Öffnung einen Bogen, der ihn in D_1 schneidet usw. Dann ziehe man die Geraden SC_1, SD_1 usw. Dann ist $\sphericalangle A_1SC_1$ der doppelte Winkel, $\sphericalangle A_1SD_1$ der dreifache usw.

Fig. 8.



Die Richtigkeit der Konstruktion beruht darauf, daß zu gleichen Sehnen eines Kreises gleiche Zentriwinkel gehören.

Bemerkungen. a) Klappt man den Winkel BSC um die Gerade BS, so deckt er sich mit dem Winkel BSA. Man nennt BS die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Winkels ASC.

*) Diese Konstruktion kann als eine reziproke der ersten betrachtet werden.

Bei diesem Umklappen deckt sich SC_1 mit SA_1, sodaß C_1 auf A_1 fällt. Jeder Punkt von SB bleibt dabei in seiner Lage. Zieht man also die Gerade A_1C_1, so deckt sich beim Umklappen ihr Teil KC_1 mit KA_1, sodaß beide gleich lang sind. Ferner deckt sich $\sphericalangle SKC_1$ mit SKA_1, da aber $\sphericalangle A_1KC_1$ ein gestreckter Winkel ist, so muß $\sphericalangle SKA_1$ und ebenso $\sphericalangle SKC_1$ ein Rechter sein. Ferner deckt sich $\sphericalangle SC_1K$ mit SA_1K, beide sind also ebenfalls gleich. (Man nennt ein Dreieck mit gleichen „Schenkeln" A_1S und C_1S ein gleichschenkliges Dreieck. A_1C_1 heißt seine Grundlinie oder Basis. Aus der Figur lassen sich also Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks ablesen, die der Schüler schon jetzt selbständig auszusprechen versuche; z. B. die Winkel an der „Grundlinie" des gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich. Man bezeichnet diese Winkel als Basiswinkel. Sind umgekehrt zwei Dreieckswinkel einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig, denn es hat eine Symmetrieachse.)

b) Verbindet man einen beliebigen Punkt L von SB mit A_1 und C_1, so decken einander bei jenem Umklappen auch die Geraden A_1L und C_1L. Jeder Punkt der Geraden SB ist also von A_1 und C_1 gleich weit entfernt. Man nennt SB, weil es das in der Mitte K von A_1C_1 auf dieser Linie errichtete Lot ist, die Mittelsenkrechte oder das Mittellot von A_1C_1. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Geraden ist also von deren Endpunkten gleich weit entfernt.

c) Macht man ferner $SE = SF$ und denkt man sich in E und F auf diesen Linien Lote errichtet, so decken sich bei jenem Umklappen diese Lote, sie müssen sich also in einem Punkte N der Geraden SB treffen und gleich lang sein. Denkt man sich umgekehrt von einem Punkte N der Geraden SB auf die Geraden SA und SC Lote NE und NF gefällt, so sind diese gleich lang und sie schneiden gleiche Stücke SE und SF von den Schenkeln ab. Man nennt NE und NF die Abstände des Punktes N von den Geraden AS und CS, deren Konstruktion unten gelehrt wird. Jeder Punkt der Halbierenden eines Winkels hat also von dessen beiden Schenkeln denselben Abstand. (Der um N mit NE geschlagene Kreis geht auch durch F und berührt die beiden Schenkel. Der Grund wird unten auseinandergesetzt.)

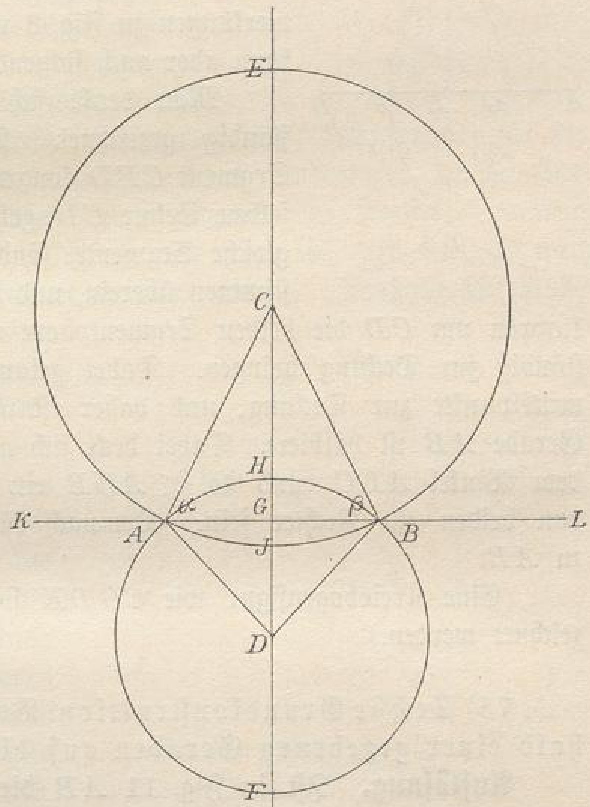
Die Symmetrielinie SB eines Winkels ASC oder seiner Halbierungslinie hat also sehr bemerkenswerte Eigenschaften, die sofort Benutzung finden sollen.

72) Dritte Grundkonstruktion: Einen Winkel zu halbieren.

Auflösung. Ist in Fig. 8 $\sphericalangle ASC$ der zu halbierende Winkel, so lege man um den Scheitel S einen Kreisbogen von beliebigem Radius, der die Schenkel in A_1 und C_1 schneidet. Darauf schlage man um A_1 und C_1 mit derselben (oder einer anderen) Zirkelöffnung Kreisbogen, die einander in einem Punkte L schneiden. Verbindet man L mit S, so hat man den Winkel halbiert.

Die Richtigkeit folgt aus den obigen Bemerkungen. (Beiläufig ergibt sich folgendes: Stehen über derselben Grundlinie zwei verschiedene, gleichschenklige Dreiecke, so ist die Verbindungslinie ihrer Spitzen das Mittellot der Grundlinie.)

Fig. 9.



Ist der gegebene Winkel ein gestreckter, so erhält man durch diese Konstruktion einen rechten Winkel.

Dadurch ist also folgende Aufgabe gelöst:

73) Vierte Grundkonstruktion: Auf einer Geraden in einem gegebenen Punkte G ein Lot zu errichten.

Auflösung. Man schneide von G aus auf der Geraden nach beiden Richtungen gleiche Stücke ab. Um die Schnittpunkte schlage man mit einer größeren Zirkelöffnung Kreisbogen, die einander auf beiden Seiten der Geraden schneiden. Verbindet man die neuen Schnittpunkte durch eine Gerade, so hat man das gesuchte Lot errichtet. (Die Konstruktion ist in Fig. 9 enthalten, wenn man sich $AC = AD$ denkt.)

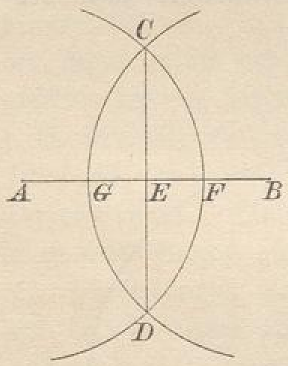
Eines neuen Beweises bedarf es nicht. (Eine zweite Lösung soll später gegeben werden. Welche Folgerungen ergeben sich für das gleichschenklige Dreieck?)

Daraus ergibt sich noch die Lösung der folgenden Aufgabe.

74) Fünfte Grundkonstruktion: Eine gegebene Gerade zu halbieren (und zugleich ihr Mittellot zu konstruieren).

Auflösung. Ist AB in Fig. 10 die gegebene Gerade, so schlage man um A und B mit derselben (hinreichend großen) Zirkelöffnung Kreise, die einander auf beiden Seiten der Geraden in Punkten C und D schneiden. Verbindet man die Punkte C und D durch eine Gerade, so hat man die Mittelsenkrechte gezeichnet und durch ihren Schnittpunkt E mit AB zugleich den Halbierungspunkt gefunden.

Fig. 10.



Die Richtigkeit ergibt sich aus den Bemerkungen zu Fig. 8 und zu 72) und 73). Sie kann aber auch folgendermaßen bewiesen werden:

Man denke sich die beiden Kreise vollständig gezeichnet. Dann ist nicht nur das Segment CFD kongruent CGD, denn zu derselben Sehne CD gehören bei gleichen Kreisen gleiche Segmente, sondern auch die Restsegmente stimmen überein, und daher lassen sich durch Umklappen um CD die beiden Segmentpaare und damit die Kreise vollständig zur Deckung bringen. Dabei gelangen aber auch die Kreismittelpunkte zur Deckung, und daher ist EB gleich EA, d. h. die Gerade AB ist halbiert. Dabei deckt sich auch der Winkel BEC mit dem Winkel AEC, und da $\sphericalangle\, AEB$ ein gestreckter ist, muß jeder von beiden ein Rechter sein. Demnach ist CD die Mittelsenkrechte zu AB.

(Eine Kreisbogenfigur wie $CGDF$ soll als Doppelsegment bezeichnet werden.)

75) Sechste Grundkonstruktion: Von einem Punkte außerhalb einer gegebenen Geraden auf diese ein Lot zu fällen.

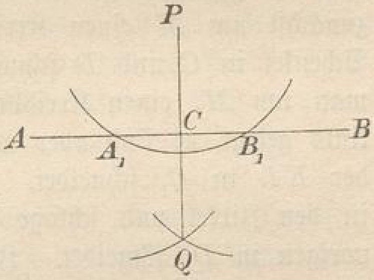
Auflösung. Ist in Fig. 11 AB die gegebene Gerade, P der gegebene Punkt, so schlage man mit einer hinreichend großen Zirkelöffnung um P einen Kreis, der AB in zwei Punkten A_1 und B_1 schneidet. Um A_1 und B_1 schlage man mit derselben (oder einer anderen) Zirkelöffnung Kreise, die einander in einem Punkte Q auf der anderen Seite der Geraden schneiden. Verbindet man P mit Q, so hat man auch das gesuchte Lot PC.

Die Richtigkeit ergibt sich daraus, daß PQ die Mittelsenkrechte von A_1B_1 ist.

Bemerkung. Legt man um P einen Kreis mit dem Radius PC und dann einen Kreis mit kleinerem und einen Kreis mit größerem

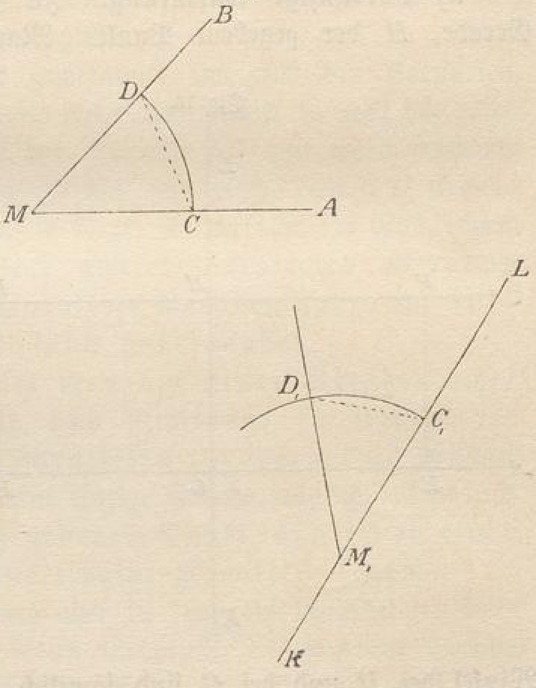
Radius, so liegt der größere Kreis ganz außerhalb des Kreises mit Radius PC und schneidet die Gerade in zwei Punkten, die so rechts und links von C liegen, daß die Schnittpunkte gleich weit von C entfernt sind. (PQ ist Symmetrielinie.) Der kleinere Kreis dagegen liegt ganz innerhalb des mit PC geschlagenen Kreises. Der letztere trennt also die um P geschlagenen Kreise welche die Gerade AB schneiden, von den Kreisen, die AB überhaupt nicht treffen; er ist der einzige um P geschlagene Kreis, der AB nur in einem Punkte trifft, oder wie man sagt, **berührt**. AB liegt sonst ganz außerhalb dieses Kreises und heißt seine **Tangente** (Berührende) für den Punkt C. Errichtet man also auf einem Radius in dessen Endpunkte ein Lot, so ist dieses eine Tangente des Kreises. Zugleich sieht man, daß PC **die kürzeste Gerade ist, die von** P **nach der Geraden** AB **gezogen werden kann.** Deshalb ist es berechtigt, PC als **den Abstand des Punktes** P **von der Geraden** zu bezeichnen.

Fig. 11.



An Fig. 11 erkennt man, daß die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit der Sehnenmitte den Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne gibt. Bei der Deckung gleicher Segmente oder Bogen oder Sektoren eines Kreises decken sich auch die zugehörigen Sehnen und die Sehnenmitten. Daher decken einander auch die Abstände der Sehnen vom Kreismittelpunkte. Den unter 48) genannten Sätzen kann also noch folgender beigefügt werden: **Bei jedem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Mittelpunktsabstände, zu gleichen Abständen vom Mittelpunkte gehören gleiche Sehnen.**

Fig. 12.



76) Siebente Grundkonstruktion. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte (nach einer der vier vorhandenen Möglichkeiten) anzutragen.

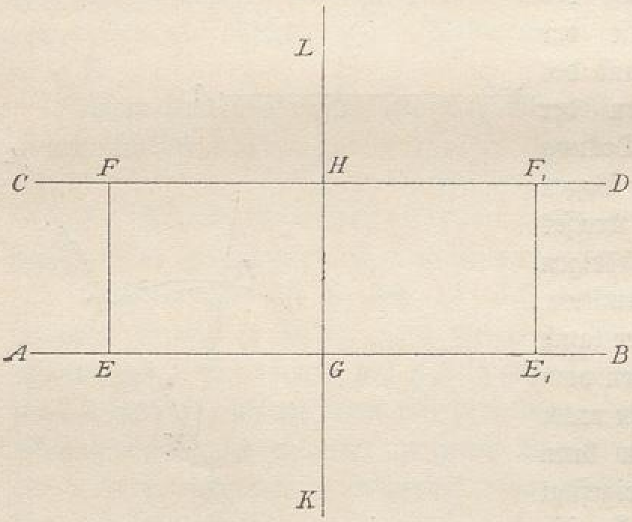
Auflösung. Ist in Fig. 12 AMB der gegebene Winkel, ist KL die gegebene Gerade und M_1 der gegebene Punkt, so schlage man zunächst um M einen Kreisbogen von beliebigem Radius, der die Schenkel in C und D schneidet. Mit derselben Zirkelöffnung schlage man um M_1 einen Kreisbogen (in der Figur ist er nach oben und links gelegt, es sind aber noch drei andere Möglichkeiten vorhanden), der KL in C_1 schneidet. Dann nehme man die Entfernung CD in den Zirkel und schlage damit einen Kreisbogen um C_1, der den vorigen in D_1 schneidet. Zieht man M_1D_1, so ist $C_1M_1D_1$ der angetragene Winkel.

Die Richtigkeit der Konstruktion folgt daraus, daß zu gleichen Sehnen CD und C_1D_1 gleich großer Kreise gleiche Zentriwinkel gehören.

77) Achte Grundkonstruktion. Zu einer gegebenen Geraden durch einen (außerhalb dieser) gegebenen Punkt eine Parallele zu legen.

α) **Vorläufige Auflösung.** In Fig. 13 sei AB die gegebene Gerade, H der gegebene Punkt. Man fälle von H auf AB ein Lot HG und errichte auf diesem in H ein Lot CHD, dann ist CD die gesuchte Parallele.

Fig. 13.



Beweis. Man denke sich AB und CD bis ins Unendliche verlängert. Denkt man sich dann die linke Hälfte der Figur um BG geklappt, so kann man sie mit der rechten Hälfte zur Deckung bringen, denn die Winkel bei H und bei G sind sämtlich rechte Winkel. Angenommen nun, auf der linken Seite hätten HC und GA einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt P, so müßte sich dieser mit einem symmetrisch gelegenen Schnittpunkte P_1 decken, in dem sich HD

und GB schneiden müßten. Dann aber hätte man zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten P und P_1 zwei getrennte gerade Verbindungslinien. Dies ist aber unmöglich. Daher ist auch ein endlicher Schnittpunkt P auf der linken Seite unmöglich und ebenso aus Gründen der Kongruenz ein endlicher Schnittpunkt P_1 auf der rechten Seite. Demnach sind die Geraden AB und CD Linien, die, soweit man sie auch verlängert, keinen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Solche Linien heißen aber parallele, sobald sie in derselben Ebene liegen, und dies ist hier der Fall. (Ebene der Zeichnung.)

Bemerkungen. a) Man hat damit den Satz gefunden: In der Ebene sind Lote auf derselben Geraden parallel. Umgekehrt folgt: Zwei Parallelen haben unendlich viele gemeinschaftliche Lote.

b) Bei dem obigen Umklappen decken sich zwei Punkte E und E_1, sobald $GE = GE_1$ ist. Fällt man von E und E_1 aus Lote EF und E_1F_1 auf CD, so sind beide gemeinschaftliche Lote der Parallelen AB und CD. Beim Umklappen um GH decken sich mit den Punkten E und E_1 zugleich die Lote EF und E_1F_1, weil die rechten Winkel GEF und $G_1E_1F_1$ aufeinander fallen. Folglich sind die Abstände EF und E_1F_1 einander gleich.

Denkt man sich aber das gemeinsame Lot GH der Parallelen an anderer Stelle gezeichnet, z. B. mehr nach rechts, so deckt sich beim Umklappen um das neue GH der Abstand EF mit einem anderen Lote E_2F_2, welches wiederum gleich EF sein muß. Da GH unendlich viele Lagen annehmen kann, so folgt: Sämtliche im Endlichen liegenden gemeinsamen Lote zweier parallelen Geraden sind einander gleich; oder: Parallele Geraden haben im Endlichen überall denselben Abstand voneinander.

c) Ferner folgt: Errichtet man auf einer Geraden zwei Lote von derselben Länge und Richtung, so liegen die freien Endpunkte in einer Parallelen zur Geraden. Zwischen diesen Endpunkten ist aber nur eine einzige Gerade möglich. Demnach gilt der Satz: Durch einen gegebenen Punkt läßt sich zu einer gegebenen Geraden nur eine einzige Parallele legen.

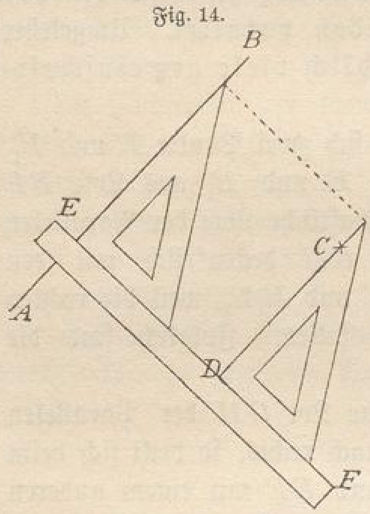
Ist das zweite Lot zu kurz oder zu lang, so schneidet die verlängerte Verbindungslinie der freien Endpunkte die gegebene Gerade in einem endlichen Punkte, das eine Mal in der Richtung nach dem zweiten Lote hin, das andere Mal in entgegengesetzter Richtung.

d) Das Viereck EFF_1E_1 bezeichnet man als ein Rechteck, weil es vier rechte Winkel hat. KL ist die eine Mittellinie oder

Symmetrieachse des Rechtecks. Wo liegt die zweite? Zieht man die Gerade EF_1, so zerlegt man das Rechteck in zwei kongruente Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke muß die Winkelsumme gleich zwei Rechten sein, weil die des Rechtecks gleich vier Rechten ist. Dabei ist $\sphericalangle E_1F_1F = \sphericalangle F_1EE_1$. Was folgt daraus für schräge Linien an Parallelen? EF_1 heißt eine Diagonale des Rechtecks, eine zweite ist E_1F. Der Schüler versuche schon jetzt selbständig die Eigenschaften des Rechtecks und seiner Mittellinien und Diagonalen abzuleiten.

e) Fig. 14 zeigt, wie man mit Hilfe des Lineals und des Winkelhakens zu AB durch den Punkt C eine Parallele zieht.

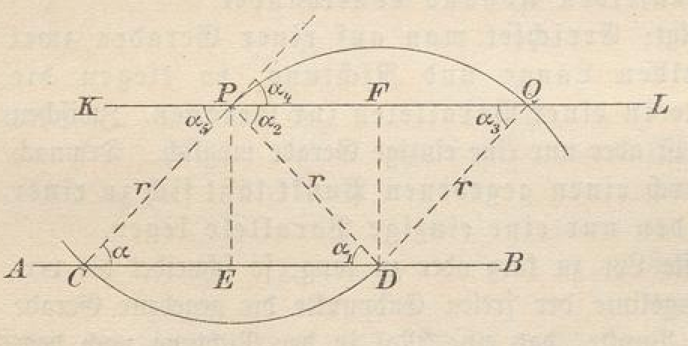
Fig. 14.



Man legt den Winkelhaken mit dem einen Schenkel genau an die Gerade AB an, an den anderen Schenkel wird das Lineal EF angelegt und fest auf das Reißbrett gedrückt. Dann verschiebt man den Winkelhaken längs des Lineals, bis der Punkt C in der gezeichneten Weise sichtbar wird. Man hält den Winkelhaken in der richtigen Lage fest und zeichnet CD, was die gesuchte Parallele gibt. — (Auch mit anders angelegtem Winkelhaken kann man die Parallele ziehen, was bisweilen bequemer ist.)

β) **Kürzere Auflösung.** Man schlage um P einen Kreisbogen mit beliebigem Radius r, der AB in C und D schneidet, schlage um D einen Kreisbogen mit demselben Radius (der also durch P geht), nehme CD in den Zirkel und schlage damit, wie es Fig. 15 zeigt, einen Kreisbogen um P, der den Schnittpunkt Q gibt. Zieht man dann PQ, so ist dies die gesuchte Parallele.

Fig. 15.



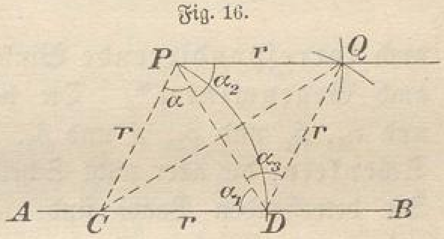
Beweis. Zu gleichen Sehnen CD und PQ gleicher Kreise gehören kongruente Sektoren, also lassen sich die Sektoren PCD und DQP (und damit die gleichschenkligen Dreiecke PCD und DQP) zur Deckung bringen

Dabei decken einander auch die Mittelsenkrechten von CD und PQ, sodaß der Abstand PE auf den Abstand DF fällt. Da demnach die Lote EP und DF gleich lang sind, ist PF und damit PQ parallel zu AB.

Bemerkungen. In Fig. 15 ist (nach 71a) $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$, ebenso $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha_3$, also der Deckung wegen $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und $\sphericalangle CPD = \sphericalangle PDQ$. Man erhält demnach die Linie PQ auch dadurch, daß man den Winkel DPQ oder α_2 gleich dem Winkel CDP oder α_1 macht. Der Schüler zeige, daß auch $\sphericalangle QDB = \alpha$, also $DQ \parallel CP$ ist, sodaß die Berechtigung vorliegt, das Viereck $CDQP$ als ein Parallelogramm zu bezeichnen. Er versuche schon jetzt selbständig Eigenschaften des Parallelogramms und seiner Diagonalen aufzufinden. Besonders gilt der Satz: Die Gegenseiten eines Parallelogramms sind gleich und parallel, oder: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. — Auch die Winkel α_4 und α_5 sind gleich α. KL und AB sind also parallel, wenn gewisse Winkel gleich sind. Welche?

γ) Man kann auch mit einer einer einzigen Zirkelöffnung zum Ziele kommen: Man nehme auf AB einen beliebigen Punkt C an, schlage um C mit der Zirkelöffnung CP einen Kreisbogen, der in D schneidet, um P und D schlage man Kreisbogen mit derselben Öffnung, die den Schnittpunkt Q geben. PQ ist die gesuchte Parallele.

Fig. 16.



Die Richtigkeit folgt daraus, daß CQ die Mittelsenkrechte zu PD ist, wobei, wie früher, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$ ist. Weil nämlich wieder $\alpha_2 = \alpha_1$ ist, muß $PQ \parallel CD$ sein.

Bemerkung. Ist umgekehrt $PQ \#\ CD$, so muß $PC \#\ DQ$, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und $PD \perp CQ$ sein ($\#$ soll heißen gleich und parallel). Das Viereck $CDQP$ hat lauter gleiche und paarweise parallele Seiten. Es heißt eine Raute oder ein Rhombus. Der Schüler versuche schon jetzt selbständig Eigenschaften des Rhombus und seiner Diagonalen aufzufinden.

c) Bemerkungen über parallele Geraden und über die Winkelsumme des Dreiecks.

α) Die Parallelensätze.

78) Aus den letzten Konstruktionen und der Schlußbemerkung ergibt sich für Fig. 17 folgendes: