Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

θ) Begriff des Winkels in der Ebene

gilt der Satz: *Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Segmente.**) Man kann nämlich die Sehnen zur Deckung bringen, mit ihnen auch die Kreisbogen und ihre Mittelpunkte, folglich auch die von Sehne und Bogen umschlossenen Flächen. Umgekehrt gehören zu gleichen Segmenten eines Kreises gleiche Sehnen.

48) Den von zwei Radien begrenzten Teil einer Kreisfläche bezeichnet man als *Kreisausschnitt* oder *Kreissektor*. Durch zwei Radien wird die Kreisfläche in zwei Sektoren zerlegt. Nur wenn die beiden Radien einen Durchmesser bilden, sind die beiden Sektoren einander gleich (Halbkreisflächen). Sonst sind sie ungleich. Der kleinere Sektor kann soweit um den Mittelpunkt gedreht werden, daß er ganz innerhalb des größeren liegt. Gewöhnlich meint man bei Angabe eines Sektors den kleineren. *Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sektoren.**) Bringt man nämlich die gleichen Bogen zur Deckung, so hat man auch die zugehörigen Radien zur Deckung gebracht. Umgekehrt gilt der Satz: *Zu gleichen Sektoren eines Kreises gehören gleiche Bogen.*

49) Im ganzen gelten also folgende Sätze:

Bei jedem Kreise gehören

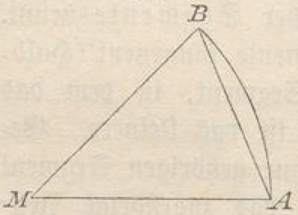
zu	gleichen	Sehnen	gleiche	Bogen,	gleiche	Segmente,	gleiche	Sektoren;
"	"	Bogen	"	Sehnen,	"	Segmente,	"	Sektoren;
"	"	Segmenten	"	Sehnen,	"	Bogen,	"	Sektoren;
"	"	Sektoren	"	Sehnen,	"	Bogen,	"	Segmente.

Statt gleich kann man hier überall kongruent sagen.

ϑ) Begriff des Winkels in der Ebene.

50) Gehen von einem festen Punkte der Ebene zwei Strahlen aus, ein in ihr festliegender und ein in ihr um den Punkt drehbarer, so kann man den letzteren zunächst mit dem ersteren zur Deckung bringen und dann in zweierlei Sinne von ihm wegdrehen. Die Drehung kann nämlich im Sinne der Uhrzeigerbewegung und auch im entgegengesetzten Sinne erfolgen.**) Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt des bewegten Strahles einen Kreis, der sich schließt, sobald der Strahl eine *volle Umdrehung* gemacht hat. Dieses Schließen

Fig. 5.



*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Segmentpaare" oder: „gleiche Sektorenpaare" usw.

**) Vielfach bezeichnet man die der Uhrzeigerbewegung entsprechende erfolgt für alle Teile des Strahles gleichzeitig. Ebenso vollenden alle Punkte des bewegten Strahles gleichzeitig eine halbe Umdrehung, oder eine drittel Umdrehung, oder zwei Drittel einer Umdrehung usw. Jeder Lage entspricht also für alle Punkte des Strahles ein bestimmter Bruchteil bezw. ein bestimmtes Vielfaches einer vollen Umdrehung (z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$ Umdrehung). Gewöhnlich spricht man nur von (echten) Bruchteilen der Umdrehung, da sich beim Überschreiten der Anfangslage der Vorgang noch einmal oder mehrfach wiederholt. Jenen Bruchteil der vollen Umdrehung bezeichnet man auch als die Abweichung des bewegten Strahles vom festen Strahle, oder als den Richtungsunterschied beider Strahlen, oder als den Winkel, den beide Strahlen mit-

Fig. 6.

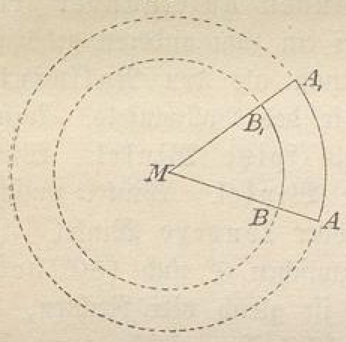
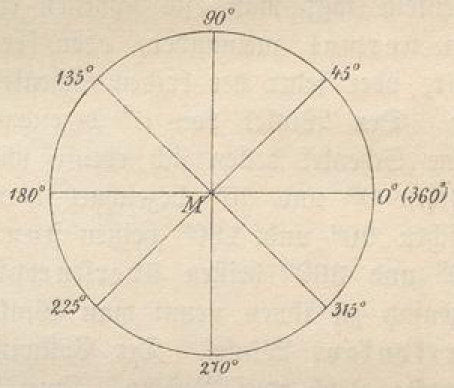


Fig. 7.



einander bilden. Die gezeichneten Teile der beiden Strahlen nennt man die Schenkel des Winkels. Ihre Länge ist vollständig gleichgültig und hat keinen Einfluß auf die Größe der Drehung oder auf die Größe des Winkels. Der Winkel ist lediglich das Maß der (besprochenen) Drehung. Der Drehungspunkt heißt Scheitelpunkt oder kürzer Scheitel des Winkels. (Fig. 6.)

51) Im Vorkursus (Abschnitt VI) ist gezeigt worden, wie man teils durch Konstruktion, teils durch Versuche*) einen Kreis in 2, 3,

Drehung als die negative Drehung, die entgegengesetzte als die positive Drehung. Andere sprechen bezw. von Rechtsdrehung und Linksdrehung.

*) Man kann zwar gewisse Kreisteilungen mit Zirkel und Lineal exakt (andere mit Hilfe gewisser Kurven annäherungsweise) ausführen. Im allgemeinen sind aber die Teilungen in 7, 9, 11, 13, 19, 23, 25 usw. Teile nur auf dem Wege des probeweisen Absteckens mit Hilfe des Zirkels mit einiger Annäherung durchführbar, worüber im Schlußbande zu sprechen ist. Merkwürdig ist, daß auch die Grundlage der Gradeinteilung, der 360. Teil des Kreises, nur annäherungsweise bestimmt werden kann.

4, 5, 6, 7, 8, 9, ... Teile zerlegen kann. Verbindet man die Endpunkte eines solchen Teiles durch Radien mit dem Kreismittelpunkte, so erhält man Winkel von entsprechender Größe, sodaß die Kreisteilung und die Winkelkonstruktion eng zusammenhängen. Winkel, die von zwei Radien eines Kreises gebildet werden, heißen Zentriwinkel. Durch die (angenäherte) Konstruktion des 360-Ecks erhält man zugleich den Winkel, den man als einen Winkelgrad bezeichnet. Die volle Umdrehung gibt einen Winkel von 360^0, er heißt Vollwinkel. Seine Schenkel decken einander (vgl. Fig. 7). Die halbe Umdrehung gibt einen Winkel von 180^0, er heißt gestreckter Winkel. Seine Schenkel haben entgegengesetzte Richtungen und fallen daher in dieselbe gerade Linie. Der vierte Teil der Umdrehung gibt den Winkel von 90^0. Dieser heißt der rechte Winkel oder einfach der Rechte. Von seinen Schenkeln sagt man, sie schnitten einander rechtwinklig, oder sie seien normal zueinander, oder sie ständen aufeinander senkrecht, oder jeder der beiden Schenkel sei ein zum anderen gehöriges Lot. Den Winkel von 0^0 bezeichnet man als den Nullwinkel. Seine Schenkel decken sich ebenso wie die des Vollwinkels. Winkel zwischen 0^0 und 90^0 bezeichnet man als spitze Winkel. Winkel zwischen 90^0 und 180^0 heißen stumpfe Winkel. Winkel zwischen 180^0 und 360^0 heißen überstumpfe oder konvexe Winkel. Im Gegensatz zu ihnen nennt man Winkel zwischen 0^0 und 180^0 hohle oder konkave Winkel. Der Vollwinkel ist gleich vier Rechten, der gestreckte gleich zwei Rechten. Zwei Winkel heißen gleich, wenn ihre Schenkel sich (abgesehen von der Länge) zur Deckung bringen lassen.

52) Ist die Summe zweier Winkel gleich 360^0, so heißt jeder der Restwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich 180^0, so heißt jeder der Supplementwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich 90^0, so heißt jeder der Komplementwinkel des anderen.

53) [Den sechzigsten Teil eines Winkelgrades bezeichnet man als Minute, den sechzigsten Teil der Minute als Sekunde (den sechzigsten Teil der Sekunde als Tertie) usw. (Erste, zweite, dritte Verminderung.) So sagt z. B. $\sphericalangle \alpha = 22^0 23' 35''$, der Winkel α zähle 22 Grad 23 Minuten 35 Sekunden. (Drei Striche würden Tertien bedeuten.) Man kann aber den Winkel auch in Dezimalbruchform schreiben, z. B. $\sphericalangle \beta = 39^0{,}51$.] Unter $\sphericalangle ABC$ versteht man einen Winkel, dessen Scheitel der Punkt B ist, während A und C die Endpunkte der Schenkel sind. Der Scheitel wird also stets in der Mitte genannt.

54) Durch Verlängerung eines Winkelschenkels über den Scheitel hinaus erhält man den Nebenwinkel des Winkels, der zugleich ein Supplementwinkel des gegebenen Winkels ist. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man zwei einander gleiche Nebenwinkel, außerdem den Scheitelwinkel. Dieser ist dem gegebenen Winkel gleich, denn er ist wie jener der Supplementwinkel für jeden der beiden Nebenwinkel.

55) Aus Gründen der Regelmäßigkeit des Kreises folgt: Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren. Bringt man nämlich zwei gleiche Zentriwinkel zur Deckung, so fallen die Endpunkte ihrer Radien paarweise zusammen, ebenso die Endpunkte der zugehörigen Sehnen, der zugehörigen Bogen. Danach läßt sich die unter 49) gegebene Tabelle erweitern.

56) Den halben Umfang des Kreises vom Radius 1 bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π. Der Umfang ist also $u = 2\pi$. Wird der Kreis z. B. im 7=fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang $u = 2 \cdot 7 \cdot \pi$; wird er im r=fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang $u = 2r\pi$. Zunächst durch Messung (durch Umlegen eines möglichst dünnen Fadens um eine Kreisscheibe) findet man, daß π ungefähr gleich $\frac{22}{7}$ oder ungefähr 3,14 ist.*) Jedem Bogen des Kreises vom Radius 1, der ein bestimmter Bruchteil des Kreisumfangs ist, entspricht also ein Winkel (Zentriwinkel), der denselben Bruchteil von 360^0 gibt. So entsprechen einander z. B. $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{360^0}{6} = 60^0$; $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{360^0}{5} = 72^0$ usw. Man sagt daher: Ein Winkel β^0 verhält sich zum Winkel 360^0 ebenso, wie der zugehörige Bogen $\widehat{\beta}$ jenes Kreises zum Bogen 2π; oder: Ein Winkel β^0 verhält sich zum Winkel 180^0 ebenso, wie der zugehörige Bogen $\widehat{\beta}$ zum Bogen π. Diesen Satz stellt man in folgender Schreibweise (als folgende Proportion) dar:

$$\beta^0 : 180^0 = \widehat{\beta} : \pi.$$

*) Ein genauerer Wert ist $\pi = 3{,}14159265\ldots$ Archimedes (geboren 287 v. Chr. zu Syrakus) nahm $\frac{22}{7}$ an, was $3{,}142857\ldots$ gibt, also etwas zu groß ist. Ein weit genauerer Näherungswert ist $\frac{355}{113}$. Dieser gibt $3{,}1415929\ldots$, was schon auf 7 Stellen stimmt, für die gewöhnlichen Berechnungen also vollständig ausreicht. Die Berechnung von π wird später gelehrt.

Zur Umrechnung von Winkeln in Bogen und von Bogen in Winkel braucht man also die Formeln*)

$$\beta^0 = \frac{\widehat{\beta}}{\pi} 180^0, \quad \widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}.$$

So gehört z. B. zum Bogen $\widehat{\beta} = 1$ der Winkel $\beta^0 = \frac{1}{\pi} 180^0 = 57^0,295 = 57^0 17',70 = 57^0 17' 42''$.**) Derselbe Winkel gehört zum Bogen $\widehat{b} = r \cdot \widehat{\beta} = r \cdot 1$ am Kreise mit Radius r.

(Den Kreisumfang berechnet man aus dem Radius nach der obigen Formel $u = 2r\pi$, den Kreisradius aus dem Umfange nach der Formel $r = \frac{u}{2\pi}$.***)

Zum Winkel 1^0 gehört (am Kreise mit Radius 1) der Bogen $\widehat{\beta} = \pi \frac{1^0}{180^0} = \frac{\pi}{180} = 0,017453$, am Kreise mit Radius r dagegen der r-fache Bogen.

(Bezeichnet man den am Kreise mit Radius r gemessenen Bogen mit $\widehat{b}_r$, den am Radius 1 gemessenen wieder mit $\widehat{\beta}$, so hat man die Formeln $\widehat{b}_r = r\widehat{\beta}$, $\beta = \frac{\widehat{b}_r}{r}$. Die obigen Umrechnungsformeln für den Kreis mit Radius r werden dann

$$\beta^0 = \frac{\widehat{b}_r}{r\pi} 180^0, \quad \widehat{b}_r = r\pi \frac{\beta^0}{180^0},$$

die mit den obigen übereinstimmen, sobald man den Wert $r\widehat{\beta}$ für $\widehat{b}_r$ einsetzt.)

---

*) Die Gradbezeichnungen heben sich in der Formel $\widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}$ auf, man kann sie also in der Form $\widehat{b} = \pi \frac{\beta}{180}$ schreiben, nur muß dann gesagt werden, daß der Winkel in Graden ausgedrückt ist, z. B. $\beta = 20^0,3$, nicht etwa $\beta = 20^0 18'$ oder $1218'$.

**) Man vergesse nie, daß der Bogen $\widehat{b}$ am Kreise vom Radius 1 gemessen wird. Bei ungenauen Werten von π findet man nicht so genaue Resultate. Die Bruchteile der Sekunden sind hier vernachlässigt.

***) Nimmt man also den Erdumfang als 5400 geographische Meilen an, so hat der Erdradius eine Länge von 859,43 geographischen Meilen. Nimmt man den Erdumfang zu 40 000 000 m an, so hat der Erdradius eine Länge von 6 366 200 m. Dabei ist der genauere Wert von π zugrunde gelegt und eine Genauigkeit auf fünf Stellen erstrebt. — Der Äquatorgrad hat für die Erde eine Länge von $\frac{5400}{360} = \frac{2700}{180} = 15$ geogr. Meilen. Für jede Reise längs des Äquators kann man also die Länge aus den Graden und die Grade aus der Länge berechnen.

(In vielen Lehrbüchern, besonders in den physikalischen, wird von Winkeln π oder $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ usw. gesprochen. Man meint damit Winkel von 180^0, bezw. 90^0, 60^0, 45^0 usw., denn dabei ist die Größe des am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogens angegeben. Hier soll bei einem Winkel α stets der Winkel in Graden und seinen Bruchteilen gemeint sein, während $\widehat{\alpha}$ den am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogen bedeuten soll. Bogenlängen an Kreisen von beliebigem Radius sollen dagegen mit lateinischen Buchstaben nebst Bogen, z. B. mit $\widehat{a}$ bezeichnet werden, gegebenenfalls mit $\widehat{a}_r$, wenn der Radius r bekannt ist. Es handelt sich bei diesen Unterscheidungen nur um die Vermeidung von Mißverständnissen.)

b) Die einfachsten planimetrischen Konstruktionen.

α) Die Zeichengeräte.

57) Die unentbehrlichsten Zeichengeräte sind das Lineal und der Zirkel. Das erstere dient zum Zeichnen gerader Linien mittels des Bleistiftes oder der mit Tusche gefüllten Handreißfeder*). Der Handzirkel dient zum Messen der Längen und zur Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnungen, der Einsatzzirkel mit den Einsatzteilen zum Zeichnen der Kreise und Kreisbogen mit Bleistift oder Reißfeder.

(Daß es auch krummlinige oder Kurvenlineale und Schablonen zum Zeichnen bestimmter Kurven gibt, sei beiläufig bemerkt).

58) Sollen Geraden von gegebener Länge gezeichnet werden, so ist die Länge unmittelbar mit Hilfe eines Maßstabes, oder mittelbar mit Hilfe des Zirkels zu bestimmen, dem man an einem Maßstabe die geforderte Öffnung gibt. Der Maßstab ist entweder nur auf dem Blatte gezeichnet, oder er ist ein Lineal mit metrischer Einteilung, welches also Meter, Dezimeter, Zentimeter, Millimeter angibt. (Vorkursus § 14 bis 16.)

59) Bei technischen Zeichnungen stellt man die Gebilde meist nicht in der wirklichen Größe, sondern in „verkleinertem Maßstabe" dar. Dann wird auf dem Rande des Zeichenblattes ein „verjüngter"

*) Die Vorsilbe Reiß hängt mit dem Worte Riß zusammen, denn man spricht vom Grundriß oder Aufriß eines Gebäudes oder einer Maschine oder eines Apparates oder irgend eines räumlichen Gebildes. Solche Risse werden auf dem Reißbrett gezeichnet. Die Zeicheninstrumente gehören zum Reißzeug.