Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

ζ) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie nämlich zwei solche, so würden zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten zwei Geraden möglich sein, was dem in 21) angegebenen Satze widerspräche.

24) Zwei gleich lange Geraden können auf zweierlei Art zur Deckung gebracht werden. Ist AB die eine Gerade, $A_1 B_1$ die andere, so kann man AB sowohl auf $A_1 B_1$ als auch auf $B_1 A_1$ legen. Statt dieses Satzes sagt man auch: Zwei Geraden von derselben Länge sind auf zweierlei Art kongruent.

25) Eine nur einseitig begrenzte Gerade bezeichnet man als Strahl. Den Grenzpunkt bezeichnet man als seinen Ausgangspunkt oder Anfangspunkt. Seine Richtung geht von diesem aus ins Unendliche. So kann man sich z. B. vom Auge aus nach jedem Punkte des scheinbaren Himmelsgewölbes eine Gerade gezogen und diese bis ins Unendliche verlängert denken. Allgemeiner gilt:

Von jedem Raumpunkte gehen unendlich viele Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das Strahlenbündel des Punktes. Durch das Strahlenbündel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen im Raume angegeben.

26) Linien, die nicht alle Eigenschaften der Geraden besitzen, nennt man krumme Linien oder Kurven. (Man vgl. Vorkursus § 11—16.)

ξ) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie.

27) Eine Ebene ist eine unbegrenzte Fläche, in der sich von jedem ihrer Punkte aus nach jedem andern (ihrer Punkte) eine Gerade ziehen läßt, die nirgends, auch in ihrer Verlängerung nicht, aus dieser Fläche heraustritt.

28) Von jedem Punkte der Ebene gehen also unendlich viele ganz in ihr liegende Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das (ebene) Strahlenbüschel des Punktes. Durch dieses Strahlenbüschel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen in der Ebene angegeben.

29) Das Auge kann in Lagen gebracht werden, in denen ihm ein irgendwie begrenztes Stück der Ebene als eine gerade Linie erscheint.*)

*) Der Satz ist im Grunde derselbe, wie der Satz, daß zwei Ebenen einander nur in einer Geraden schneiden können. Auf einem höheren Standpunkte wird gesagt: Eine Fläche, deren Projektion auf eine Ebene eine Gerade sein kann, ist stets eine Ebene.

30) Statt dessen kann man sagen: Bewegt sich ein Strahl um seinen festliegenden Anfangspunkt so, daß er stets auf einer festen Geraden hingleitet, die nicht durch diesen Punkt geht, so beschreibt er eine Ebene. (Statt des Strahles kann man auch die unbegrenzte Gerade nehmen.) Daraus folgt:

31) Eine Ebene ist durch eine Gerade und einen außerhalb dieser liegenden Punkt vollständig bestimmt. Daraus folgt ferner:

32) Eine Ebene ist durch drei Punkte vollständig bestimmt; denn zwei davon kann man durch eine Gerade verbinden. Daraus folgt ferner:

33) Durch zwei einander schneidende Geraden ist eine Ebene vollständig bestimmt. Die eine Gerade kann man nämlich als die feste Gerade, einen beliebigen Punkt der andern kann man als den Drehungspunkt des Strahles betrachten, die zweite Gerade als den bewegten Strahl in einer seiner Lagen. Gleitet also eine Gerade auf zwei festen einander schneidenden Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene.

34) Bei der unter 30) beschriebenen Bewegung tritt der Fall ein, daß der Durchschnittspunkt der gedrehten und der festgehaltenen Geraden in unendliche Entfernung rückt. Dann sagt man, die feste Gerade und die bewegte Gerade sind in dieser Lage parallel, sie haben dabei dieselbe Richtung, sie gehen nach demselben unendlich fernen Punkte hin. Daraus folgt für 33), daß der Schnittpunkt der beiden Geraden auch in unendlicher Entfernung liegen darf. Also ergibt sich der Satz: Durch zwei parallele Geraden ist stets eine Ebene vollständig bestimmt. Oder: Gleitet eine Gerade auf zwei festen parallelen Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene. Oder: Durch zwei parallele Geraden läßt sich stets eine Ebene legen.

35) Umgekehrt kann man sagen: Schneiden einander zwei Geraden im Raume nicht, so weit man sie auch verlängert, läßt sich aber durch beide eine Ebene legen, so sind die Geraden parallel. (Es gibt Geraden im Raume, die noch so weit verlängert, einander nicht schneiden, durch die sich aber keine Ebene legen läßt. Solche Gerade nennt man windschiefe Gerade.)

Über diese Sätze muß aber noch ausführlicher gesprochen werden.

36) Flächen, die nicht alle Eigenschaften der Ebene besitzen, nennt man krumme Flächen.

37) Geometrische Gebilde, die ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als ebene Gebilde.

Geometrische Gebilde, die nicht ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als nicht ebene, oder als unebene oder als räumliche Gebilde (im engeren Sinne).

So gibt es ebene Punktgruppen und räumliche Punktgruppen; ebene Liniengruppen und räumliche Liniengruppen; ebene und räumliche Gruppen von Punkten und Linien und ebene und räumliche Gruppen von Flächenstücken; es gibt ebene Kurven und räumliche Kurven.

38) Demnach zerfällt die Geometrie in zwei Teile, in die Geometrie der ebenen Gebilde oder die Planimetrie und in die Geometrie der räumlichen Gebilde (im engeren Sinne) oder die Stereometrie.

Vorläufig soll nur noch von der Planimetrie die Rede sein. In ihr kann man hinsichtlich der Größenmessung von Längenmessung (Longimetrie) und Flächenmessung (Planimetrie im engeren Sinne) sprechen. (Vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus § 20—29.)

η) Begriff des Kreises*), des regelmäßigen Vielecks und ihrer Teile.

39) Bewegt sich ein Punkt, ohne umzukehren, in einer Ebene so, daß er von einem gegebenen festen Punkte der letzteren stets denselben Abstand behält, so kehrt er schließlich in die ursprüngliche Lage zurück. Der nach einem solchen Umlaufe zurückgelegte Weg wird als eine Kreislinie bezeichnet. Der feste Punkt heißt ihr Mittelpunkt, oder ihre Mitte, oder ihr Zentrum.

Die Kreislinie ist diejenige ebene, in sich zurücklaufende Kurve, deren Punkte von einem bestimmten festen Punkte der Ebene denselben Abstand haben. (Man vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus VI.)

40) Jede Verbindungslinie des Kreiszentrums mit einem Punkte der Kreislinie bezeichnet man als einen Halbmesser oder Radius des Kreises. Die Länge aller Radien eines Kreises ist dieselbe, denn sie ist gleich jenem unveränderlichen Abstande vom Mittelpunkte.

---

*) Unter Kreis wird bald die Kreislinie, bald die Kreisfläche verstanden. Der Sprachgebrauch schwankt. Nach Bedürfnis sollen die letzteren Worte gebraucht werden, sonst der Kürze halber das Wort Kreis.