



## **Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik**

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig und Berlin, 1904**

ε) Begriff der Geraden und der Richtungen im Raume

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-94706](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-94706)

14) Schneiden einander zwei Flächen einmal oder mehrfach, so geschieht es jedesmal in einer Linie. Also: Jeder Schnitt zweier Flächen ist eine Linie. Die Schnittlinie ist beiden Flächen gemeinsam.\*) Eine gekrümmte Fläche kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

15) Schneiden einander eine Linie und eine Fläche einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt einer Linie und einer Fläche ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Gebilden gemeinsam.\*\*)

16) Bei Körpern spricht man nicht von gegenseitigem Schneiden, sondern von gegenseitigem Durchdringen. „Wahrnehmbar“ ist dabei nur das gegenseitige Durchschneiden ihrer Oberflächen, welches in Linien geschieht. Darüber soll erst in der Stereometrie gesprochen werden. Gekrümmte Körper können so gestaltet sein, daß Teile von ihnen einander durchdringen. (Vorkursus § 6.)

e) Begriff der geraden Linie und der Richtungen im Raume.

17) Die gerade Linie wird in der Regel veranschaulicht durch einen straff gespannten Faden, der sich zwischen zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Punkten befindet.\*\*\*) Man schließt daraus: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen je zweien ihrer Punkte. Daraus folgt z. B., daß die Summe zweier Dreiecksseiten stets größer ist als die dritte, auch wenn letztere die größte von ihnen ist. In einem Dreiecke  $ABC$  z. B., dessen Ecken die Seiten  $a, b, c$  gegenüberliegen, sei  $c$  die größte Seite, dann

zwei Kreise haben höchstens zwei Schnittpunkte, zwei Ellipsen haben höchstens vier Schnittpunkte usw.

\*) **Beispiele:** Zwei Ebenen können einander höchstens in einer Geraden schneiden. Drei Ebenen können einander höchstens in drei Geraden schneiden. Zwei Kugelflächen können einander in einer Kreislinie schneiden. Eine Ebene und eine Kugelfläche können einander in einer Kreislinie schneiden.

\*\*\*) Eine Gerade und eine Ebene können einander höchstens in einem Punkte schneiden, eine Kreislinie und eine Ebene höchstens in zwei Punkten, eine Gerade und eine Kugelfläche in höchstens zwei Punkten.

\*\*\*\*) Diese Veranschaulichung versagt bei größeren Entfernungen der beiden Punkte. So geben z. B. Telegraphendrähte und Telephondrähte trotz aller Zugspannung doch krumme „Linien“. Dasselbe gilt von Seilen, auch Drahtseilen, von längeren Ketten usw. Man nennt die so veranschaulichten Linien Kettenlinien. Die Abweichung von der geradlinigen Form erfolgt durch die Wirkung der Schwerkraft. Ein längerer Telegraphendraht würde zerreißen, ehe er durch Zugspannung ganz geradlinig würde. Ein in senkrechter Richtung gespannter Draht wird jedoch stets geradlinig.

ist doch  $a + b > c^*$ ), denn der direkte Weg von  $B$  bis  $A$  ist kürzer als der Umweg  $BC + CA$ .

Daraus folgt ferner  $(a + b) - b > c - b$ , oder  $a > c - b$  d. h. jede Dreiecksseite, auch die kleinste, ist größer als der Unterschied der beiden andern. (Daß  $a + b - b = a$  ist, erscheint leichtverständlich.)

18) Man kann das Auge in Lagen bringen, in denen jedes Stück einer Geraden als Punkt erscheint.\*\*) Der vorderste Punkt verdeckt dabei alle andern Punkte der Geraden.

19) Daher sagt man: Für diese Lage des geistigen Auges liegen alle Punkte der Geraden in derselben Richtung. Ebenso sagt man allgemeiner: Die Gerade hat in allen ihren Teilen dieselbe Richtung. Sind  $A$  und  $B$  die Endpunkte der Geraden, so kann man ihr zwei Richtungen zuschreiben, die Richtung von  $A$  nach  $B$  oder die Richtung von  $B$  nach  $A$ . Daraus folgt ferner:

20) Die Gerade kann in ihrer Richtung bewegt werden, ohne seitlich aus der „Richtungslinie“ hervorzutreten. Durch diese Bewegung erhält man nicht eine Fläche, sondern nur die Verlängerung der Geraden. Die Gerade kann nach beiden Richtungen hin ins Unendliche verlängert werden.

21) Dreht man die Gerade unter Festhaltung zweier ihrer Punkte, so nimmt das (geistige) Auge nichts von einer Lagenänderung wahr. (Dagegen würden krumme Linien bei dieser Drehungsbewegung dem Auge in unendlich vielen verschiedenen Lagen erscheinen.) Man schließt daraus: Zwischen je zwei (im Endlichen liegenden) Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich. Oder: Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte vollständig bestimmt.

22) Weil zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist und diese den kürzesten Weg gibt, so mißt man den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte mittels dieser Geraden. Also: Die gegenseitige Entfernung zweier Punkte ist gleich der Länge der sie verbindenden Geraden.

23) Aus 21) folgt noch: Zwei Geraden können höchstens einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Hätten sie

\*) Das Zeichen  $>$  bedeutet „größer als“, das Zeichen  $<$  bedeutet „kleiner als“.

\*\*) Der ausgesprochene Satz sagt eigentlich nur, daß eine Gerade eine Ebene nur in einem Punkte schneiden kann. Auf einem höheren Standpunkte wird er so ausgedrückt: Kann die Projektion einer Linie auf eine Ebene ein Punkt sein, so ist die Linie eine Gerade.

nämlich zwei solche, so würden zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten zwei Geraden möglich sein, was dem in 21) angegebenen Satze widerspräche.

24) Zwei gleich lange Geraden können auf zweierlei Art zur Deckung gebracht werden. Ist  $AB$  die eine Gerade,  $A_1B_1$  die andere, so kann man  $AB$  sowohl auf  $A_1B_1$  als auch auf  $B_1A_1$  legen. Statt dieses Satzes sagt man auch: Zwei Geraden von derselben Länge sind auf zweierlei Art kongruent.

25) Eine nur einseitig begrenzte Gerade bezeichnet man als Strahl. Den Grenzpunkt bezeichnet man als seinen Ausgangspunkt oder Anfangspunkt. Seine Richtung geht von diesem aus ins Unendliche. So kann man sich z. B. vom Auge aus nach jedem Punkte des scheinbaren Himmelsgewölbes eine Gerade gezogen und diese bis ins Unendliche verlängert denken. Allgemeiner gilt:

Von jedem Raumpunkte gehen unendlich viele Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das Strahlenbündel des Punktes. Durch das Strahlenbündel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen im Raume angegeben.

26) Linien, die nicht alle Eigenschaften der Geraden besitzen, nennt man krumme Linien oder Kurven. (Man vgl. Vorkursus § 11—16.)

§) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie.

27) Eine Ebene ist eine unbegrenzte Fläche, in der sich von jedem ihrer Punkte aus nach jedem andern (ihrer Punkte) eine Gerade ziehen läßt, die nirgends, auch in ihrer Verlängerung nicht, aus dieser Fläche austritt.

28) Von jedem Punkte der Ebene gehen also unendlich viele ganz in ihr liegende Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das (ebene) Strahlenbüschel des Punktes. Durch dieses Strahlenbüschel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen in der Ebene angegeben.

29) Das Auge kann in Lagen gebracht werden, in denen ihm ein irgendwie begrenztes Stück der Ebene als eine gerade Linie erscheint.\*)

\*) Der Satz ist im Grunde derselbe, wie der Satz, daß zwei Ebenen einander nur in einer Geraden schneiden können. Auf einem höheren Standpunkte wird gesagt: Eine Fläche, deren Projektion auf eine Ebene eine Gerade sein kann, ist stets eine Ebene.