Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

δ) Gegenseitiges Schneiden und Durchdringen geometrischer Gebilde

[**Bemerkungen.** Durch Bewegung eines Körpers entsteht im allgemeinen wieder ein körperlicher Weg. Eine vierte Dimension nämlich, in die ein Körper z. B. mit allen Punkten zugleich hinaustreten könnte, ist uns im Weltraum nicht sinnlich wahrnehmbar. Daher nehmen wir auch für unseren mathematischen Raum an, er besitze nur die genannten drei Dimensionen.*)

In jedem endlichen Körperteile kann man sich einen kleinen Würfel denken, an dessen Kanten man Länge, Breite und Höhe erkennt. Demnach muß der Körper selbst alle drei Dimensionen haben. Auf jeden endlichen Teil einer (z. B. krummen) Fläche kann man im allgemeinen ein sehr kleines Quadrat zeichnen (z. B. auf die Kugelfläche.) An den Seiten des Quadrates erkennt man die Länge und Breite. Die beiden ersten Dimensionen besitzt also auch die Fläche, aber sie hat keine Dicke. Von jeder z. B. krummen Linie läßt sich im allgemeinen ein so kleines Stück ausschneiden, daß man es als geradlinig betrachten kann. An ihm beobachtet man nur die Länge, aber keine Breite und Dicke. So hat auch die ganze Linie nur die Dimension Länge, nicht aber die Dimensionen Breite und Dicke.]

12) Umgekehrt kann man sich folgendes vorstellen: Läßt man bei einem Körper die Dicke so zusammenschrumpfen, daß sie schließlich überall verschwindet (gleich Null wird), so bleibt nur noch eine Fläche übrig. Läßt man bei dieser die Breite so zusammenschrumpfen, daß diese schließlich überall verschwindet, so bleibt nur eine Linie übrig. Läßt man bei dieser die Länge so zusammenschrumpfen, daß letztere schließlich gleich Null ist, so bleibt nur noch ein Punkt übrig. (Vgl. Vorkursus § 44.)

δ) Das gegenseitige Schneiden und Durchdringen geometrischer Gebilde.

13) Schneiden einander zwei Linien einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt zweier Linien ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Linien gemeinsam.**) Eine krumme Linie kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

---

heraustreten und ihre Bewegung nicht wahrnehmbar ist, z. B. jeder Drehungskörper, der sich um seine Achse dreht, jeder beiderseits ins Unendliche reichende Zylinder, jeder ebenso ins Unendliche reichende Schraubenkörper, der sich in entsprechender „Schraubung" bewegt.

*) Wer, sich einen Raum mit mehr als vier Dimensionen denken will, der möge sich mit dessen Geometrie beschäftigen. Mit unserem Euklidschen Raume haben solche Untersuchungen nichts zu schaffen.

) **Beispiele: Zwei gerade Linien haben höchstens einen Schnittpunkt,

14) Schneiden einander zwei Flächen einmal oder mehrfach, so geschieht es jedesmal in einer Linie. Also: Jeder Schnitt zweier Flächen ist eine Linie. Die Schnittlinie ist beiden Flächen gemeinsam.*) Eine gekrümmte Fläche kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

15) Schneiden einander eine Linie und eine Fläche einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt einer Linie und einer Fläche ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Gebilden gemeinsam.**)

16) Bei Körpern spricht man nicht von gegenseitigem Schneiden, sondern von gegenseitigem Durchdringen. „Wahrnehmbar" ist dabei nur das gegenseitige Durchschneiden ihrer Oberflächen, welches in Linien geschieht. Darüber soll erst in der Stereometrie gesprochen werden. Gekrümmte Körper können so gestaltet sein, daß Teile von ihnen einander durchdringen. (Vorkursus § 6.)

ε) Begriff der geraden Linie und der Richtungen im Raume.

17) Die gerade Linie wird in der Regel veranschaulicht durch einen straff gespannten Faden, der sich zwischen zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Punkten befindet.***) Man schließt daraus: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen je zweien ihrer Punkte. Daraus folgt z. B., daß die Summe zweier Dreiecksseiten stets größer ist als die dritte, auch wenn letztere die größte von ihnen ist. In einem Dreiecke ABC z. B., dessen Ecken die Seiten a, b, c gegenüberliegen, sei c die größte Seite, dann

---

zwei Kreise haben höchstens zwei Schnittpunkte, zwei Ellipsen haben höchstens vier Schnittpunkte usw.

*) **Beispiele:** Zwei Ebenen können einander höchstens in einer Geraden schneiden. Drei Ebenen können einander höchstens in drei Geraden schneiden. Zwei Kugelflächen können einander in einer Kreislinie schneiden. Eine Ebene und eine Kugelfläche können einander in einer Kreislinie schneiden.

**) Eine Gerade und eine Ebene können einander höchstens in einem Punkte schneiden, eine Kreislinie und eine Ebene höchstens in zwei Punkten, eine Gerade und eine Kugelfläche in höchstens zwei Punkten.

***) Diese Veranschaulichung versagt bei größeren Entfernungen der beiden Punkte. So geben z. B. Telegraphendrähte und Telephondrähte trotz aller Zugspannung doch krumme „Linien". Dasselbe gilt von Seilen, auch Drahtseilen, von längeren Ketten usw. Man nennt die so veranschaulichten Linien Kettenlinien. Die Abweichung von der geradlinigen Form erfolgt durch die Wirkung der Schwerkraft. Ein längerer Telegraphendraht würde zerreißen, ehe er durch Zugspannung ganz geradlinig würde. Ein in senkrechter Richtung gespannter Draht wird jedoch stets geradlinig.