Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

a) Einige Vorbegriffe und ihre Erklärungen

Erste Abteilung.
Planimetrie.

A. Planimetrische Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

I. Übersichtliche Zusammenstellung und Ergänzung der planimetrischen Ergebnisse des Vorkursus.

a) Einige Vorbegriffe und ihre Erklärungen.

α) Die Mathematik und ihre Teile.*)

1) Die Mathematik ist die Lehre von den Größen. Sie zerfällt in die reine und die angewandte Mathematik. (Vgl. Vorkursus I.)**)

α_1) Die reine Mathematik ist die Lehre von den Raum- und den Zahlengrößen.
Die Geometrie oder Raumlehre ist die Lehre von den Raumgrößen.
Die Arithmetik oder Zahlenkunde ist die Lehre von den Zahlengrößen.

α_2) Die angewandte Mathematik ist die Lehre von allen anderen meßbaren Größen.
(Hierher gehören z. B. die Zeitgrößen und die Geschwindigkeiten, die mechanischen Größen wie Kräfte, Gewichte, Massen, Druckspannungen, Zugspannungen, Arbeiten, Maschinenleistungen, physikalische Größen aller Art, wie Lichtstärke, Wärme, magnetische und elektrische Kräfte usw.)

*) Um an die griechischen Buchstaben zu gewöhnen, hat Verfasser solche zur Zählung der Abschnitte benutzt. Das griechische Alphabet befindet sich am Schlusse dieses Bandes.

**) Es wird angenommen, daß der Vorkursus sich in der Hand des Lehrers befinde. Dort sind ausführlichere Erläuterungen gegeben. Hier soll mehrfach auf diese hingewiesen werden und zwar unter Angabe der Nummern der dortigen Paragraphen.

β) Der mathematische Raum und die geometrischen Gebilde.

2) Der **Weltraum** ist das Gebiet, in dem sich alle wirklichen oder physischen Körper befinden, und in dem alle möglichen Bewegungen (Ortsveränderungen) stattfinden. Er enthält z. B. die gesamte uns bekannt gewordene Fixsternwelt und erstreckt sich nach menschlicher Auffassung über diese hinaus nach jeder Richtung hin ins Unendliche (Endlose, Unbegrenzte, Unmeßbare). Wie sich der Weltraum außerhalb der Fixsternwelt verhält, ist uns vollständig unbekannt, sodaß man sogar seine Unendlichkeit nicht nachweisen, sondern nur vermuten oder voraussetzen kann. Deshalb denke man sich statt des wirklichen Weltraums einen **mathematischen Raum**, dem bestimmte Eigenschaften zuzuschreiben sind, die sich auch auf das unendlich ferne Gebiet beziehen sollen. (Vorkursus § 1.)

3) Der **mathematische Raum**, den wir uns denken wollen, soll folgende Eigenschaften haben: Er erstreckt sich nach allen Richtungen hin ununterbrochen ins Unendliche. Er ist in jeder Hinsicht unverändert und befindet sich z. B. im Zustande vollkommener Ruhe (Unbeweglichkeit).*) Er ist in allen Teilen gleichartig und vollkommen stoffleer, besitzt also keine physikalisch-chemischen Eigenschaften.**) Er ist lediglich als ausgedehnt und als in Teile zerlegbar zu denken. Unter den unendlich zahlreichen Richtungen pflegt man im Hinblick auf die Stellung des Beobachters drei Hauptrichtungen auszuwählen, z. B. von vorn nach hinten, von rechts nach links, von unten nach oben. Allgemeiner spricht man von **drei Dimensionen** (Ausdehnungen) des mathematischen Raumes***), worüber erst später eingehend berichtet werden soll. (Gewöhnlich bezeichnet man diese Dimen-

*) Die Alten hielten die Erde für unbewegt und meinten, um diese drehe sich das gesamte Weltall. Später hielt man die Sonne für das in Ruhe befindliche Zentrum des Weltalls. Bald mußte man auch diese als im Weltraume sich bewegend annehmen. So wurde man zur Annahme eines ruhenden Weltraumes genötigt. Dem entspricht die Annahme eines in Ruhe befindlichen mathematischen Raumes.

**) Gewisse Unregelmäßigkeiten, die man im wirklichen Raume wahrnimmt, haben ihren Grund in seiner unregelmäßigen Stofferfüllung. Ein schräg ins Wasser getauchter geradliniger Stab z. B. erscheint als gebrochen. Solche Unregelmäßigkeiten sind im mathematischen Raume ausgeschlossen.

***) Auf die Untersuchung mathematischer Räume von mehr als drei Dimensionen kann die Schule nicht eingehen. Der hier zu besprechende Raum wird als der **Euklidsche Raum** bezeichnet. Euklid, der um 300 v. Chr. gelebt und nach **Pappus** in Alexandria gewirkt hat, stellte die Elemente der Mathematik in mustergültiger Weise zusammen.

sionen als Länge, Breite und Höhe.) Nur von diesem mathematischen Raume soll von jetzt ab die Rede sein.

4) Ein **mathematischer** Körper ist ein Teil des Raumes, der vollständig gegen den übrigen Raum abgegrenzt ist. Diese Abgrenzung geschieht durch Gebilde, die man als **Flächen** bezeichnet. (Diese bedürfen noch der näheren Erläuterung.) Von der Art der Begrenzung hängt die besondere **Gestalt** (Form) des Körpers ab. Die Größe des Raumes, den ein Körper einnimmt, bezeichnet man als seinen **Rauminhalt** oder kürzer als seinen **Inhalt.** Jeder mathematische Körper ist teilbar durch Flächen. Er wird als im Raum bewegbar angenommen. Nur von mathematischen Körpern soll von jetzt ab gesprochen werden. (Über die Unterschiede zwischen wirklichen und mathematischen Körpern vgl. Vorkursus §§ 2, 7, 8.)

[**Bemerkungen.** Ein Körper kann sich ganz im Endlichen (im meßbaren Gebiete) befinden, er kann sich aber auch vom Endlichen aus bis ins Unendliche (Unmeßbare) erstrecken. Hier soll zunächst nur von endlichen Körpern die Rede sein. Diese haben eine bestimmt vorstellbare Gestalt und einen endlichen Inhalt.

Reicht der Körper bis ins Unendliche, so kann zwar seine Gestalt auch dort eine bestimmt vorgeschriebene sein, aber von eigentlicher Vorstellbarkeit kann dann nicht mehr gesprochen werden, auch wird der Inhalt im allgemeinen unbestimmbar, weil er im allgemeinen unendlich groß wird. (Trotzdem gibt es mathematische Körper, die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen genau bestimmbaren Inhalt haben.)*) Die Begrenzung eines ganz im Endlichen liegenden

---

*) Diese Behauptung erscheint auf den ersten Blick unwahrscheinlich. Lediglich zu dem Zwecke, vor übereilten Aussprüchen über das Unendliche zu warnen, soll ein einfaches Beispiel angegeben werden.

Man denke sich eine senkrecht stehende Säule von quadratischer Grundfläche. Die letztere fasse 1 qm, die Säule habe die Höhe von 2 m, also den Inhalt 2 cbm. Man denke sich die Säule durch horizontale Schnitte in Schichten zerlegt, die von unten her der Reihe nach die Höhen 1 m, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{8}$ m, $\frac{1}{16}$ m usw. haben, sodaß jedesmal die noch vorhandene Resthöhe halbiert wird. Man kann sich denken, daß diese Resthalbierung unendlich oft vorgenommen wird, sodaß die Restschicht schließlich unendlich dünn wird und ihre Höhe allmählich immer näher an Null heranrückt. Die einzelnen Schichten haben dann der Reihe nach die Inhalte 1 cbm, $\frac{1}{2}$ cbm; $\frac{1}{4}$ cbm, $\frac{1}{8}$ cbm, $\frac{1}{16}$ cbm usw. Die Summe der Inhalte ist also $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$ cbm

Körpers bezeichnet man als seine **Oberfläche**. Diese ist zugleich die Grenzfläche seines **Außenraumes**. Ein Körper kann auch mehrere Oberflächen haben.*)

5) **Eine mathematische Fläche ist zunächst ein Gebilde, welches als Grenze eines Körpers auftritt und demnach benachbarte Räume voneinander trennt. Sie selbst ist nicht ein Teil eines Raumes, sondern die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarter Raumteile. Ihr räumlicher Inhalt ist gleich Null, weil sie keine Dicke besitzt. Ist die Fläche begrenzt, so sind ihre Grenzen Gebilde, die man Linien nennt und die noch der näheren Erläuterung bedürfen. Die Fläche ist teilbar durch Linien. Die Fläche hat, auch wenn sie unbegrenzt ist, eine bestimmte Gestalt; ist sie begrenzt, so ist die Gestalt auch von der Art der Begrenzung abhängig. Die Größe einer Fläche bezeichnet man als den Flächeninhalt. Die Flächen werden als im Raume bewegbar angenommen.** (Vgl. Vorkursus § 3.)

---

und dies muß gleich dem ursprünglichen Inhalte 2 cbm sein. (Daher sagt man, die Summe der bis ins Unendliche fortzusetzenden Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ sei gleich 2.)

Jetzt denke man sich die einzelnen Teile der Säule statt übereinander dicht nebeneinander gelegt, sodaß sie einen geradlinigen Streifen von der Breite 1 m bedecken, von dem jeder Teil 1 qm Grundfläche beansprucht. Dann muß dieser Streifen bis ins Unendliche reichen, denn es sind unzählige Körperteile vorhanden, die unendlich viele Quadratmeter bedecken.

Betrachtet man jetzt das Ganze als einen einzigen Körper, so reicht dieser bis ins Unendliche und hat doch nur 2 cbm Inhalt. —

In derselben Weise kann man mit einer solchen Säule von $1\frac{1}{2}$ m Höhe verfahren, von der man erst eine Schicht von 1 m Höhe abschneidet, dann eine solche von $\frac{2}{3}$ der Resthöhe, nämlich $\frac{1}{3}$ m, dann wieder eine solche von $\frac{2}{3}$ der Resthöhe usw. Dabei erhält man in derselben Weise die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{3}{2}$. Mit den Körperteilen kann jetzt ebenso verfahren werden, wie vorher. Der neue Körper erstreckt sich dann wieder ins Unendliche und hat doch nur den Inhalt $\frac{3}{2}$ cbm.

An solchen Beispielen erkennt man, **daß es in vielen Fällen falsch ist, von der Erstreckung eines Körpers ins Unendliche darauf zu schließen, daß sein Inhalt unendlich groß sei.**

*) Als Beispiel sei die Hohlkugel genannt, die eine äußere und eine innere Oberfläche hat.

[**Bemerkungen.** Eine Fläche kann ganz im Endlichen liegen und muß dabei nicht notwendig durch Linien begrenzt sein, denn sie kann vollständig in sich zurücklaufen.*) Eine Fläche kann teilweise in sich zurücklaufen, teilweise sich ins Unendliche erstrecken**). Eine Fläche kann ins Unendliche reichen, ohne im Endlichen irgendwie in sich zurückzulaufen oder irgendwie begrenzt zu sein.***) Flächen, die bis ins Unendliche reichen, haben im allgemeinen einen unendlich großen Flächeninhalt. (Trotzdem gibt es Flächen, die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen, genau bestimmbaren Flächeninhalt haben.†) Eine ganz im Endlichen befindliche Fläche hat im allgemeinen einen endlichen Flächeninhalt. (Trotzdem gibt es Flächen solcher Art, deren Inhalt unendlich groß ist).††)

Die Begrenzung einer im Endlichen liegenden Fläche nennt man ihre Umrandung oder ihren Umfang. Eine Fläche kann auch mehrere Umrandungen haben. Als Beispiel diene die Fläche zwischen zwei Kreisen derselben Ebene, von denen der eine den andern umschließt, ohne ihn zu berühren.

6) Eine Linie ist zunächst ein Gebilde, welches eine Fläche begrenzt oder benachbarte Flächenteile voneinander trennt. Sie selbst ist nicht ein Teil einer Fläche, sondern die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarter Flächenteile. Ihr Flächeninhalt ist gleich Null, weil sie keine Breite hat. Ist die Linie begrenzt, so sind die Grenzen Gebilde, die man als Punkte bezeichnet und die noch der

---

*) Das einfachste Beispiel ist die Kugelfläche. Diese ist unbegrenzt und liegt doch ganz im Endlichen, sobald nur der Radius endlich ist. Die Kugelfläche hat dabei eine bestimmte Gestalt. Man kann aus dieser Fläche Teile ausschneiden, deren Gestalt nun auch durch die Grenzlinien bestimmt ist.

**) Beispiele sind die Mantelflächen des Kreiszylinders und des Kreiskegels, die sich bis ins Unendliche erstrecken können.

***) Ein Beispiel ist die Ebene.

†) Als Beispiel diene eine der beiden bis ins Unendliche reichenden senkrechten Grenzflächen des in der Randbemerkung zu 4) besprochenen ersten Körpers. Die Teile dieser Fläche haben zusammengenommen den Flächeninhalt $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$ qm = 2 qm.

††) Man kann sich auf einem endlichen Zeichenblatt eine Linie denken, die aus unendlich vielen Kreuz- und Querzügen oder Windungen besteht, sodaß ihre Länge unendlich groß ist. Denkt man sich über dieser Linie einen „Zylindermantel" von nur 1 cm Höhe errichtet, so ist dessen Flächeninhalt unendlich groß, obwohl er ganz im Endlichen liegt. Auch dieses Beispiel soll nur vor übereilten Aussagen über das Unendliche warnen.

näheren Erläuterung bedürfen. Jede Linie ist durch Punkte teilbar. Sie hat eine bestimmte Gestalt (Form). Die Größe einer Linie bezeichnet man als ihre Länge. Die Linien werden als im Raume bewegbar angenommen. (Vgl. Vorkursus § 4.)

[**Bemerkungen.** Eine Linie kann ganz im Endlichen liegen und muß dabei nicht notwendig eine Grenze haben, denn sie kann in sich zurücklaufen.*) Eine bis ins Unendliche reichende Linie ist stets von unendlicher Länge. Eine ganz im Endlichen liegende Linie ist im allgemeinen von endlicher Länge. Trotzdem gibt es Linien, die ganz im Endlichen liegen und doch von unendlicher Länge sind.**) Mathematische Linien sind „unsichtbar"***), da sie keine Breite haben. Man kann sie durch dünne Fäden oder durch gezeichnete „Linien" nur veranschaulichen.]

7) Ein Punkt ist zunächst ein Gebilde, welches eine Linie begrenzt oder benachbarte Linienteile voneinander trennt. Er selbst ist kein Teil einer Linie, sondern nur das Ende einer solchen oder die gemeinschaftliche Grenze benachbarter Linienteile. Seine Länge ist gleich Null. Er ist also nur eine im Raume gedachte Stelle, die überhaupt keine Ausdehnung hat, also weder Gestalt noch Größe besitzt und auch nicht teilbar ist. Die Punkte werden als im Raume bewegbar angenommen.

Mathematische Punkte sind unsichtbar. Man kann sie nur veranschaulichen.

8) Es gibt also an einfachen geometrischen Gebilden nur die folgenden: Körper, Flächen, Linien und Punkte. Daher gibt es für die Raumlehre nur Raumgrößen (im engeren Sinne), Flächengrößen, Liniengrößen (oder Längen), während man von Punktgrößen nicht reden kann. Dies führt auf die Raummaße, Flächenmaße und Längenmaße.

---

*) Das einfachste Beispiel ist die Kreislinie.

**) Vgl. die letzte zu 5) gegebene Randbemerkung.

***) Das Wort „unsichtbar" ist nur aus Gründen der Veranschaulichung gebraucht, da im mathematischen Raume von Lichterscheinungen nicht die Rede sein kann. Auch bei Punkten wird in diesem veranschaulichenden Sinne von „Unsichtbarkeit" gesprochen. Trotzdem wird später vielfach vom Erscheinen solcher Gebilde gesprochen. Anstelle des wirklichen Auges hat man sich dabei ein geistiges Auge zu denken, bei dem die Schärfe der Sehkraft als eine unendlich große zu denken ist, sodaß ihm sogar Unendlichkleines sichtbar ist.

Als zusammengesetzte geometrische Gebilde kann man sich Gruppen von Körpern, Gruppen von Flächen, Gruppen von Linien, Gruppen von Punkten und auch Gruppen verschiedenartiger dieser Gebilde denken.

Jetzt wird folgende Erklärung verständlich sein:

Die Raumlehre oder Geometrie beschäftigt sich mit den gesetzmäßig gestalteten mathematischen Körpern und den an ihnen auftretenden oder auch als selbständig zu denkenden Flächen, Linien und Punkten, mit den Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen dieser Gebilde, mit ihrer Berechnung und Konstruktion. (Vgl. Vorkursus § 9.)

γ) Bewegungsbeziehungen und Ausdehnungen oder Dimensionen.

9) Durch Bewegung eines Punktes im Raume entsteht als Weg eine Linie. Dieser Weg hat eine (endliche oder eine unendliche) Länge, aber keine Breite und keine Dicke. Man sagt daher: Eine Linie hat nur eine einzige Dimension, die Länge. (Vorkursus § 44 und 45.)

10) Durch Bewegung einer Linie entsteht als Weg im allgemeinen eine Fläche. Zur Längenausdehnung der Linie tritt dabei eine neue Ausdehnung, die als Breite bezeichnet werden soll. Man sagt daher: Eine Fläche hat zwei Dimensionen, Länge und Breite.

Für die Bewegung wird dabei vorausgesetzt, daß die Linie sich nicht in sich selbst bewege, sondern seitlich aus ihrer Lage heraustrete. (Vorkursus § 46.)*)

11) Durch Bewegung einer Fläche entsteht als Weg im allgemeinen ein Körper. Zu den Dimensionen Länge und Breite tritt dabei eine neue, die man als Dicke oder auch als Höhe bezeichnet. Man sagt daher: Ein Körper hat drei Dimensionen, Länge, Breite und Dicke (oder Höhe).

Für die Bewegung wird dabei vorausgesetzt, daß die Fläche sich nicht in sich selbst bewege, sondern seitlich aus ihrer Lage heraustrete.*)

---

*) Daß sich Linien ohne jede Gestaltveränderung in sich selbst bewegen können, sodaß keine Fläche entsteht, erkennt man z. B. an der Geraden, am Kreise, an der Schraubenlinie. Daß sich Flächen ohne Gestaltveränderung in sich selbst bewegen können, sodaß kein Körper entsteht, erkennt man z. B. an der Ebene, am Kreiszylinder, am senkrechten Kreiskegel, an der Kugel, an jeder Drehungsfläche und an jeder Schraubenfläche. Auch gewisse entsprechende Körper können sich so in sich selbst bewegen, daß sie nicht aus sich selbst

[**Bemerkungen.** Durch Bewegung eines Körpers entsteht im allgemeinen wieder ein körperlicher Weg. Eine vierte Dimension nämlich, in die ein Körper z. B. mit allen Punkten zugleich hinaustreten könnte, ist uns im Weltraum nicht sinnlich wahrnehmbar. Daher nehmen wir auch für unseren mathematischen Raum an, er besitze nur die genannten drei Dimensionen.*)

In jedem endlichen Körperteile kann man sich einen kleinen Würfel denken, an dessen Kanten man Länge, Breite und Höhe erkennt. Demnach muß der Körper selbst alle drei Dimensionen haben. Auf jeden endlichen Teil einer (z. B. krummen) Fläche kann man im allgemeinen ein sehr kleines Quadrat zeichnen (z. B. auf die Kugelfläche.) An den Seiten des Quadrates erkennt man die Länge und Breite. Die beiden ersten Dimensionen besitzt also auch die Fläche, aber sie hat keine Dicke. Von jeder z. B. krummen Linie läßt sich im allgemeinen ein so kleines Stück ausschneiden, daß man es als geradlinig betrachten kann. An ihm beobachtet man nur die Länge, aber keine Breite und Dicke. So hat auch die ganze Linie nur die Dimension Länge, nicht aber die Dimensionen Breite und Dicke.]

12) Umgekehrt kann man sich folgendes vorstellen: Läßt man bei einem Körper die Dicke so zusammenschrumpfen, daß sie schließlich überall verschwindet (gleich Null wird), so bleibt nur noch eine Fläche übrig. Läßt man bei dieser die Breite so zusammenschrumpfen, daß diese schließlich überall verschwindet, so bleibt nur eine Linie übrig. Läßt man bei dieser die Länge so zusammenschrumpfen, daß letztere schließlich gleich Null ist, so bleibt nur noch ein Punkt übrig. (Vgl. Vorkursus § 44.)

δ) Das gegenseitige Schneiden und Durchdringen geometrischer Gebilde.

13) Schneiden einander zwei Linien einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt zweier Linien ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Linien gemeinsam.**) Eine krumme Linie kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

---

heraustreten und ihre Bewegung nicht wahrnehmbar ist, z. B. jeder Drehungskörper, der sich um seine Achse dreht, jeder beiderseits ins Unendliche reichende Zylinder, jeder ebenso ins Unendliche reichende Schraubenkörper, der sich in entsprechender „Schraubung" bewegt.

*) Wer sich einen Raum mit mehr als vier Dimensionen denken will, der möge sich mit dessen Geometrie beschäftigen. Mit unserem Euklidschen Raume haben solche Untersuchungen nichts zu schaffen.

) **Beispiele: Zwei gerade Linien haben höchstens einen Schnittpunkt,

14) Schneiden einander zwei Flächen einmal oder mehrfach, so geschieht es jedesmal in einer Linie. Also: Jeder Schnitt zweier Flächen ist eine Linie. Die Schnittlinie ist beiden Flächen gemeinsam.*) Eine gekrümmte Fläche kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

15) Schneiden einander eine Linie und eine Fläche einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt einer Linie und einer Fläche ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Gebilden gemeinsam.**)

16) Bei Körpern spricht man nicht von gegenseitigem Schneiden, sondern von gegenseitigem Durchdringen. „Wahrnehmbar" ist dabei nur das gegenseitige Durchschneiden ihrer Oberflächen, welches in Linien geschieht. Darüber soll erst in der Stereometrie gesprochen werden. Gekrümmte Körper können so gestaltet sein, daß Teile von ihnen einander durchdringen. (Vorkursus § 6.)

ε) Begriff der geraden Linie und der Richtungen im Raume.

17) Die gerade Linie wird in der Regel veranschaulicht durch einen straff gespannten Faden, der sich zwischen zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Punkten befindet.***) Man schließt daraus: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen je zweien ihrer Punkte. Daraus folgt z. B., daß die Summe zweier Dreiecksseiten stets größer ist als die dritte, auch wenn letztere die größte von ihnen ist. In einem Dreiecke ABC z. B., dessen Ecken die Seiten a, b, c gegenüberliegen, sei c die größte Seite, dann

---

zwei Kreise haben höchstens zwei Schnittpunkte, zwei Ellipsen haben höchstens vier Schnittpunkte usw.

*) **Beispiele:** Zwei Ebenen können einander höchstens in einer Geraden schneiden. Drei Ebenen können einander höchstens in drei Geraden schneiden. Zwei Kugelflächen können einander in einer Kreislinie schneiden. Eine Ebene und eine Kugelfläche können einander in einer Kreislinie schneiden.

**) Eine Gerade und eine Ebene können einander höchstens in einem Punkte schneiden, eine Kreislinie und eine Ebene höchstens in zwei Punkten, eine Gerade und eine Kugelfläche in höchstens zwei Punkten.

***) Diese Veranschaulichung versagt bei größeren Entfernungen der beiden Punkte. So geben z. B. Telegraphendrähte und Telephondrähte trotz aller Zugspannung doch krumme „Linien". Dasselbe gilt von Seilen, auch Drahtseilen, von längeren Ketten usw. Man nennt die so veranschaulichten Linien Kettenlinien. Die Abweichung von der geradlinigen Form erfolgt durch die Wirkung der Schwerkraft. Ein längerer Telegraphendraht würde zerreißen, ehe er durch Zugspannung ganz geradlinig würde. Ein in senkrechter Richtung gespannter Draht wird jedoch stets geradlinig.

ist doch $a + b > c$*), denn der direkte Weg von B bis A ist kürzer als der Umweg $BC + CA$.

Daraus folgt ferner $(a + b) - b > c - b$, oder $a > c - b$ d. h. jede Dreiecksseite, auch die kleinste, ist größer als der Unterschied der beiden andern. (Daß $a + b - b = a$ ist, erscheint leichtverständlich.)

18) Man kann das Auge in Lagen bringen, in denen jedes Stück einer Geraden als Punkt erscheint.**) Der vorderste Punkt verdeckt dabei alle andern Punkte der Geraden.

19) Daher sagt man: Für diese Lage des geistigen Auges liegen alle Punkte der Geraden in derselben Richtung. Ebenso sagt man allgemeiner: Die Gerade hat in allen ihren Teilen dieselbe Richtung. Sind A und B die Endpunkte der Geraden, so kann man ihr zwei Richtungen zuschreiben, die Richtung von A nach B oder die Richtung von B nach A. Daraus folgt ferner:

20) Die Gerade kann in ihrer Richtung bewegt werden, ohne seitlich aus der „Richtungslinie" herauszutreten. Durch diese Bewegung erhält man nicht eine Fläche, sondern nur die Verlängerung der Geraden. Die Gerade kann nach beiden Richtungen hin ins Unendliche verlängert werden.

21) Dreht man die Gerade unter Festhaltung zweier ihrer Punkte, so nimmt das (geistige) Auge nichts von einer Lagenänderung wahr. (Dagegen würden krumme Linien bei dieser Drehungsbewegung dem Auge in unendlich vielen verschiedenen Lagen erscheinen.) Man schließt daraus: Zwischen je zwei (im Endlichen liegenden) Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich. Oder: Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte vollständig bestimmt.

22) Weil zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist und diese den kürzesten Weg gibt, so mißt man den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte mittels dieser Geraden. Also: Die gegenseitige Entfernung zweier Punkte ist gleich der Länge der sie verbindenden Geraden.

23) Aus 21) folgt noch: Zwei Geraden können höchstens einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Hätten sie

---

*) Das Zeichen $>$ bedeutet „größer als", das Zeichen $<$ bedeutet „kleiner als".

**) Der ausgesprochene Satz sagt eigentlich nur, daß eine Gerade eine Ebene nur in einem Punkte schneiden kann. Auf einem höheren Standpunkte wird er so ausgedrückt: Kann die Projektion einer Linie auf eine Ebene ein Punkt sein, so ist die Linie eine Gerade.

nämlich zwei solche, so würden zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten zwei Geraden möglich sein, was dem in 21) angegebenen Satze widerspräche.

24) Zwei gleich lange Geraden können auf zweierlei Art zur Deckung gebracht werden. Ist AB die eine Gerade, A_1B_1 die andere, so kann man AB sowohl auf A_1B_1 als auch auf B_1A_1 legen. Statt dieses Satzes sagt man auch: Zwei Geraden von derselben Länge sind auf zweierlei Art kongruent.

25) Eine nur einseitig begrenzte Gerade bezeichnet man als Strahl. Den Grenzpunkt bezeichnet man als seinen Ausgangspunkt oder Anfangspunkt. Seine Richtung geht von diesem aus ins Unendliche. So kann man sich z. B. vom Auge aus nach jedem Punkte des scheinbaren Himmelsgewölbes eine Gerade gezogen und diese bis ins Unendliche verlängert denken. Allgemeiner gilt:

Von jedem Raumpunkte gehen unendlich viele Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das Strahlenbündel des Punktes. Durch das Strahlenbündel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen im Raume angegeben.

26) Linien, die nicht alle Eigenschaften der Geraden besitzen, nennt man krumme Linien oder Kurven. (Man vgl. Vorkursus § 11—16.)

ξ) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie.

27) Eine Ebene ist eine unbegrenzte Fläche, in der sich von jedem ihrer Punkte aus nach jedem andern (ihrer Punkte) eine Gerade ziehen läßt, die nirgends, auch in ihrer Verlängerung nicht, aus dieser Fläche heraustritt.

28) Von jedem Punkte der Ebene gehen also unendlich viele ganz in ihr liegende Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das (ebene) Strahlenbüschel des Punktes. Durch dieses Strahlenbüschel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen in der Ebene angegeben.

29) Das Auge kann in Lagen gebracht werden, in denen ihm ein irgendwie begrenztes Stück der Ebene als eine gerade Linie erscheint.*)

*) Der Satz ist im Grunde derselbe, wie der Satz, daß zwei Ebenen einander nur in einer Geraden schneiden können. Auf einem höheren Standpunkte wird gesagt: Eine Fläche, deren Projektion auf eine Ebene eine Gerade sein kann, ist stets eine Ebene.

30) Statt dessen kann man sagen: Bewegt sich ein Strahl um seinen festliegenden Anfangspunkt so, daß er stets auf einer festen Geraden hingleitet, die nicht durch diesen Punkt geht, so beschreibt er eine Ebene. (Statt des Strahles kann man auch die unbegrenzte Gerade nehmen.) Daraus folgt:

31) Eine Ebene ist durch eine Gerade und einen außerhalb dieser liegenden Punkt vollständig bestimmt. Daraus folgt ferner:

32) Eine Ebene ist durch drei Punkte vollständig bestimmt; denn zwei davon kann man durch eine Gerade verbinden. Daraus folgt ferner:

33) Durch zwei einander schneidende Geraden ist eine Ebene vollständig bestimmt. Die eine Gerade kann man nämlich als die feste Gerade, einen beliebigen Punkt der andern kann man als den Drehungspunkt des Strahles betrachten, die zweite Gerade als den bewegten Strahl in einer seiner Lagen. Gleitet also eine Gerade auf zwei festen einander schneidenden Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene.

34) Bei der unter 30) beschriebenen Bewegung tritt der Fall ein, daß der Durchschnittspunkt der gedrehten und der festgehaltenen Geraden in unendliche Entfernung rückt. Dann sagt man, die feste Gerade und die bewegte Gerade sind in dieser Lage parallel, sie haben dabei dieselbe Richtung, sie gehen nach demselben unendlich fernen Punkte hin. Daraus folgt für 33), daß der Schnittpunkt der beiden Geraden auch in unendlicher Entfernung liegen darf. Also ergibt sich der Satz: Durch zwei parallele Geraden ist stets eine Ebene vollständig bestimmt. Oder: Gleitet eine Gerade auf zwei festen parallelen Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene. Oder: Durch zwei parallele Geraden läßt sich stets eine Ebene legen.

35) Umgekehrt kann man sagen: Schneiden einander zwei Geraden im Raume nicht, so weit man sie auch verlängert, läßt sich aber durch beide eine Ebene legen, so sind die Geraden parallel. (Es gibt Geraden im Raume, die noch so weit verlängert, einander nicht schneiden, durch die sich aber keine Ebene legen läßt. Solche Gerade nennt man windschiefe Gerade.)

Über diese Sätze muß aber noch ausführlicher gesprochen werden.

36) Flächen, die nicht alle Eigenschaften der Ebene besitzen, nennt man krumme Flächen.

37) Geometrische Gebilde, die ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als ebene Gebilde.

Geometrische Gebilde, die nicht ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als nicht ebene, oder als unebene oder als räumliche Gebilde (im engeren Sinne).

So gibt es ebene Punktgruppen und räumliche Punktgruppen; ebene Liniengruppen und räumliche Liniengruppen; ebene und räumliche Gruppen von Punkten und Linien und ebene und räumliche Gruppen von Flächenstücken; es gibt ebene Kurven und räumliche Kurven.

38) Demnach zerfällt die Geometrie in zwei Teile, in die Geometrie der ebenen Gebilde oder die Planimetrie und in die Geometrie der räumlichen Gebilde (im engeren Sinne) oder die Stereometrie.

Vorläufig soll nur noch von der Planimetrie die Rede sein. In ihr kann man hinsichtlich der Größenmessung von Längenmessung (Longimetrie) und Flächenmessung (Planimetrie im engeren Sinne) sprechen. (Vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus § 20—29.)

η) Begriff des Kreises*), des regelmäßigen Vielecks und ihrer Teile.

39) Bewegt sich ein Punkt, ohne umzukehren, in einer Ebene so, daß er von einem gegebenen festen Punkte der letzteren stets denselben Abstand behält, so kehrt er schließlich in die ursprüngliche Lage zurück. Der nach einem solchen Umlaufe zurückgelegte Weg wird als eine Kreislinie bezeichnet. Der feste Punkt heißt ihr Mittelpunkt, oder ihre Mitte, oder ihr Zentrum.

Die Kreislinie ist diejenige ebene, in sich zurücklaufende Kurve, deren Punkte von einem bestimmten festen Punkte der Ebene denselben Abstand haben. (Man vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus VI.)

40) Jede Verbindungslinie des Kreiszentrums mit einem Punkte der Kreislinie bezeichnet man als einen Halbmesser oder Radius des Kreises. Die Länge aller Radien eines Kreises ist dieselbe, denn sie ist gleich jenem unveränderlichen Abstande vom Mittelpunkte.

---

*) Unter Kreis wird bald die Kreislinie, bald die Kreisfläche verstanden. Der Sprachgebrauch schwankt. Nach Bedürfnis sollen die letzteren Worte gebraucht werden, sonst der Kürze halber das Wort Kreis.

41) Zu jedem Kreisradius gibt es einen anderen von entgegengesetzter Richtung. Jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade schneidet also den Kreis in zwei Punkten. Das zwischen den letzteren liegende Stück einer solchen Geraden heißt der *Durchmesser* des Kreises. Jeder Kreisdurchmesser ist doppelt so lang als der zugehörige Kreisradius. Alle Durchmesser eines Kreises sind also gleich lang. Die Endpunkte jedes Durchmessers heißen *Gegenpunkte* des Kreises.

42) *Je zwei Kreislinien von demselben Radius decken einander* (oder sind *kongruent*). Legt man nämlich die eine so auf die andere, daß ihr Mittelpunkt auf den der anderen fällt, so müssen auch die beiden Kreislinien sich decken. (Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßten ungleiche Radien vorhanden sein.)

Sie decken einander auf unendlich viele Arten, dreht man nämlich die auf die andere gelegte in der Ebene um ihren Mittelpunkt, so wird die Kongruenz nicht gestört. Jeder Radius des einen Kreises kann mit einem beliebigen des anderen zur Deckung gebracht werden.

Daraus folgt, *daß der Kreis ein vollkommen regelmäßiges ebenes Gebilde ist.*

43) *Jeder Durchmesser teilt die Kreislinie in zwei kongruente Teile*, die man als *Halbkreise* bezeichnet. Kongruent sind sie, weil sich der eine so um das Kreiszentrum drehen läßt, daß beide einander decken. Die Deckung kann auch durch Umklappen der einen Hälfte um den sie begrenzenden Durchmesser erfolgen.

44) Jeder Teil einer Kreislinie heißt ein *Kreisbogen*. Die gerade Verbindungslinie seiner Endpunkte heißt *Sehne*. Die ver-

Fig. 1.

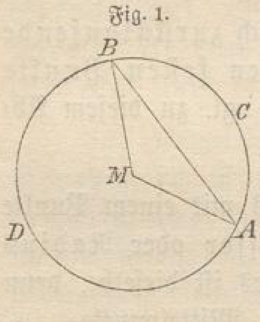


Fig. 2.

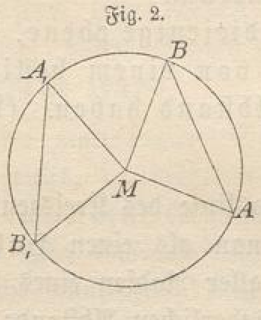
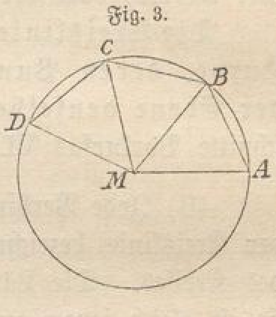


Fig. 3.



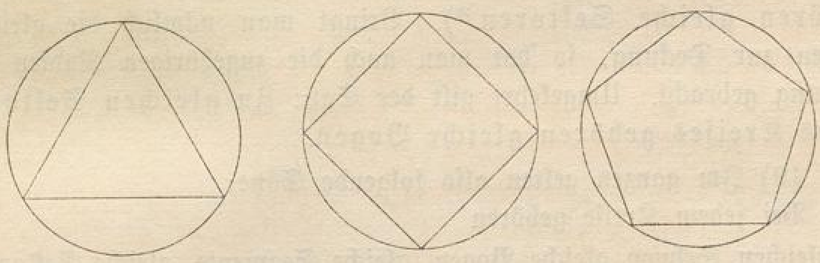
längerte Sehne heißt *Sekante*. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei verschiedene Kreisbogen, in einen kleineren und einen größeren Kreisbogen. Jeder kann als der zum anderen gehörige *Restbogen* bezeichnet werden. (Fig. 1.)

45) Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Bogen.*) Sind nämlich zwei Sehnen eines Kreises gleich, so lassen sie sich durch Drehung der einen um das Kreiszentrum zur Deckung bringen. Dabei decken einander sowohl die beiden kleinen Bogen, als auch die zugehörigen Restbogen. Gewöhnlich spricht man nur von dem kleineren Bogen.

Dann gilt die Erklärung: Gleiche Bogen eines Kreises sind also solche, zu denen gleiche Sehnen gehören. (Fig. 2.)

46) Schließt eine Reihe gleicher Sehnen, deren Anzahl größer als zwei ist, nach einem Umgange, so ist die Kreislinie in eine entsprechende Anzahl gleicher Teile eingeteilt. Von den Sehnen sagt man dann: Sie bilden ein regelmäßiges Vieleck. Verbindet man nämlich die Ecken eines solchen Gebildes durch Radien mit dem Mittelpunkte,

Fig. 4.



so hat man lauter gleichschenklige Dreiecke, von denen jedes mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann, indem man es um den Mittelpunkt dreht. (Man kann die Sehnen zur Deckung bringen, also auch die zu ihnen gehörigen Radienpaare, denn zwischen einem Endpunkte und dem Mittelpunkte ist nur eine einzige Gerade möglich.)

47) Die von der Kreislinie umschlossene Fläche heißt die Kreisfläche. Sie entsteht z. B. durch Drehung eines Radius um einen seiner Endpunkte. Die Kreisfläche wird durch jede Sehne in zwei Flächen zerlegt, die man Kreisabschnitte oder Segmente nennt. Nur bei dem Durchmesser sind die beiden Segmente kongruent (Halbkreisflächen). Bei anderen Sehnen ist das Segment, in dem das Kreiszentrum liegt, das größere, das andere ist das kleinere. Gewöhnlich versteht man unter dem zu einer Sehne gehörigen Segment das kleinere, während man das größere als das zugehörige Restsegment bezeichnet. (Man kann das kleinere Segment soweit um den Mittelpunkt drehen, daß es ganz innerhalb des größeren liegt.) Dann

*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bogenpaare".

gilt der Satz: Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Segmente.*) Man kann nämlich die Sehnen zur Deckung bringen, mit ihnen auch die Kreisbogen und ihre Mittelpunkte, folglich auch die von Sehne und Bogen umschlossenen Flächen. Umgekehrt gehören zu gleichen Segmenten eines Kreises gleiche Sehnen.

48) Den von zwei Radien begrenzten Teil einer Kreisfläche bezeichnet man als Kreisausschnitt oder Kreissektor. Durch zwei Radien wird die Kreisfläche in zwei Sektoren zerlegt. Nur wenn die beiden Radien einen Durchmesser bilden, sind die beiden Sektoren einander gleich (Halbkreisflächen). Sonst sind sie ungleich. Der kleinere Sektor kann soweit um den Mittelpunkt gedreht werden, daß er ganz innerhalb des größeren liegt. Gewöhnlich meint man bei Angabe eines Sektors den kleineren. Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sektoren.*) Bringt man nämlich die gleichen Bogen zur Deckung, so hat man auch die zugehörigen Radien zur Deckung gebracht. Umgekehrt gilt der Satz: Zu gleichen Sektoren eines Kreises gehören gleiche Bogen.

49) Im ganzen gelten also folgende Sätze:

Bei jedem Kreise gehören

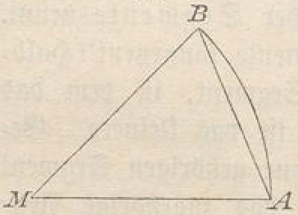
zu gleichen	Sehnen	gleiche Bogen,	gleiche Segmente,	gleiche Sektoren;
„ „	Bogen	„ Sehnen,	„ Segmente,	„ Sektoren;
„ „	Segmenten	„ Sehnen,	„ Bogen,	„ Sektoren;
„ „	Sektoren	„ Sehnen,	„ Bogen,	„ Segmente.

Statt gleich kann man hier überall kongruent sagen.

ϑ) Begriff des Winkels in der Ebene.

50) Gehen von einem festen Punkte der Ebene zwei Strahlen aus, ein in ihr festliegender und ein in ihr um den Punkt drehbarer, so kann man den letzteren zunächst mit dem ersteren zur Deckung bringen und dann in zweierlei Sinne von ihm wegdrehen. Die Drehung kann nämlich im Sinne der Uhrzeigerbewegung und auch im entgegengesetzten Sinne erfolgen.**) Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt des bewegten Strahles einen Kreis, der sich schließt, sobald der Strahl eine volle Umdrehung gemacht hat. Dieses Schließen

Fig. 5.



*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Segmentpaare" oder: „gleiche Sektorenpaare" usw.

**) Vielfach bezeichnet man die der Uhrzeigerbewegung entsprechende erfolgt für alle Teile des Strahles gleichzeitig. Ebenso vollenden alle Punkte des bewegten Strahles gleichzeitig eine halbe Umdrehung, oder eine drittel Umdrehung, oder zwei Drittel einer Umdrehung usw. Jeder Lage entspricht also für alle Punkte des Strahles ein bestimmter Bruchteil bezw. ein bestimmtes Vielfaches einer vollen Umdrehung (z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$ Umdrehung). Gewöhnlich spricht man nur von (echten) Bruchteilen der Umdrehung, da sich beim Überschreiten der Anfangslage der Vorgang noch einmal oder mehrfach wiederholt. Jenen Bruchteil der vollen Umdrehung bezeichnet man auch als die Abweichung des bewegten Strahles vom festen Strahle, oder als den Richtungsunterschied beider Strahlen, oder als den Winkel, den beide Strahlen mit-

Fig. 6.

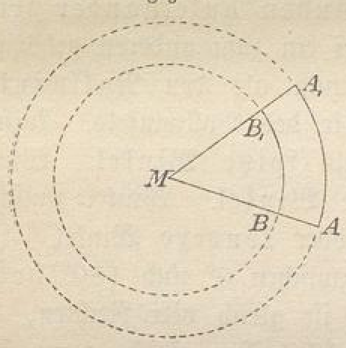
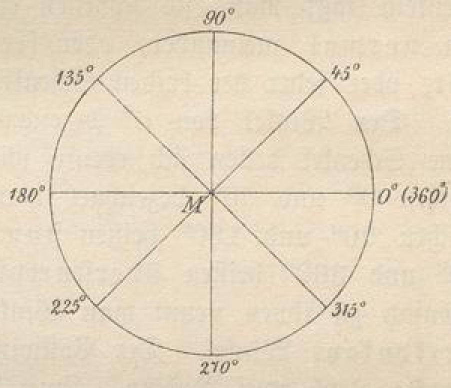


Fig. 7.



einander bilden. Die gezeichneten Teile der beiden Strahlen nennt man die Schenkel des Winkels. Ihre Länge ist vollständig gleichgültig und hat keinen Einfluß auf die Größe der Drehung oder auf die Größe des Winkels. Der Winkel ist lediglich das Maß der (besprochenen) Drehung. Der Drehungspunkt heißt Scheitelpunkt oder kürzer Scheitel des Winkels. (Fig. 6.)

51) Im Vorkursus (Abschnitt VI) ist gezeigt worden, wie man teils durch Konstruktion, teils durch Versuche*) einen Kreis in 2, 3,

Drehung als die negative Drehung, die entgegengesetzte als die positive Drehung. Andere sprechen bezw. von Rechtsdrehung und Linksdrehung.

*) Man kann zwar gewisse Kreisteilungen mit Zirkel und Lineal exakt (andere mit Hilfe gewisser Kurven annäherungsweise) ausführen. Im allgemeinen sind aber die Teilungen in 7, 9, 11, 13, 19, 23, 25 usw. Teile nur auf dem Wege des probeweisen Absteckens mit Hilfe des Zirkels mit einiger Annäherung durchführbar, worüber im Schlußbande zu sprechen ist. Merkwürdig ist, daß auch die Grundlage der Gradeinteilung, der 360. Teil des Kreises, nur annäherungsweise bestimmt werden kann.

4, 5, 6, 7, 8, 9, ... Teile zerlegen kann. Verbindet man die Endpunkte eines solchen Teiles durch Radien mit dem Kreismittelpunkte, so erhält man Winkel von entsprechender Größe, sodaß die Kreisteilung und die Winkelkonstruktion eng zusammenhängen. Winkel, die von zwei Radien eines Kreises gebildet werden, heißen Zentriwinkel. Durch die (angenäherte) Konstruktion des 360-Ecks erhält man zugleich den Winkel, den man als einen Winkelgrad bezeichnet. Die volle Umdrehung gibt einen Winkel von 360^0, er heißt Vollwinkel. Seine Schenkel decken einander (vgl. Fig. 7). Die halbe Umdrehung gibt einen Winkel von 180^0, er heißt gestreckter Winkel. Seine Schenkel haben entgegengesetzte Richtungen und fallen daher in dieselbe gerade Linie. Der vierte Teil der Umdrehung gibt den Winkel von 90^0. Dieser heißt der rechte Winkel oder einfach der Rechte. Von seinen Schenkeln sagt man, sie schnitten einander rechtwinklig, oder sie seien normal zueinander, oder sie ständen aufeinander senkrecht, oder jeder der beiden Schenkel sei ein zum anderen gehöriges Lot. Den Winkel von 0^0 bezeichnet man als den Nullwinkel. Seine Schenkel decken sich ebenso wie die des Vollwinkels. Winkel zwischen 0^0 und 90^0 bezeichnet man als spitze Winkel. Winkel zwischen 90^0 und 180^0 heißen stumpfe Winkel. Winkel zwischen 180^0 und 360^0 heißen überstumpfe oder konvexe Winkel. Im Gegensatz zu ihnen nennt man Winkel zwischen 0^0 und 180^0 hohle oder konkave Winkel. Der Vollwinkel ist gleich vier Rechten, der gestreckte gleich zwei Rechten. Zwei Winkel heißen gleich, wenn ihre Schenkel sich (abgesehen von der Länge) zur Deckung bringen lassen.

52) Ist die Summe zweier Winkel gleich 360^0, so heißt jeder der Restwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich 180^0, so heißt jeder der Supplementwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich 90^0, so heißt jeder der Komplementwinkel des anderen.

53) [Den sechzigsten Teil eines Winkelgrades bezeichnet man als Minute, den sechzigsten Teil der Minute als Sekunde (den sechzigsten Teil der Sekunde als Tertie) usw. (Erste, zweite, dritte Verminderung.) So sagt z. B. $\sphericalangle \alpha = 22^0 23' 35''$, der Winkel α zähle 22 Grad 23 Minuten 35 Sekunden. (Drei Striche würden Tertien bedeuten.) Man kann aber den Winkel auch in Dezimalbruchform schreiben, z. B. $\sphericalangle \beta = 39^0{,}51$.] Unter $\sphericalangle ABC$ versteht man einen Winkel, dessen Scheitel der Punkt B ist, während A und C die Endpunkte der Schenkel sind. Der Scheitel wird also stets in der Mitte genannt.

54) Durch Verlängerung eines Winkelschenkels über den Scheitel hinaus erhält man den **Nebenwinkel** des Winkels, der zugleich ein Supplementwinkel des gegebenen Winkels ist. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man zwei einander gleiche Nebenwinkel, außerdem den **Scheitelwinkel**. Dieser ist dem gegebenen Winkel gleich, denn er ist wie jener der Supplementwinkel für jeden der beiden Nebenwinkel.

55) Aus Gründen der Regelmäßigkeit des Kreises folgt: **Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren.** Bringt man nämlich zwei gleiche Zentriwinkel zur Deckung, so fallen die Endpunkte ihrer Radien paarweise zusammen, ebenso die Endpunkte der zugehörigen Sehnen, der zugehörigen Bogen. Danach läßt sich die unter 49) gegebene Tabelle erweitern.

56) Den halben Umfang des Kreises vom Radius 1 bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π. Der Umfang ist also $u = 2\pi$. Wird der Kreis z. B. im 7-fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang $u = 2 \cdot 7 \cdot \pi$; wird er im r-fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang $u = 2r\pi$. Zunächst durch Messung (durch Umlegen eines möglichst dünnen Fadens um eine Kreisscheibe) findet man, daß π ungefähr gleich $\frac{22}{7}$ oder ungefähr 3,14 ist.*) Jedem Bogen des Kreises vom Radius 1, der ein bestimmter Bruchteil des Kreisumfangs ist, entspricht also ein Winkel (Zentriwinkel), der denselben Bruchteil von 360^0 gibt. So entsprechen einander z. B. $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{360^0}{6} = 60^0$; $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{360^0}{5} = 72^0$ usw. Man sagt daher: Ein Winkel β^0 verhält sich zum Winkel 360^0 ebenso, wie der zugehörige Bogen $\widehat{\beta}$ jenes Kreises zum Bogen 2π; oder: Ein Winkel β^0 verhält sich zum Winkel 180^0 ebenso, wie der zugehörige Bogen $\widehat{\beta}$ zum Bogen π. Diesen Satz stellt man in folgender Schreibweise (als folgende Proportion) dar:

$$\beta^0 : 180^0 = \widehat{\beta} : \pi.$$

*) Ein genauerer Wert ist $\pi = 3{,}14159265\ldots$ **Archimedes** (geboren 287 v. Chr. zu Syrakus) nahm $\frac{22}{7}$ an, was $3{,}142857\ldots$ gibt, also etwas zu groß ist. Ein weit genauerer Näherungswert ist $\frac{355}{113}$. Dieser gibt $3{,}1415929\ldots$, was schon auf 7 Stellen stimmt, für die gewöhnlichen Berechnungen also vollständig ausreicht. Die Berechnung von π wird später gelehrt.

Zur Umrechnung von Winkeln in Bogen und von Bogen in Winkel braucht man also die Formeln*)

$$\beta^0 = \frac{\widehat{\beta}}{\pi} 180^0, \quad \widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}.$$

So gehört z. B. zum Bogen $\widehat{\beta} = 1$ der Winkel $\beta^0 = \frac{1}{\pi} 180^0 = 57^0,295 = 57^0 17',70 = 57^0 17' 42''$.**) Derselbe Winkel gehört zum Bogen $\widehat{b} = r \cdot \widehat{\beta} = r \cdot 1$ am Kreise mit Radius r.

(Den Kreisumfang berechnet man aus dem Radius nach der obigen Formel $u = 2r\pi$, den Kreisradius aus dem Umfange nach der Formel $r = \frac{u}{2\pi}$.***)

Zum Winkel 1^0 gehört (am Kreise mit Radius 1) der Bogen $\widehat{\beta} = \pi \frac{1^0}{180^0} = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453$, am Kreise mit Radius r dagegen der r=fache Bogen.

(Bezeichnet man den am Kreise mit Radius r gemessenen Bogen mit $\widehat{b}_r$, den am Radius 1 gemessenen wieder mit $\widehat{\beta}$, so hat man die Formeln $\widehat{b}_r = r\widehat{\beta}$, $\beta = \frac{\widehat{b}_r}{r}$. Die obigen Umrechnungsformeln für den Kreis mit Radius r werden dann

$$\beta^0 = \frac{\widehat{b}_r}{r\pi} 180^0, \quad \widehat{b}_r = r\pi \frac{\beta^0}{180^0},$$

die mit den obigen übereinstimmen, sobald man den Wert $r\widehat{\beta}$ für $\widehat{b}_r$ einsetzt.)

---

*) Die Gradbezeichnungen heben sich in der Formel $\widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}$ auf, man kann sie also in der Form $\widehat{b} = \pi \frac{\beta}{180}$ schreiben, nur muß dann gesagt werden, daß der Winkel in Graden ausgedrückt ist, z. B. $\beta = 20^0,3$, nicht etwa $\beta = 20^0 18'$ oder $1218'$.

**) Man vergesse nie, daß der Bogen $\widehat{b}$ am Kreise vom Radius 1 gemessen wird. Bei ungenauen Werten von π findet man nicht so genaue Resultate. Die Bruchteile der Sekunden sind hier vernachlässigt.

***) Nimmt man also den Erdumfang als 5400 geographische Meilen an, so hat der Erdradius eine Länge von 859,43 geographischen Meilen. Nimmt man den Erdumfang zu 40 000 000 m an, so hat der Erdradius eine Länge von 6 366 200 m. Dabei ist der genauere Wert von π zugrunde gelegt und eine Genauigkeit auf fünf Stellen erstrebt. — Der Äquatorgrad hat für die Erde eine Länge von $\frac{5400}{360} = \frac{2700}{180} = 15$ geogr. Meilen. Für jede Reise längs des Äquators kann man also die Länge aus den Graden und die Grade aus der Länge berechnen.

(In vielen Lehrbüchern, besonders in den physikalischen, wird von Winkeln π oder $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ usw. gesprochen. Man meint damit Winkel von 180°, bezw. 90°, 60°, 45° usw., denn dabei ist die Größe des am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogens angegeben. Hier soll bei einem Winkel α stets der Winkel in Graden und seinen Bruchteilen gemeint sein, während $\widehat{\alpha}$ den am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogen bedeuten soll. Bogenlängen an Kreisen von beliebigem Radius sollen dagegen mit lateinischen Buchstaben nebst Bogen, z. B. mit $\widehat{a}$ bezeichnet werden, gegebenenfalls mit $\widehat{a}_r$, wenn der Radius r bekannt ist. Es handelt sich bei diesen Unterscheidungen nur um die Vermeidung von Mißverständnissen.)

b) Die einfachsten planimetrischen Konstruktionen.

α) Die Zeichengeräte.

57) Die unentbehrlichsten Zeichengeräte sind das Lineal und der Zirkel. Das erstere dient zum Zeichnen gerader Linien mittels des Bleistiftes oder der mit Tusche gefüllten Handreißfeder*). Der Handzirkel dient zum Messen der Längen und zur Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnungen, der Einsatzzirkel mit den Einsatzteilen zum Zeichnen der Kreise und Kreisbogen mit Bleistift oder Reißfeder.

(Daß es auch krummlinige oder Kurvenlineale und Schablonen zum Zeichnen bestimmter Kurven gibt, sei beiläufig bemerkt).

58) Sollen Geraden von gegebener Länge gezeichnet werden, so ist die Länge unmittelbar mit Hilfe eines Maßstabes, oder mittelbar mit Hilfe des Zirkels zu bestimmen, dem man an einem Maßstabe die geforderte Öffnung gibt. Der Maßstab ist entweder nur auf dem Blatte gezeichnet, oder er ist ein Lineal mit metrischer Einteilung, welches also Meter, Dezimeter, Zentimeter, Millimeter angibt. (Vorkursus § 14 bis 16.)

59) Bei technischen Zeichnungen stellt man die Gebilde meist nicht in der wirklichen Größe, sondern in „verkleinertem Maßstabe" dar. Dann wird auf dem Rande des Zeichenblattes ein „verjüngter"

*) Die Vorsilbe Reiß hängt mit dem Worte Riß zusammen, denn man spricht vom Grundriß oder Aufriß eines Gebäudes oder einer Maschine oder eines Apparates oder irgend eines räumlichen Gebildes. Solche Risse werden auf dem Reißbrett gezeichnet. Die Zeicheninstrumente gehören zum Reißzeug.