Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

I. Übersichtliche Zusammenstellung und Ergänzung der planimetrischen Ergebnisse des Vorkursus.

Erste Abteilung.

Planimetrie.

A. Planimetrische Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

I. Übersichtliche Zusammenstellung und Ergänzung der planimetrischen Ergebnisse des Vorkursus.

a) Einige Vorbegriffe und ihre Erklärungen.

α) Die Mathematik und ihre Teile.*)

1) Die Mathematik ist die Lehre von den Größen. Sie zerfällt in die reine und die angewandte Mathematik. (Vgl. Vorkursus I.)**)

α_1) Die reine Mathematik ist die Lehre von den Raum- und den Zahlengrößen.

Die Geometrie oder Raumlehre ist die Lehre von den Raumgrößen.

Die Arithmetik oder Zahlenkunde ist die Lehre von den Zahlengrößen.

α_2) Die angewandte Mathematik ist die Lehre von allen anderen meßbaren Größen.

(Hierher gehören z. B. die Zeitgrößen und die Geschwindigkeiten, die mechanischen Größen wie Kräfte, Gewichte, Massen, Druckspannungen, Zugspannungen, Arbeiten, Maschinenleistungen, physikalische Größen aller Art, wie Lichtstärke, Wärme, magnetische und elektrische Kräfte usw.)

---

*) Um an die griechischen Buchstaben zu gewöhnen, hat Verfasser solche zur Zählung der Abschnitte benutzt. Das griechische Alphabet befindet sich am Schlusse dieses Bandes.

**) Es wird angenommen, daß der Vorkursus sich in der Hand des Lehrers befinde. Dort sind ausführlichere Erläuterungen gegeben. Hier soll mehrfach auf diese hingewiesen werden und zwar unter Angabe der Nummern der dortigen Paragraphen.

β) Der mathematische Raum und die geometrischen Gebilde.

2) Der Weltraum ist das Gebiet, in dem sich alle wirklichen oder physischen Körper befinden, und in dem alle möglichen Bewegungen (Ortsveränderungen) stattfinden. Er enthält z. B. die gesamte uns bekannt gewordene Fixsternwelt und erstreckt sich nach menschlicher Auffassung über diese hinaus nach jeder Richtung hin ins Unendliche (Endlose, Unbegrenzte, Unmeßbare). Wie sich der Weltraum außerhalb der Fixsternwelt verhält, ist uns vollständig unbekannt, sodaß man sogar seine Unendlichkeit nicht nachweisen, sondern nur vermuten oder voraussetzen kann. Deshalb denke man sich statt des wirklichen Weltraums einen mathematischen Raum, dem bestimmte Eigenschaften zuzuschreiben sind, die sich auch auf das unendlich ferne Gebiet beziehen sollen. (Vorkursus § 1.)

3) Der mathematische Raum, den wir uns denken wollen, soll folgende Eigenschaften haben: Er erstreckt sich nach allen Richtungen hin ununterbrochen ins Unendliche. Er ist in jeder Hinsicht unverändert und befindet sich z. B. im Zustande vollkommener Ruhe (Unbeweglichkeit).*) Er ist in allen Teilen gleichartig und vollkommen stoffleer, besitzt also keine physikalisch-chemischen Eigenschaften.**) Er ist lediglich als ausgedehnt und als in Teile zerlegbar zu denken. Unter den unendlich zahlreichen Richtungen pflegt man im Hinblick auf die Stellung des Beobachters drei Hauptrichtungen auszuwählen, z. B. von vorn nach hinten, von rechts nach links, von unten nach oben. Allgemeiner spricht man von drei Dimensionen (Ausdehnungen) des mathematischen Raumes***), worüber erst später eingehend berichtet werden soll. (Gewöhnlich bezeichnet man diese Dimen-

*) Die Alten hielten die Erde für unbewegt und meinten, um diese drehe sich das gesamte Weltall. Später hielt man die Sonne für das in Ruhe befindliche Zentrum des Weltalls. Bald mußte man auch diese als im Weltraume sich bewegend annehmen. So wurde man zur Annahme eines ruhenden Weltraumes genötigt. Dem entspricht die Annahme eines in Ruhe befindlichen mathematischen Raumes.

**) Gewisse Unregelmäßigkeiten, die man im wirklichen Raume wahrnimmt, haben ihren Grund in seiner unregelmäßigen Stofferfüllung. Ein schräg ins Wasser getauchter geradliniger Stab z. B. erscheint als gebrochen. Solche Unregelmäßigkeiten sind im mathematischen Raume ausgeschlossen.

***) Auf die Untersuchung mathematischer Räume von mehr als drei Dimensionen kann die Schule nicht eingehen. Der hier zu besprechende Raum wird als der Euklidsche Raum bezeichnet. Euklid, der um 300 v. Chr. gelebt und nach Pappus in Alexandria gewirkt hat, stellte die Elemente der Mathematik in mustergültiger Weise zusammen.

sionen als Länge, Breite und Höhe.) Nur von diesem mathematischen Raume soll von jetzt ab die Rede sein.

4) Ein **mathematischer** Körper ist ein Teil des Raumes, der vollständig gegen den übrigen Raum abgegrenzt ist. Diese Abgrenzung geschieht durch Gebilde, die man als **Flächen** bezeichnet. (Diese bedürfen noch der näheren Erläuterung.) Von der Art der Begrenzung hängt die besondere **Gestalt** (Form) des Körpers ab. Die Größe des Raumes, den ein Körper einnimmt, bezeichnet man als seinen **Rauminhalt** oder kürzer als seinen **Inhalt.** Jeder mathematische Körper ist teilbar durch Flächen. Er wird als im Raum bewegbar angenommen. Nur von mathematischen Körpern soll von jetzt ab gesprochen werden. (Über die Unterschiede zwischen wirklichen und mathematischen Körpern vgl. Vorkursus §§ 2, 7, 8.)

[**Bemerkungen.** Ein Körper kann sich ganz im Endlichen (im meßbaren Gebiete) befinden, er kann sich aber auch vom Endlichen aus bis ins Unendliche (Unmeßbare) erstrecken. Hier soll zunächst nur von endlichen Körpern die Rede sein. Diese haben eine bestimmt vorstellbare Gestalt und einen endlichen Inhalt.

Reicht der Körper bis ins Unendliche, so kann zwar seine Gestalt auch dort eine bestimmt vorgeschriebene sein, aber von eigentlicher Vorstellbarkeit kann dann nicht mehr gesprochen werden, auch wird der Inhalt im allgemeinen unbestimmbar, weil er im allgemeinen unendlich groß wird. (Trotzdem gibt es mathematische Körper, die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen genau bestimmbaren Inhalt haben.)*) Die Begrenzung eines ganz im Endlichen liegenden

---

*) Diese Behauptung erscheint auf den ersten Blick unwahrscheinlich. Lediglich zu dem Zwecke, vor übereilten Aussprüchen über das Unendliche zu warnen, soll ein einfaches Beispiel angegeben werden.

Man denke sich eine senkrecht stehende Säule von quadratischer Grundfläche. Die letztere fasse 1 qm, die Säule habe die Höhe von 2 m, also den Inhalt 2 cbm. Man denke sich die Säule durch horizontale Schnitte in Schichten zerlegt, die von unten her der Reihe nach die Höhen 1 m, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{8}$ m, $\frac{1}{16}$ m usw. haben, sodaß jedesmal die noch vorhandene Resthöhe halbiert wird. Man kann sich denken, daß diese Resthalbierung unendlich oft vorgenommen wird, sodaß die Restschicht schließlich unendlich dünn wird und ihre Höhe allmählich immer näher an Null heranrückt. Die einzelnen Schichten haben dann der Reihe nach die Inhalte 1 cbm, $\frac{1}{2}$ cbm; $\frac{1}{4}$ cbm, $\frac{1}{8}$ cbm, $\frac{1}{16}$ cbm usw. Die Summe der Inhalte ist also $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$ cbm

Körpers bezeichnet man als seine **Oberfläche**. Diese ist zugleich die Grenzfläche seines **Außenraumes**. Ein Körper kann auch mehrere Oberflächen haben.*)

5) **Eine mathematische Fläche ist zunächst ein Gebilde, welches als Grenze eines Körpers auftritt und demnach benachbarte Räume voneinander trennt. Sie selbst ist nicht ein Teil eines Raumes, sondern die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarter Raumteile. Ihr räumlicher Inhalt ist gleich Null, weil sie keine Dicke besitzt. Ist die Fläche begrenzt, so sind ihre Grenzen Gebilde, die man Linien nennt und die noch der näheren Erläuterung bedürfen. Die Fläche ist teilbar durch Linien. Die Fläche hat, auch wenn sie unbegrenzt ist, eine bestimmte Gestalt; ist sie begrenzt, so ist die Gestalt auch von der Art der Begrenzung abhängig. Die Größe einer Fläche bezeichnet man als den Flächeninhalt. Die Flächen werden als im Raume bewegbar angenommen.** (Vgl. Vorkursus § 3.)

---

und dies muß gleich dem ursprünglichen Inhalte 2 cbm sein. (Daher sagt man, die Summe der bis ins Unendliche fortzusetzenden Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ sei gleich 2.)

Jetzt denke man sich die einzelnen Teile der Säule statt übereinander dicht nebeneinander gelegt, sodaß sie einen geradlinigen Streifen von der Breite 1 m bedecken, von dem jeder Teil 1 qm Grundfläche beansprucht. Dann muß dieser Streifen bis ins Unendliche reichen, denn es sind unzählige Körperteile vorhanden, die unendlich viele Quadratmeter bedecken.

Betrachtet man jetzt das Ganze als einen einzigen Körper, so reicht dieser bis ins Unendliche und hat doch nur 2 cbm Inhalt. —

In derselben Weise kann man mit einer solchen Säule von $1\frac{1}{2}$ m Höhe verfahren, von der man erst eine Schicht von 1 m Höhe abschneidet, dann eine solche von $\frac{2}{3}$ der Resthöhe, nämlich $\frac{1}{3}$ m, dann wieder eine solche von $\frac{2}{3}$ der Resthöhe usw. Dabei erhält man in derselben Weise die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{3}{2}$. Mit den Körperteilen kann jetzt ebenso verfahren werden, wie vorher. Der neue Körper erstreckt sich dann wieder ins Unendliche und hat doch nur den Inhalt $\frac{3}{2}$ cbm.

An solchen Beispielen erkennt man, **daß es in vielen Fällen falsch ist, von der Erstreckung eines Körpers ins Unendliche darauf zu schließen, daß sein Inhalt unendlich groß sei.**

*) Als Beispiel sei die Hohlkugel genannt, die eine äußere und eine innere Oberfläche hat.

[**Bemerkungen.** Eine Fläche kann ganz im Endlichen liegen und muß dabei nicht notwendig durch Linien begrenzt sein, denn sie kann vollständig in sich zurücklaufen.*) Eine Fläche kann teilweise in sich zurücklaufen, teilweise sich ins Unendliche erstrecken**). Eine Fläche kann ins Unendliche reichen, ohne im Endlichen irgendwie in sich zurückzulaufen oder irgendwie begrenzt zu sein.***) Flächen, die bis ins Unendliche reichen, haben im allgemeinen einen unendlich großen Flächeninhalt. (Trotzdem gibt es Flächen, die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen, genau bestimmbaren Flächeninhalt haben.†) Eine ganz im Endlichen befindliche Fläche hat im allgemeinen einen endlichen Flächeninhalt. (Trotzdem gibt es Flächen solcher Art, deren Inhalt unendlich groß ist).††)

Die Begrenzung einer im Endlichen liegenden Fläche nennt man ihre Umrandung oder ihren Umfang. Eine Fläche kann auch mehrere Umrandungen haben. Als Beispiel diene die Fläche zwischen zwei Kreisen derselben Ebene, von denen der eine den andern umschließt, ohne ihn zu berühren.

6) Eine Linie ist zunächst ein Gebilde, welches eine Fläche begrenzt oder benachbarte Flächenteile voneinander trennt. Sie selbst ist nicht ein Teil einer Fläche, sondern die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarter Flächenteile. Ihr Flächeninhalt ist gleich Null, weil sie keine Breite hat. Ist die Linie begrenzt, so sind die Grenzen Gebilde, die man als Punkte bezeichnet und die noch der

---

*) Das einfachste Beispiel ist die Kugelfläche. Diese ist unbegrenzt und liegt doch ganz im Endlichen, sobald nur der Radius endlich ist. Die Kugelfläche hat dabei eine bestimmte Gestalt. Man kann aus dieser Fläche Teile ausschneiden, deren Gestalt nun auch durch die Grenzlinien bestimmt ist.

**) Beispiele sind die Mantelflächen des Kreiszylinders und des Kreiskegels, die sich bis ins Unendliche erstrecken können.

***) Ein Beispiel ist die Ebene.

†) Als Beispiel diene eine der beiden bis ins Unendliche reichenden senkrechten Grenzflächen des in der Randbemerkung zu 4) besprochenen ersten Körpers. Die Teile dieser Fläche haben zusammengenommen den Flächeninhalt $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$ qm $= 2$ qm.

††) Man kann sich auf einem endlichen Zeichenblatt eine Linie denken, die aus unendlich vielen Kreuz- und Querzügen oder Windungen besteht, sodaß ihre Länge unendlich groß ist. Denkt man sich über dieser Linie einen „Zylindermantel" von nur 1 cm Höhe errichtet, so ist dessen Flächeninhalt unendlich groß, obwohl er ganz im Endlichen liegt. Auch dieses Beispiel soll nur vor übereilten Aussagen über das Unendliche warnen.

näheren Erläuterung bedürfen. Jede Linie ist durch Punkte teilbar. Sie hat eine bestimmte Gestalt (Form). Die Größe einer Linie bezeichnet man als ihre Länge. Die Linien werden als im Raume bewegbar angenommen. (Vgl. Vorkursus § 4.)

[**Bemerkungen.** Eine Linie kann ganz im Endlichen liegen und muß dabei nicht notwendig eine Grenze haben, denn sie kann in sich zurücklaufen.*) Eine bis ins Unendliche reichende Linie ist stets von unendlicher Länge. Eine ganz im Endlichen liegende Linie ist im allgemeinen von endlicher Länge. Trotzdem gibt es Linien, die ganz im Endlichen liegen und doch von unendlicher Länge sind.**) Mathematische Linien sind „unsichtbar"***), da sie keine Breite haben. Man kann sie durch dünne Fäden oder durch gezeichnete „Linien" nur veranschaulichen.]

7) Ein Punkt ist zunächst ein Gebilde, welches eine Linie begrenzt oder benachbarte Linienteile voneinander trennt. Er selbst ist kein Teil einer Linie, sondern nur das Ende einer solchen oder die gemeinschaftliche Grenze benachbarter Linienteile. Seine Länge ist gleich Null. Er ist also nur eine im Raume gedachte Stelle, die überhaupt keine Ausdehnung hat, also weder Gestalt noch Größe besitzt und auch nicht teilbar ist. Die Punkte werden als im Raume bewegbar angenommen.

Mathematische Punkte sind unsichtbar. Man kann sie nur veranschaulichen.

8) Es gibt also an einfachen geometrischen Gebilden nur die folgenden: Körper, Flächen, Linien und Punkte. Daher gibt es für die Raumlehre nur Raumgrößen (im engeren Sinne), Flächengrößen, Liniengrößen (oder Längen), während man von Punktgrößen nicht reden kann. Dies führt auf die Raummaße, Flächenmaße und Längenmaße.

*) Das einfachste Beispiel ist die Kreislinie.

**) Vgl. die letzte zu 5) gegebene Randbemerkung.

***) Das Wort „unsichtbar" ist nur aus Gründen der Veranschaulichung gebraucht, da im mathematischen Raume von Lichterscheinungen nicht die Rede sein kann. Auch bei Punkten wird in diesem veranschaulichenden Sinne von „Unsichtbarkeit" gesprochen. Trotzdem wird später vielfach vom Erscheinen solcher Gebilde gesprochen. Anstelle des wirklichen Auges hat man sich dabei ein geistiges Auge zu denken, bei dem die Schärfe der Sehkraft als eine unendlich große zu denken ist, sodaß ihm sogar Unendlichkleines sichtbar ist.

Als zusammengesetzte geometrische Gebilde kann man sich Gruppen von Körpern, Gruppen von Flächen, Gruppen von Linien, Gruppen von Punkten und auch Gruppen verschiedenartiger dieser Gebilde denken.

Jetzt wird folgende Erklärung verständlich sein:

Die Raumlehre oder Geometrie beschäftigt sich mit den gesetzmäßig gestalteten mathematischen Körpern und den an ihnen auftretenden oder auch als selbständig zu denkenden Flächen, Linien und Punkten, mit den Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen dieser Gebilde, mit ihrer Berechnung und Konstruktion. (Vgl. Vorkursus § 9.)

γ) Bewegungsbeziehungen und Ausdehnungen oder Dimensionen.

9) Durch Bewegung eines Punktes im Raume entsteht als Weg eine Linie. Dieser Weg hat eine (endliche oder eine unendliche) Länge, aber keine Breite und keine Dicke. Man sagt daher: Eine Linie hat nur eine einzige Dimension, die Länge. (Vorkursus § 44 und 45.)

10) Durch Bewegung einer Linie entsteht als Weg im allgemeinen eine Fläche. Zur Längenausdehnung der Linie tritt dabei eine neue Ausdehnung, die als Breite bezeichnet werden soll. Man sagt daher: Eine Fläche hat zwei Dimensionen, Länge und Breite.

Für die Bewegung wird dabei vorausgesetzt, daß die Linie sich nicht in sich selbst bewege, sondern seitlich aus ihrer Lage heraustrete. (Vorkursus § 46.)*)

11) Durch Bewegung einer Fläche entsteht als Weg im allgemeinen ein Körper. Zu den Dimensionen Länge und Breite tritt dabei eine neue, die man als Dicke oder auch als Höhe bezeichnet. Man sagt daher: Ein Körper hat drei Dimensionen, Länge, Breite und Dicke (oder Höhe).

Für die Bewegung wird dabei vorausgesetzt, daß die Fläche sich nicht in sich selbst bewege, sondern seitlich aus ihrer Lage heraustrete.*)

*) Daß sich Linien ohne jede Gestaltveränderung in sich selbst bewegen können, sodaß keine Fläche entsteht, erkennt man z. B. an der Geraden, am Kreise, an der Schraubenlinie. Daß sich Flächen ohne Gestaltveränderung in sich selbst bewegen können, sodaß kein Körper entsteht, erkennt man z. B. an der Ebene, am Kreiszylinder, am senkrechten Kreiskegel, an der Kugel, an jeder Drehungsfläche und an jeder Schraubenfläche. Auch gewisse entsprechende Körper können sich so in sich selbst bewegen, daß sie nicht aus sich selbst

[**Bemerkungen.** Durch Bewegung eines Körpers entsteht im allgemeinen wieder ein körperlicher Weg. Eine vierte Dimension nämlich, in die ein Körper z. B. mit allen Punkten zugleich hinaustreten könnte, ist uns im Weltraum nicht sinnlich wahrnehmbar. Daher nehmen wir auch für unseren mathematischen Raum an, er besitze nur die genannten drei Dimensionen.*)

In jedem endlichen Körperteile kann man sich einen kleinen Würfel denken, an dessen Kanten man Länge, Breite und Höhe erkennt. Demnach muß der Körper selbst alle drei Dimensionen haben. Auf jeden endlichen Teil einer (z. B. krummen) Fläche kann man im allgemeinen ein sehr kleines Quadrat zeichnen (z. B. auf die Kugelfläche.) An den Seiten des Quadrates erkennt man die Länge und Breite. Die beiden ersten Dimensionen besitzt also auch die Fläche, aber sie hat keine Dicke. Von jeder z. B. krummen Linie läßt sich im allgemeinen ein so kleines Stück ausschneiden, daß man es als geradlinig betrachten kann. An ihm beobachtet man nur die Länge, aber keine Breite und Dicke. So hat auch die ganze Linie nur die Dimension Länge, nicht aber die Dimensionen Breite und Dicke.]

12) Umgekehrt kann man sich folgendes vorstellen: Läßt man bei einem Körper die Dicke so zusammenschrumpfen, daß sie schließlich überall verschwindet (gleich Null wird), so bleibt nur noch eine Fläche übrig. Läßt man bei dieser die Breite so zusammenschrumpfen, daß diese schließlich überall verschwindet, so bleibt nur eine Linie übrig. Läßt man bei dieser die Länge so zusammenschrumpfen, daß letztere schließlich gleich Null ist, so bleibt nur noch ein Punkt übrig. (Vgl. Vorkursus § 44.)

δ) Das gegenseitige Schneiden und Durchdringen geometrischer Gebilde.

13) Schneiden einander zwei Linien einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt zweier Linien ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Linien gemeinsam.**) Eine krumme Linie kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

---

heraustreten und ihre Bewegung nicht wahrnehmbar ist, z. B. jeder Drehungskörper, der sich um seine Achse dreht, jeder beiderseits ins Unendliche reichende Zylinder, jeder ebenso ins Unendliche reichende Schraubenkörper, der sich in entsprechender „Schraubung" bewegt.

*) Wer sich einen Raum mit mehr als vier Dimensionen denken will, der möge sich mit dessen Geometrie beschäftigen. Mit unserem Euklidschen Raume haben solche Untersuchungen nichts zu schaffen.

) **Beispiele: Zwei gerade Linien haben höchstens einen Schnittpunkt,

14) Schneiden einander zwei Flächen einmal oder mehrfach, so geschieht es jedesmal in einer Linie. Also: Jeder Schnitt zweier Flächen ist eine Linie. Die Schnittlinie ist beiden Flächen gemeinsam.*) Eine gekrümmte Fläche kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

15) Schneiden einander eine Linie und eine Fläche einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt einer Linie und einer Fläche ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Gebilden gemeinsam.**)

16) Bei Körpern spricht man nicht von gegenseitigem Schneiden, sondern von gegenseitigem Durchdringen. „Wahrnehmbar" ist dabei nur das gegenseitige Durchschneiden ihrer Oberflächen, welches in Linien geschieht. Darüber soll erst in der Stereometrie gesprochen werden. Gekrümmte Körper können so gestaltet sein, daß Teile von ihnen einander durchdringen. (Vorkursus § 6.)

ε) Begriff der geraden Linie und der Richtungen im Raume.

17) Die gerade Linie wird in der Regel veranschaulicht durch einen straff gespannten Faden, der sich zwischen zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Punkten befindet.***) Man schließt daraus: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen je zweien ihrer Punkte. Daraus folgt z. B., daß die Summe zweier Dreiecksseiten stets größer ist als die dritte, auch wenn letztere die größte von ihnen ist. In einem Dreiecke ABC z. B., dessen Ecken die Seiten a, b, c gegenüberliegen, sei c die größte Seite, dann

---

zwei Kreise haben höchstens zwei Schnittpunkte, zwei Ellipsen haben höchstens vier Schnittpunkte usw.

*) **Beispiele:** Zwei Ebenen können einander höchstens in einer Geraden schneiden. Drei Ebenen können einander höchstens in drei Geraden schneiden. Zwei Kugelflächen können einander in einer Kreislinie schneiden. Eine Ebene und eine Kugelfläche können einander in einer Kreislinie schneiden.

**) Eine Gerade und eine Ebene können einander höchstens in einem Punkte schneiden, eine Kreislinie und eine Ebene höchstens in zwei Punkten, eine Gerade und eine Kugelfläche in höchstens zwei Punkten.

***) Diese Veranschaulichung versagt bei größeren Entfernungen der beiden Punkte. So geben z. B. Telegraphendrähte und Telephondrähte trotz aller Zugspannung doch krumme „Linien". Dasselbe gilt von Seilen, auch Drahtseilen, von längeren Ketten usw. Man nennt die so veranschaulichten Linien Kettenlinien. Die Abweichung von der geradlinigen Form erfolgt durch die Wirkung der Schwerkraft. Ein längerer Telegraphendraht würde zerreißen, ehe er durch Zugspannung ganz geradlinig würde. Ein in senkrechter Richtung gespannter Draht wird jedoch stets geradlinig.

ist doch $a + b > c$*), denn der direkte Weg von B bis A ist kürzer als der Umweg $BC + CA$.

Daraus folgt ferner $(a + b) - b > c - b$, oder $a > c - b$ d. h. jede Dreiecksseite, auch die kleinste, ist größer als der Unterschied der beiden andern. (Daß $a + b - b = a$ ist, erscheint leichtverständlich.)

18) Man kann das Auge in Lagen bringen, in denen jedes Stück einer Geraden als Punkt erscheint.**) Der vorderste Punkt verdeckt dabei alle andern Punkte der Geraden.

19) Daher sagt man: Für diese Lage des geistigen Auges liegen alle Punkte der Geraden in derselben Richtung. Ebenso sagt man allgemeiner: Die Gerade hat in allen ihren Teilen dieselbe Richtung. Sind A und B die Endpunkte der Geraden, so kann man ihr zwei Richtungen zuschreiben, die Richtung von A nach B oder die Richtung von B nach A. Daraus folgt ferner:

20) Die Gerade kann in ihrer Richtung bewegt werden, ohne seitlich aus der „Richtungslinie" herauszutreten. Durch diese Bewegung erhält man nicht eine Fläche, sondern nur die Verlängerung der Geraden. Die Gerade kann nach beiden Richtungen hin ins Unendliche verlängert werden.

21) Dreht man die Gerade unter Festhaltung zweier ihrer Punkte, so nimmt das (geistige) Auge nichts von einer Lagenänderung wahr. (Dagegen würden krumme Linien bei dieser Drehungsbewegung dem Auge in unendlich vielen verschiedenen Lagen erscheinen.) Man schließt daraus: Zwischen je zwei (im Endlichen liegenden) Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich. Oder: Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte vollständig bestimmt.

22) Weil zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist und diese den kürzesten Weg gibt, so mißt man den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte mittels dieser Geraden. Also: Die gegenseitige Entfernung zweier Punkte ist gleich der Länge der sie verbindenden Geraden.

23) Aus 21) folgt noch: Zwei Geraden können höchstens einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Hätten sie

---

*) Das Zeichen $>$ bedeutet „größer als", das Zeichen $<$ bedeutet „kleiner als".

**) Der ausgesprochene Satz sagt eigentlich nur, daß eine Gerade eine Ebene nur in einem Punkte schneiden kann. Auf einem höheren Standpunkte wird er so ausgedrückt: Kann die Projektion einer Linie auf eine Ebene ein Punkt sein, so ist die Linie eine Gerade.

nämlich zwei solche, so würden zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten zwei Geraden möglich sein, was dem in 21) angegebenen Satze widerspräche.

24) Zwei gleich lange Geraden können auf zweierlei Art zur Deckung gebracht werden. Ist AB die eine Gerade, A_1B_1 die andere, so kann man AB sowohl auf A_1B_1 als auch auf B_1A_1 legen. Statt dieses Satzes sagt man auch: Zwei Geraden von derselben Länge sind auf zweierlei Art kongruent.

25) Eine nur einseitig begrenzte Gerade bezeichnet man als Strahl. Den Grenzpunkt bezeichnet man als seinen Ausgangspunkt oder Anfangspunkt. Seine Richtung geht von diesem aus ins Unendliche. So kann man sich z. B. vom Auge aus nach jedem Punkte des scheinbaren Himmelsgewölbes eine Gerade gezogen und diese bis ins Unendliche verlängert denken. Allgemeiner gilt:

Von jedem Raumpunkte gehen unendlich viele Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das Strahlenbündel des Punktes. Durch das Strahlenbündel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen im Raume angegeben.

26) Linien, die nicht alle Eigenschaften der Geraden besitzen, nennt man krumme Linien oder Kurven. (Man vgl. Vorkursus § 11—16.)

ξ) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie.

27) Eine Ebene ist eine unbegrenzte Fläche, in der sich von jedem ihrer Punkte aus nach jedem andern (ihrer Punkte) eine Gerade ziehen läßt, die nirgends, auch in ihrer Verlängerung nicht, aus dieser Fläche heraustritt.

28) Von jedem Punkte der Ebene gehen also unendlich viele ganz in ihr liegende Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das (ebene) Strahlenbüschel des Punktes. Durch dieses Strahlenbüschel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen in der Ebene angegeben.

29) Das Auge kann in Lagen gebracht werden, in denen ihm ein irgendwie begrenztes Stück der Ebene als eine gerade Linie erscheint.*)

*) Der Satz ist im Grunde derselbe, wie der Satz, daß zwei Ebenen einander nur in einer Geraden schneiden können. Auf einem höheren Standpunkte wird gesagt: Eine Fläche, deren Projektion auf eine Ebene eine Gerade sein kann, ist stets eine Ebene.

30) Statt dessen kann man sagen: Bewegt sich ein Strahl um seinen festliegenden Anfangspunkt so, daß er stets auf einer festen Geraden hingleitet, die nicht durch diesen Punkt geht, so beschreibt er eine Ebene. (Statt des Strahles kann man auch die unbegrenzte Gerade nehmen.) Daraus folgt:

31) Eine Ebene ist durch eine Gerade und einen außerhalb dieser liegenden Punkt vollständig bestimmt. Daraus folgt ferner:

32) Eine Ebene ist durch drei Punkte vollständig bestimmt; denn zwei davon kann man durch eine Gerade verbinden. Daraus folgt ferner:

33) Durch zwei einander schneidende Geraden ist eine Ebene vollständig bestimmt. Die eine Gerade kann man nämlich als die feste Gerade, einen beliebigen Punkt der andern kann man als den Drehungspunkt des Strahles betrachten, die zweite Gerade als den bewegten Strahl in einer seiner Lagen. Gleitet also eine Gerade auf zwei festen einander schneidenden Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene.

34) Bei der unter 30) beschriebenen Bewegung tritt der Fall ein, daß der Durchschnittspunkt der gedrehten und der festgehaltenen Geraden in unendliche Entfernung rückt. Dann sagt man, die feste Gerade und die bewegte Gerade sind in dieser Lage parallel, sie haben dabei dieselbe Richtung, sie gehen nach demselben unendlich fernen Punkte hin. Daraus folgt für 33), daß der Schnittpunkt der beiden Geraden auch in unendlicher Entfernung liegen darf. Also ergibt sich der Satz: Durch zwei parallele Geraden ist stets eine Ebene vollständig bestimmt. Oder: Gleitet eine Gerade auf zwei festen parallelen Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene. Oder: Durch zwei parallele Geraden läßt sich stets eine Ebene legen.

35) Umgekehrt kann man sagen: Schneiden einander zwei Geraden im Raume nicht, so weit man sie auch verlängert, läßt sich aber durch beide eine Ebene legen, so sind die Geraden parallel. (Es gibt Geraden im Raume, die noch so weit verlängert, einander nicht schneiden, durch die sich aber keine Ebene legen läßt. Solche Gerade nennt man windschiefe Gerade.)

Über diese Sätze muß aber noch ausführlicher gesprochen werden.

36) Flächen, die nicht alle Eigenschaften der Ebene besitzen, nennt man krumme Flächen.

37) Geometrische Gebilde, die ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als ebene Gebilde.

Geometrische Gebilde, die nicht ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als nicht ebene, oder als unebene oder als räumliche Gebilde (im engeren Sinne).

So gibt es ebene Punktgruppen und räumliche Punktgruppen; ebene Liniengruppen und räumliche Liniengruppen; ebene und räumliche Gruppen von Punkten und Linien und ebene und räumliche Gruppen von Flächenstücken; es gibt ebene Kurven und räumliche Kurven.

38) Demnach zerfällt die Geometrie in zwei Teile, in die Geometrie der ebenen Gebilde oder die Planimetrie und in die Geometrie der räumlichen Gebilde (im engeren Sinne) oder die Stereometrie.

Vorläufig soll nur noch von der Planimetrie die Rede sein. In ihr kann man hinsichtlich der Größenmessung von Längenmessung (Longimetrie) und Flächenmessung (Planimetrie im engeren Sinne) sprechen. (Vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus § 20—29.)

η) Begriff des Kreises*), des regelmäßigen Vielecks und ihrer Teile.

39) Bewegt sich ein Punkt, ohne umzukehren, in einer Ebene so, daß er von einem gegebenen festen Punkte der letzteren stets denselben Abstand behält, so kehrt er schließlich in die ursprüngliche Lage zurück. Der nach einem solchen Umlaufe zurückgelegte Weg wird als eine Kreislinie bezeichnet. Der feste Punkt heißt ihr Mittelpunkt, oder ihre Mitte, oder ihr Zentrum.

Die Kreislinie ist diejenige ebene, in sich zurücklaufende Kurve, deren Punkte von einem bestimmten festen Punkte der Ebene denselben Abstand haben. (Man vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus VI.)

40) Jede Verbindungslinie des Kreiszentrums mit einem Punkte der Kreislinie bezeichnet man als einen Halbmesser oder Radius des Kreises. Die Länge aller Radien eines Kreises ist dieselbe, denn sie ist gleich jenem unveränderlichen Abstande vom Mittelpunkte.

---

*) Unter Kreis wird bald die Kreislinie, bald die Kreisfläche verstanden. Der Sprachgebrauch schwankt. Nach Bedürfnis sollen die letzteren Worte gebraucht werden, sonst der Kürze halber das Wort Kreis.

41) Zu jedem Kreisradius gibt es einen anderen von entgegengesetzter Richtung. Jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade schneidet also den Kreis in zwei Punkten. Das zwischen den letzteren liegende Stück einer solchen Geraden heißt der *Durchmesser* des Kreises. Jeder Kreisdurchmesser ist doppelt so lang als der zugehörige Kreisradius. Alle Durchmesser eines Kreises sind also gleich lang. Die Endpunkte jedes Durchmessers heißen *Gegenpunkte* des Kreises.

42) *Je zwei Kreislinien von demselben Radius decken einander* (oder *sind kongruent*). Legt man nämlich die eine so auf die andere, daß ihr Mittelpunkt auf den der anderen fällt, so müssen auch die beiden Kreislinien sich decken. (Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßten ungleiche Radien vorhanden sein.)

Sie decken einander auf unendlich viele Arten, dreht man nämlich die auf die andere gelegte in der Ebene um ihren Mittelpunkt, so wird die Kongruenz nicht gestört. Jeder Radius des einen Kreises kann mit einem beliebigen des anderen zur Deckung gebracht werden.

Daraus folgt, *daß der Kreis ein vollkommen regelmäßiges ebenes Gebilde ist.*

43) *Jeder Durchmesser teilt die Kreislinie in zwei kongruente Teile*, die man als *Halbkreise* bezeichnet. Kongruent sind sie, weil sich der eine so um das Kreiszentrum drehen läßt, daß beide einander decken. Die Deckung kann auch durch Umklappen der einen Hälfte um den sie begrenzenden Durchmesser erfolgen.

44) Jeder Teil einer Kreislinie heißt ein *Kreisbogen*. Die gerade Verbindungslinie seiner Endpunkte heißt *Sehne*. Die verlängerte Sehne heißt *Sekante*. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei verschiedene Kreisbogen, in einen kleineren und einen größeren Kreisbogen. Jeder kann als der zum anderen gehörige *Restbogen* bezeichnet werden. (Fig. 1.)

Fig. 1.

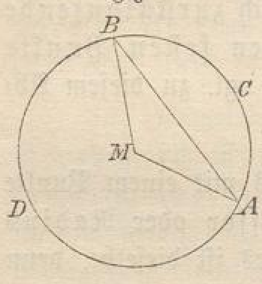


Fig. 2.

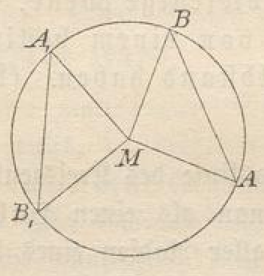
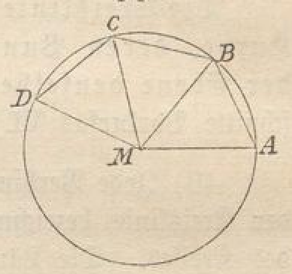


Fig. 3.

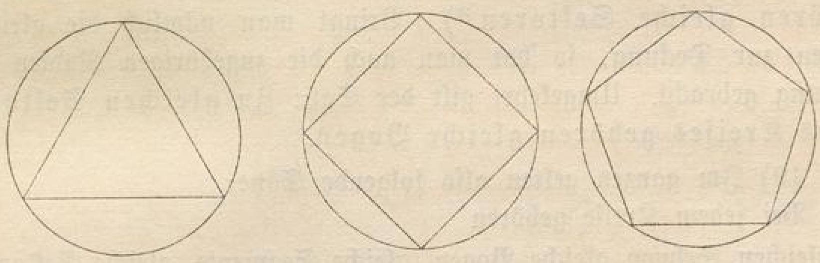


45) Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Bogen.*) Sind nämlich zwei Sehnen eines Kreises gleich, so lassen sie sich durch Drehung der einen um das Kreiszentrum zur Deckung bringen. Dabei decken einander sowohl die beiden kleinen Bogen, als auch die zugehörigen Restbogen. Gewöhnlich spricht man nur von dem kleineren Bogen.

Dann gilt die Erklärung: Gleiche Bogen eines Kreises sind also solche, zu denen gleiche Sehnen gehören. (Fig. 2.)

46) Schließt eine Reihe gleicher Sehnen, deren Anzahl größer als zwei ist, nach einem Umgange, so ist die Kreislinie in eine entsprechende Anzahl gleicher Teile eingeteilt. Von den Sehnen sagt man dann: Sie bilden ein regelmäßiges Vieleck. Verbindet man näm-

Fig. 4.



lich die Ecken eines solchen Gebildes durch Radien mit dem Mittelpunkte, so hat man lauter gleichschenklige Dreiecke, von denen jedes mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann, indem man es um den Mittelpunkt dreht. (Man kann die Sehnen zur Deckung bringen, also auch die zu ihnen gehörigen Radienpaare, denn zwischen einem Endpunkte und dem Mittelpunkte ist nur eine einzige Gerade möglich.)

47) Die von der Kreislinie umschlossene Fläche heißt die Kreisfläche. Sie entsteht z. B. durch Drehung eines Radius um einen seiner Endpunkte. Die Kreisfläche wird durch jede Sehne in zwei Flächen zerlegt, die man Kreisabschnitte oder Segmente nennt. Nur bei dem Durchmesser sind die beiden Segmente kongruent (Halbkreisflächen). Bei anderen Sehnen ist das Segment, in dem das Kreiszentrum liegt, das größere, das andere ist das kleinere. Gewöhnlich versteht man unter dem zu einer Sehne gehörigen Segment das kleinere, während man das größere als das zugehörige Restsegment bezeichnet. (Man kann das kleinere Segment soweit um den Mittelpunkt drehen, daß es ganz innerhalb des größeren liegt.) Dann

*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bogenpaare".

gilt der Satz: Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Segmente.*) Man kann nämlich die Sehnen zur Deckung bringen, mit ihnen auch die Kreisbogen und ihre Mittelpunkte, folglich auch die von Sehne und Bogen umschlossenen Flächen. Umgekehrt gehören zu gleichen Segmenten eines Kreises gleiche Sehnen.

48) Den von zwei Radien begrenzten Teil einer Kreisfläche bezeichnet man als Kreisausschnitt oder Kreissektor. Durch zwei Radien wird die Kreisfläche in zwei Sektoren zerlegt. Nur wenn die beiden Radien einen Durchmesser bilden, sind die beiden Sektoren einander gleich (Halbkreisflächen). Sonst sind sie ungleich. Der kleinere Sektor kann soweit um den Mittelpunkt gedreht werden, daß er ganz innerhalb des größeren liegt. Gewöhnlich meint man bei Angabe eines Sektors den kleineren. Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sektoren.*) Bringt man nämlich die gleichen Bogen zur Deckung, so hat man auch die zugehörigen Radien zur Deckung gebracht. Umgekehrt gilt der Satz: Zu gleichen Sektoren eines Kreises gehören gleiche Bogen.

49) Im ganzen gelten also folgende Sätze:
Bei jedem Kreise gehören

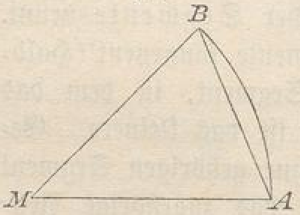
zu gleichen	Sehnen	gleiche Bogen,	gleiche Segmente,	gleiche Sektoren;
„ „	Bogen	„ Sehnen,	„ Segmente,	„ Sektoren;
„ „	Segmenten	„ Sehnen,	„ Bogen,	„ Sektoren;
„ „	Sektoren	„ Sehnen,	„ Bogen,	„ Segmente.

Statt gleich kann man hier überall kongruent sagen.

ϑ) Begriff des Winkels in der Ebene.

50) Gehen von einem festen Punkte der Ebene zwei Strahlen aus, ein in ihr festliegender und ein in ihr um den Punkt drehbarer, so kann man den letzteren zunächst mit dem ersteren zur Deckung bringen und dann in zweierlei Sinne von ihm wegdrehen. Die Drehung kann nämlich im Sinne der Uhrzeigerbewegung und auch im entgegengesetzten Sinne erfolgen.**) Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt des bewegten Strahles einen Kreis, der sich schließt, sobald der Strahl eine volle Umdrehung gemacht hat. Dieses Schließen

Fig. 5.



*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Segmentpaare" oder: „gleiche Sektorenpaare" usw.

**) Vielfach bezeichnet man die der Uhrzeigerbewegung entsprechende erfolgt für alle Teile des Strahles gleichzeitig. Ebenso vollenden alle Punkte des bewegten Strahles gleichzeitig eine halbe Umdrehung, oder eine drittel Umdrehung, oder zwei Drittel einer Umdrehung usw. Jeder Lage entspricht also für alle Punkte des Strahles ein bestimmter Bruchteil bezw. ein bestimmtes Vielfaches einer vollen Umdrehung (z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$ Umdrehung). Gewöhnlich spricht man nur von (echten) Bruchteilen der Umdrehung, da sich beim Überschreiten der Anfangslage der Vorgang noch einmal oder mehrfach wiederholt. Jenen Bruchteil der vollen Umdrehung bezeichnet man auch als die Abweichung des bewegten Strahles vom festen Strahle, oder als den Richtungsunterschied beider Strahlen, oder als den Winkel, den beide Strahlen mit-

Fig. 6.

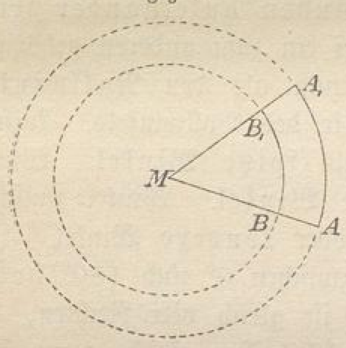
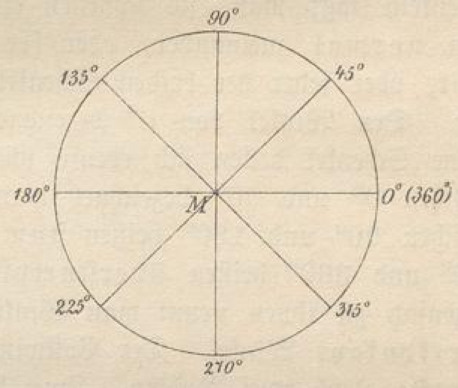


Fig. 7.



einander bilden. Die gezeichneten Teile der beiden Strahlen nennt man die Schenkel des Winkels. Ihre Länge ist vollständig gleichgültig und hat keinen Einfluß auf die Größe der Drehung oder auf die Größe des Winkels. Der Winkel ist lediglich das Maß der (besprochenen) Drehung. Der Drehungspunkt heißt Scheitelpunkt oder kürzer Scheitel des Winkels. (Fig. 6.)

51) Im Vorkursus (Abschnitt VI) ist gezeigt worden, wie man teils durch Konstruktion, teils durch Versuche*) einen Kreis in 2, 3,

Drehung als die negative Drehung, die entgegengesetzte als die positive Drehung. Andere sprechen bezw. von Rechtsdrehung und Linksdrehung.

*) Man kann zwar gewisse Kreisteilungen mit Zirkel und Lineal exakt (andere mit Hilfe gewisser Kurven annäherungsweise) ausführen. Im allgemeinen sind aber die Teilungen in 7, 9, 11, 13, 19, 23, 25 usw. Teile nur auf dem Wege des probeweisen Absteckens mit Hilfe des Zirkels mit einiger Annäherung durchführbar, worüber im Schlußbande zu sprechen ist. Merkwürdig ist, daß auch die Grundlage der Gradeinteilung, der 360. Teil des Kreises, nur annäherungsweise bestimmt werden kann.

4, 5, 6, 7, 8, 9, ... Teile zerlegen kann. Verbindet man die Endpunkte eines solchen Teiles durch Radien mit dem Kreismittelpunkte, so erhält man Winkel von entsprechender Größe, sodaß die Kreisteilung und die Winkelkonstruktion eng zusammenhängen. Winkel, die von zwei Radien eines Kreises gebildet werden, heißen Zentriwinkel. Durch die (angenäherte) Konstruktion des 360-Ecks erhält man zugleich den Winkel, den man als einen Winkelgrad bezeichnet. Die volle Umdrehung gibt einen Winkel von 360^0, er heißt Vollwinkel. Seine Schenkel decken einander (vgl. Fig. 7). Die halbe Umdrehung gibt einen Winkel von 180^0, er heißt gestreckter Winkel. Seine Schenkel haben entgegengesetzte Richtungen und fallen daher in dieselbe gerade Linie. Der vierte Teil der Umdrehung gibt den Winkel von 90^0. Dieser heißt der rechte Winkel oder einfach der Rechte. Von seinen Schenkeln sagt man, sie schnitten einander rechtwinklig, oder sie seien normal zueinander, oder sie ständen aufeinander senkrecht, oder jeder der beiden Schenkel sei ein zum anderen gehöriges Lot. Den Winkel von 0^0 bezeichnet man als den Nullwinkel. Seine Schenkel decken sich ebenso wie die des Vollwinkels. Winkel zwischen 0^0 und 90^0 bezeichnet man als spitze Winkel. Winkel zwischen 90^0 und 180^0 heißen stumpfe Winkel. Winkel zwischen 180^0 und 360^0 heißen überstumpfe oder konvexe Winkel. Im Gegensatz zu ihnen nennt man Winkel zwischen 0^0 und 180^0 hohle oder konkave Winkel. Der Vollwinkel ist gleich vier Rechten, der gestreckte gleich zwei Rechten. Zwei Winkel heißen gleich, wenn ihre Schenkel sich (abgesehen von der Länge) zur Deckung bringen lassen.

52) Ist die Summe zweier Winkel gleich 360^0, so heißt jeder der Restwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich 180^0, so heißt jeder der Supplementwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich 90^0, so heißt jeder der Komplementwinkel des anderen.

53) [Den sechzigsten Teil eines Winkelgrades bezeichnet man als Minute, den sechzigsten Teil der Minute als Sekunde (den sechzigsten Teil der Sekunde als Tertie) usw. (Erste, zweite, dritte Verminderung.) So sagt z. B. $\sphericalangle \alpha = 22^0 23' 35''$, der Winkel α zähle 22 Grad 23 Minuten 35 Sekunden. (Drei Striche würden Tertien bedeuten.) Man kann aber den Winkel auch in Dezimalbruchform schreiben, z. B. $\sphericalangle \beta = 39^0,51$.] Unter $\sphericalangle ABC$ versteht man einen Winkel, dessen Scheitel der Punkt B ist, während A und C die Endpunkte der Schenkel sind. Der Scheitel wird also stets in der Mitte genannt.

54) Durch Verlängerung eines Winkelschenkels über den Scheitel hinaus erhält man den Nebenwinkel des Winkels, der zugleich ein Supplementwinkel des gegebenen Winkels ist. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man zwei einander gleiche Nebenwinkel, außerdem den Scheitelwinkel. Dieser ist dem gegebenen Winkel gleich, denn er ist wie jener der Supplementwinkel für jeden der beiden Nebenwinkel.

55) Aus Gründen der Regelmäßigkeit des Kreises folgt: Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren. Bringt man nämlich zwei gleiche Zentriwinkel zur Deckung, so fallen die Endpunkte ihrer Radien paarweise zusammen, ebenso die Endpunkte der zugehörigen Sehnen, der zugehörigen Bogen. Danach läßt sich die unter 49) gegebene Tabelle erweitern.

56) Den halben Umfang des Kreises vom Radius 1 bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π. Der Umfang ist also $u = 2\pi$. Wird der Kreis z. B. im 7-fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang $u = 2 \cdot 7 \cdot \pi$; wird er im r-fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang $u = 2r\pi$. Zunächst durch Messung (durch Umlegen eines möglichst dünnen Fadens um eine Kreisscheibe) findet man, daß π ungefähr gleich $\frac{22}{7}$ oder ungefähr 3,14 ist.*) Jedem Bogen des Kreises vom Radius 1, der ein bestimmter Bruchteil des Kreisumfangs ist, entspricht also ein Winkel (Zentriwinkel), der denselben Bruchteil von 360^0 gibt. So entsprechen einander z. B. $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{360^0}{6} = 60^0$; $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{360^0}{5} = 72^0$ usw. Man sagt daher: Ein Winkel β^0 verhält sich zum Winkel 360^0 ebenso, wie der zugehörige Bogen $\widehat{\beta}$ jenes Kreises zum Bogen 2π; oder: Ein Winkel β^0 verhält sich zum Winkel 180^0 ebenso, wie der zugehörige Bogen $\widehat{\beta}$ zum Bogen π. Diesen Satz stellt man in folgender Schreibweise (als folgende Proportion) dar:

$$\beta^0 : 180^0 = \widehat{\beta} : \pi.$$

*) Ein genauerer Wert ist $\pi = 3{,}14159265\ldots$ Archimedes (geboren 287 v. Chr. zu Syrakus) nahm $\frac{22}{7}$ an, was $3{,}142857\ldots$ gibt, also etwas zu groß ist. Ein weit genauerer Näherungswert ist $\frac{355}{113}$. Dieser gibt $3{,}1415929\ldots$, was schon auf 7 Stellen stimmt, für die gewöhnlichen Berechnungen also vollständig ausreicht. Die Berechnung von π wird später gelehrt.

Zur Umrechnung von Winkeln in Bogen und von Bogen in Winkel braucht man also die Formeln*)

$$\beta^0 = \frac{\widehat{\beta}}{\pi} 180^0, \quad \widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}.$$

So gehört z. B. zum Bogen $\widehat{\beta} = 1$ der Winkel $\beta^0 = \frac{1}{\pi} 180^0 = 57^0{,}295 = 57^0 17',70 = 57^0 17' 42''$.**) Derselbe Winkel gehört zum Bogen $\widehat{b} = r \cdot \widehat{\beta} = r \cdot 1$ am Kreise mit Radius r.

(Den Kreisumfang berechnet man aus dem Radius nach der obigen Formel $u = 2r\pi$, den Kreisradius aus dem Umfange nach der Formel $r = \frac{u}{2\pi}$.***)

Zum Winkel 1^0 gehört (am Kreise mit Radius 1) der Bogen $\widehat{\beta} = \pi \frac{1^0}{180^0} = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453$, am Kreise mit Radius r dagegen der r-fache Bogen.

(Bezeichnet man den am Kreise mit Radius r gemessenen Bogen mit $\widehat{b}_r$, den am Radius 1 gemessenen wieder mit $\widehat{\beta}$, so hat man die Formeln $\widehat{b}_r = r\widehat{\beta}$, $\beta = \frac{\widehat{b}_r}{r}$. Die obigen Umrechnungsformeln für den Kreis mit Radius r werden dann

$$\beta^0 = \frac{\widehat{b}_r}{r\pi} 180^0, \quad \widehat{b}_r = r\pi \frac{\beta^0}{180^0},$$

die mit den obigen übereinstimmen, sobald man den Wert $r\widehat{\beta}$ für $\widehat{b}_r$ einsetzt.)

---

*) Die Gradbezeichnungen heben sich in der Formel $\widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}$ auf, man kann sie also in der Form $\widehat{b} = \pi \frac{\beta}{180}$ schreiben, nur muß dann gesagt werden, daß der Winkel in Graden ausgedrückt ist, z. B. $\beta = 20^0{,}3$, nicht etwa $\beta = 20^0 18'$ oder $1218'$.

**) Man vergesse nie, daß der Bogen $\widehat{b}$ am Kreise vom Radius 1 gemessen wird. Bei ungenauen Werten von π findet man nicht so genaue Resultate. Die Bruchteile der Sekunden sind hier vernachlässigt.

***) Nimmt man also den Erdumfang als 5400 geographische Meilen an, so hat der Erdradius eine Länge von 859,43 geographischen Meilen. Nimmt man den Erdumfang zu 40 000 000 m an, so hat der Erdradius eine Länge von 6 366 200 m. Dabei ist der genauere Wert von π zugrunde gelegt und eine Genauigkeit auf fünf Stellen erstrebt. — Der Äquatorgrad hat für die Erde eine Länge von $\frac{5400}{360} = \frac{2700}{180} = 15$ geogr. Meilen. Für jede Reise längs des Äquators kann man also die Länge aus den Graden und die Grade aus der Länge berechnen.

(In vielen Lehrbüchern, besonders in den physikalischen, wird von Winkeln π oder $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ usw. gesprochen. Man meint damit Winkel von 180^0, bezw. 90^0, 60^0, 45^0 usw., denn dabei ist die Größe des am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogens angegeben. Hier soll bei einem Winkel α stets der Winkel in Graden und seinen Bruchteilen gemeint sein, während $\widehat{\alpha}$ den am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogen bedeuten soll. Bogenlängen an Kreisen von beliebigem Radius sollen dagegen mit lateinischen Buchstaben nebst Bogen, z. B. mit $\widehat{a}$ bezeichnet werden, gegebenenfalls mit $\widehat{a}_r$, wenn der Radius r bekannt ist. Es handelt sich bei diesen Unterscheidungen nur um die Vermeidung von Mißverständnissen.)

b) **Die einfachsten planimetrischen Konstruktionen.**

α) Die Zeichengeräte.

57) Die unentbehrlichsten Zeichengeräte sind das Lineal und der Zirkel. Das erstere dient zum Zeichnen gerader Linien mittels des Bleistiftes oder der mit Tusche gefüllten Handreißfeder*). Der Handzirkel dient zum Messen der Längen und zur Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnungen, der Einsatzzirkel mit den Einsatzteilen zum Zeichnen der Kreise und Kreisbogen mit Bleistift oder Reißfeder.

(Daß es auch krummlinige oder Kurvenlineale und Schablonen zum Zeichnen bestimmter Kurven gibt, sei beiläufig bemerkt).

58) Sollen Geraden von gegebener Länge gezeichnet werden, so ist die Länge unmittelbar mit Hilfe eines Maßstabes, oder mittelbar mit Hilfe des Zirkels zu bestimmen, dem man an einem Maßstabe die geforderte Öffnung gibt. Der Maßstab ist entweder nur auf dem Blatte gezeichnet, oder er ist ein Lineal mit metrischer Einteilung, welches also Meter, Dezimeter, Zentimeter, Millimeter angibt. (Vorkursus § 14 bis 16.)

59) Bei technischen Zeichnungen stellt man die Gebilde meist nicht in der wirklichen Größe, sondern in „verkleinertem Maßstabe" dar. Dann wird auf dem Rande des Zeichenblattes ein „verjüngter"

*) Die Vorsilbe Reiß hängt mit dem Worte Riß zusammen, denn man spricht vom Grundriß oder Aufriß eines Gebäudes oder einer Maschine oder eines Apparates oder irgend eines räumlichen Gebildes. Solche Risse werden auf dem Reißbrett gezeichnet. Die Zeicheninstrumente gehören zum Reißzeug.

oder „verkleinerter Maßstab" gezeichnet, der angibt, welche Länge z. B. 1 m bedeuten soll. Auf Landkarten für nicht allzugroße Gebiete wird durch den Maßstab angegeben, welche Länge ein Kilometer oder eine geographische Meile bedeuten soll. Man spricht dann vom Maßstabe $\frac{1}{10}$ oder 1 : 10; vom Maßstabe $\frac{1}{10000}$ oder 1 : 10 000 usw. Kleinere Gebilde werden in den naturwissenschaftlichen Lehrbüchern oft in vergrößertem Maßstabe dargestellt, z. B. im zehnfachen Maßstabe ($\frac{10}{1}$ oder 10 : 1) usw.

60) Zur Zeichnung von Kreisen erhält der Einsatzzirkel bestimmte Einsatzteile, für das Zeichnen mit Bleistift den Blei- oder Stifteinsatz, für das Zeichnen mit Tusche oder einer sonstigen gefärbten Flüssigkeit den Reißfeder- oder Federeinsatz.

61) Soll die Zeichnung genau werden, so ist ein ebenes, genau rechtwinkliges Reißbrett mit aufgespanntem Zeichenbogen zu benutzen, auf dem mit Hilfe der Reißschiene senkrechte und wagerechte Linien bequem zu zeichnen sind. Zu den senkrechten Linien benutzt man aber meist das längs der wagerechten Reißschiene bewegliche Winkeldreieck oder den Winkelhaken (Rechtwinkellineal), welches außerdem das bequeme Zeichnen von Linien gestattet, die 45° bezw. 30° und 60° Neigung haben. Lineal und Winkelhaken oder die beiden Arten von Winkelhaken dienen auch zum bequemen Zeichnen von Loten und Parallelen.

62) Schwierig ist das Zeichnen sehr kleiner Kreise. Für diese hat man sogenannte Nullzirkel (oder Nullenzirkel) mit Mikrometerschraube zum Regulieren der Zirkelöffnung und mit feinem Nadeleinsatz zur schärfsten Einhaltung des Kreismittelpunktes konstruiert. Der Einsatz wird durch eine elastische Feder nach dem Zirkel hingedrängt, durch die Schraube von ihm weggedrängt. Federzirkel mit Schraube benutzt man auch zum genauen Messen kleiner Abstände.

63) Zur Zeichnung bezw. Messung von beliebigen Winkeln dient der Transporteur des Reißzeugs, bei dem der Halbkreis in 180 gleiche Teile eingeteilt ist, die also den Winkelgraden entsprechen.*)

64) Das Bestimmen der Längen mit Hilfe des Maßstabs und das der Winkel mit Hilfe des Transporteurs fällt in der Regel ungenau aus. Zur Verschärfung der Ablesung benutzt man den sog. Nonius, womöglich mit mikroskopischer Vorrichtung zum Ablesen.

*) Sehr brauchbar zu Längen- und Winkelmessungen ist Simons durchsichtige Meßtafel. D. R. G. M. 80 166.

Darüber ist in der Physik zu sprechen, wohin die Vorrichtungen der Feldmeß- und der astronomischen Instrumente gehören.

65) Selbst beim genauesten Zeichnen mathematischer Figuren stellen sich in der Regel Ungenauigkeiten ein. Diese beruhen teils in den Ungenauigkeiten der Lineale, Winkelhaken und der sonstigen Zeichengeräte, teils im ungenauen Anlegen des Lineals oder Einsetzen der Zirkelspitze, im ungenauen Einstellen der Zirkelöffnung, teils im ungenauen Beurteilen des Schnittpunktes zweier Geraden oder zweier Kreisbogen. Letzteres ist namentlich dann der Fall, wenn die Geraden oder Kreisbogen einander unter sehr kleinen Winkeln schneiden. Daher ist danach zu streben, daß die betreffenden Bestimmungslinien einander möglichst rechtwinklig schneiden. Auch die Breite der gezeichneten Linien gibt zu Ungenauigkeiten Anlaß, ebenso die Ausdehnung der veranschaulichten Punkte.

Im allgemeinen ist das Zirkelzeichnen*) genauer als das Linealzeichnen. Erstrebt man möglichste Genauigkeit, so ist es gut, während der Arbeit Kontrollkonstruktionen (oder Messungen) vorzunehmen und bei der Entdeckung von Abweichungen den Grundfehler aufzusuchen oder wenigstens für möglichste Ausgleichung der Ungenauigkeiten zu sorgen.**)

Man pflegt die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen als exakte zu bezeichnen. Sie sind aber nur in der Vorstellung genau ausführbar, weil, wie schon gesagt, in der Wirklichkeit die gezeichneten Linien eine gewisse Breite haben müssen, um sichtbar zu werden, und weil ebenso die Punkte der Zeichnung durchaus nicht mathematische, ausdehnungslose Gebilde sind. Die praktische Konstruktion ist nur eine rohe Veranschaulichung der mathematischen Konstruktion. Diese setzt gewisse in der Wirklichkeit unerfüllbare **Forderungen** oder **Postulate** voraus, die in folgendem besprochen werden.

β) Drei Forderungen (Postulate) der Konstruktionslehre.

66) **Erste Forderung: Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden.**

---

*) Deshalb hat der italienische Mathematiker **Mascheroni** (sprich Maskeróni) den erfolgreichen Versuch gemacht, alle Grundkonstruktionen nur mit Hilfe des Zirkels auszuführen. Andere machten den Versuch, alle Konstruktionen mit Hilfe des **Lineals** allein auszuführen, was aber, wie **Steiner** fand, nur möglich war, sobald man einen festen Kreis als gegeben annahm.

) Die sogenannte **Geometrographie versucht die Konstruktionen so kurz als möglich auszuführen und mit der Verminderung der Zahl der Ope-

Die Aufgabe ist nur mit Hilfe eines sehr genauen und genau an die Punkte angelegten Lineals und mit scharf gespitztem Bleistift bezw. scharfer Reißfeder mit einiger Genauigkeit auf dem Reißbrett lösbar. Dabei sind folgende Bedingungen zu beachten: 1) Beide Punkte müssen im Endlichen (z. B. auf dem Reißbrett) liegen; 2) die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte darf nicht unendlich klein sein, denn dabei hat man kein hinreichendes Urteil über die dem Lineal zu gebende Richtung. —

Die Gerade kann mit Hilfe des Lineals über die beiden Punkte hinaus verlängert werden.*) Das zwischen den gegebenen Punkten liegende Stück gibt zugleich den gegenseitigen Abstand der Punkte an. Liegt zwischen den Punkten ein Hindernis, soll z. B. auf dem Fußboden einer Werkstätte eine Gerade über eine im Wege stehende Maschine hinaus gezogen werden, so sind besondere Konstruktionen nötig.

67) Zweite Forderung**): Den Schnittpunkt zweier Geraden zu konstruieren.

Die Verlängerung der Geraden muß mit möglichster Genauigkeit erfolgen. Sonst ist über die Genauigkeit der Lösungen dasselbe zu sagen wie vorher. Bedingungen: a) Die beiden Geraden müssen im Endlichen liegen; b) sie dürfen nicht unendlich nahe aneinander liegen, denn dann wird der Schnittpunkt unbestimmt; c) sie dürfen nicht parallel sein, denn dann fällt der Schnittpunkt in unendliche Entfernung. Die Parallelen geben dann nur die Richtung an, in der er liegt. — Der Schnittpunkt wird um so genauer bestimmt, je näher der Schnittwinkel an 90^0 liegt. Von etwaigen Hindernissen gilt dasselbe wie vorher.

68) Dritte Forderung: Um einen gegebenen Punkt einen Kreis von gegebenem Radius zu legen.

---

rationen zugleich die Anzahl der Fehlermöglichkeiten zu verringern. In der Praxis sind aber Kontrollkonstruktionen und Probemessungen nicht zu entbehren.

*) Die Verlängerung wird bisweilen als ein zweites Postulat genannt.

**) Diese zweite Forderung wird in der Regel nicht mit genannt, sie ist aber ebenso wesentlich wie die erste. Das eine Mal handelt es sich um die Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte, das andere Mal um die Bestimmung eines Punktes durch zwei Geraden. Die zweite Forderung ist die reziproke der anderen. (Vertauschung der Worte Linie und Punkt.) Es müssen auch Konstruktionen dafür gelehrt werden, eine Gerade über ein Hindernis hinaus zu verlängern, oder den Schnittpunkt zweier Geraden, der jenseits eines Hindernisses liegt, zu bestimmen.

Der Zirkel ist genau in den Punkt einzusetzen, nachdem die Zirkelöffnung genau gleich der Länge des Radius gemacht ist. Bedingungen: 1) Der Punkt muß im Endlichen liegen. 2) Der Radius darf weder unendlich groß noch unendlich klein sein. — Einen Sonderfall bildet die Aufgabe, um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der durch einen gegebenen Punkt geht.

69) Man könnte noch Nebenforderungen aufstellen, die sich auf die Benutzung des metrisch eingeteilten Maßstabes, des Transporteurs, des Winkeldreiecks beziehen.

γ) Die grundlegenden Konstruktionen.

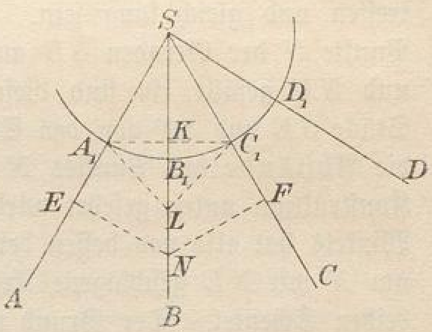
70) Erste Grundkonstruktion: Eine gegebene Gerade (nach der einen ihrer Richtungen) um sich selbst zu verlängern, ihre Länge zu verdreifachen, zu vervierfachen usw.

Der Schüler beschreibe die mit Lineal und Zirkel auszuführende Konstruktion selbst. (Die Teilpunkte sollen durch kleine Kreisbogen markiert werden.)

71) Zweite Grundkonstruktion*): Einen gegebenen Winkel (in einem der beiden Drehungssinne) zu verdoppeln, zu verdreifachen, zu vervierfachen usw.

Auflösung. In Fig. 8 sei ASB der zu vervielfachende Winkel. Man lege um den Scheitel S einen Kreis von beliebigem Radius, der die Schenkel in A_1 und B_1 schneidet, dann schlage man mit der Zirkelöffnung B_1A_1 um B_1 einen Bogen, der den Kreis in C_1 schneidet, dann um C_1 mit derselben Öffnung einen Bogen, der ihn in D_1 schneidet usw. Dann ziehe man die Geraden SC_1, SD_1 usw. Dann ist $\sphericalangle A_1SC_1$ der doppelte Winkel, $\sphericalangle A_1SD_1$ der dreifache usw.

Fig. 8.



Die Richtigkeit der Konstruktion beruht darauf, daß zu gleichen Sehnen eines Kreises gleiche Zentriwinkel gehören.

Bemerkungen. a) Klappt man den Winkel BSC um die Gerade BS, so deckt er sich mit dem Winkel BSA. Man nennt BS die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Winkels ASC.

*) Diese Konstruktion kann als eine reziproke der ersten betrachtet werden.

Bei diesem Umklappen deckt sich SC_1 mit SA_1, sodaß C_1 auf A_1 fällt. Jeder Punkt von SB bleibt dabei in seiner Lage. Zieht man also die Gerade A_1C_1, so deckt sich beim Umklappen ihr Teil KC_1 mit KA_1, sodaß beide gleich lang sind. Ferner deckt sich $\sphericalangle SKC_1$ mit SKA_1, da aber $\sphericalangle A_1KC_1$ ein gestreckter Winkel ist, so muß $\sphericalangle SKA_1$ und ebenso $\sphericalangle SKC_1$ ein Rechter sein. Ferner deckt sich $\sphericalangle SC_1K$ mit SA_1K, beide sind also ebenfalls gleich. (Man nennt ein Dreieck mit gleichen „Schenkeln" A_1S und C_1S ein gleichschenkliges Dreieck. A_1C_1 heißt seine Grundlinie oder Basis. Aus der Figur lassen sich also Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks ablesen, die der Schüler schon jetzt selbständig auszusprechen versuche; z. B. die Winkel an der „Grundlinie" des gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich. Man bezeichnet diese Winkel als Basiswinkel. Sind umgekehrt zwei Dreieckswinkel einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig, denn es hat eine Symmetrieachse.)

b) Verbindet man einen beliebigen Punkt L von SB mit A_1 und C_1, so decken einander bei jenem Umklappen auch die Geraden A_1L und C_1L. Jeder Punkt der Geraden SB ist also von A_1 und C_1 gleich weit entfernt. Man nennt SB, weil es das in der Mitte K von A_1C_1 auf dieser Linie errichtete Lot ist, die Mittelsenkrechte oder das Mittellot von A_1C_1. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Geraden ist also von deren Endpunkten gleich weit entfernt.

c) Macht man ferner $SE = SF$ und denkt man sich in E und F auf diesen Linien Lote errichtet, so decken sich bei jenem Umklappen diese Lote, sie müssen sich also in einem Punkte N der Geraden SB treffen und gleich lang sein. Denkt man sich umgekehrt von einem Punkte N der Geraden SB auf die Geraden SA und SC Lote NE und NF gefällt, so sind diese gleich lang und sie schneiden gleiche Stücke SE und SF von den Schenkeln ab. Man nennt NE und NF die Abstände des Punktes N von den Geraden AS und CS, deren Konstruktion unten gelehrt wird. Jeder Punkt der Halbierenden eines Winkels hat also von dessen beiden Schenkeln denselben Abstand. (Der um N mit NE geschlagene Kreis geht auch durch F und berührt die beiden Schenkel. Der Grund wird unten auseinandergesetzt.)

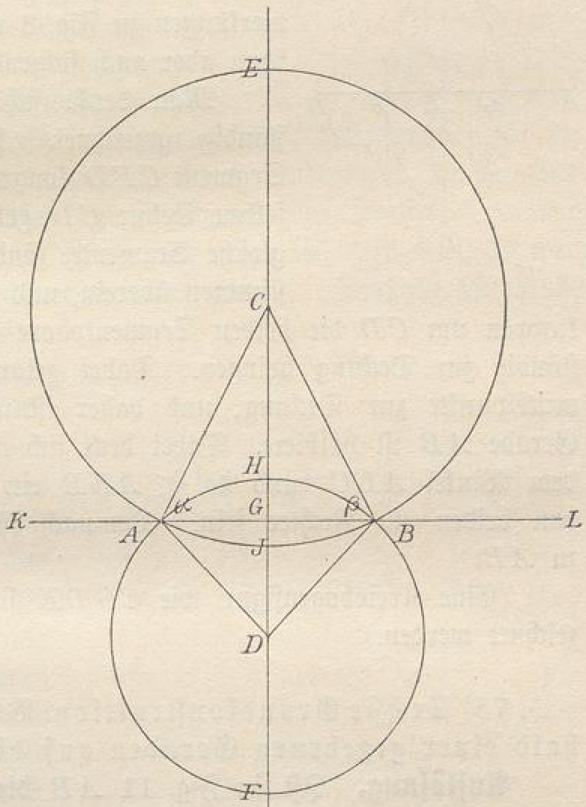
Die Symmetrielinie SB eines Winkels ASC oder seiner Halbierungslinie hat also sehr bemerkenswerte Eigenschaften, die sofort Benutzung finden sollen.

72) Dritte Grundkonstruktion: Einen Winkel zu halbieren.

Auflösung. Ist in Fig. 8 $\sphericalangle ASC$ der zu halbierende Winkel, so lege man um den Scheitel S einen Kreisbogen von beliebigem Radius, der die Schenkel in A_1 und C_1 schneidet. Darauf schlage man um A_1 und C_1 mit derselben (oder einer anderen) Zirkelöffnung Kreisbogen, die einander in einem Punkte L schneiden. Verbindet man L mit S, so hat man den Winkel halbiert.

Die Richtigkeit folgt aus den obigen Bemerkungen. (Beiläufig ergibt sich folgendes: Stehen über derselben Grundlinie zwei verschiedene, gleichschenklige Dreiecke, so ist die Verbindungslinie ihrer Spitzen das Mittellot der Grundlinie.)

Fig. 9.



Ist der gegebene Winkel ein gestreckter, so erhält man durch diese Konstruktion einen rechten Winkel.

Dadurch ist also folgende Aufgabe gelöst:

73) **Vierte Grundkonstruktion:** Auf einer Geraden in einem gegebenen Punkte G ein Lot zu errichten.

Auflösung. Man schneide von G aus auf der Geraden nach beiden Richtungen gleiche Stücke ab. Um die Schnittpunkte schlage man mit einer größeren Zirkelöffnung Kreisbogen, die einander auf beiden Seiten der Geraden schneiden. Verbindet man die neuen Schnittpunkte durch eine Gerade, so hat man das gesuchte Lot errichtet. (Die Konstruktion ist in Fig. 9 enthalten, wenn man sich $AC = AD$ denkt.)

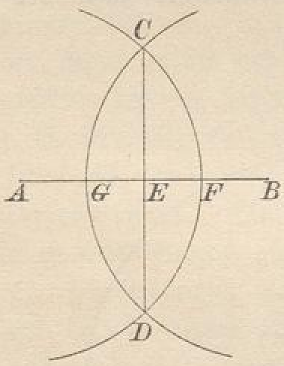
Eines neuen Beweises bedarf es nicht. (Eine zweite Lösung soll später gegeben werden. Welche Folgerungen ergeben sich für das gleichschenklige Dreieck?)

Daraus ergibt sich noch die Lösung der folgenden Aufgabe.

74) Fünfte Grundkonstruktion: Eine gegebene Gerade zu halbieren (und zugleich ihr Mittellot zu konstruieren).

Auflösung. Ist AB in Fig. 10 die gegebene Gerade, so schlage man um A und B mit derselben (hinreichend großen) Zirkelöffnung Kreise, die einander auf beiden Seiten der Geraden in Punkten C und D schneiden. Verbindet man die Punkte C und D durch eine Gerade, so hat man die Mittelsenkrechte gezeichnet und durch ihren Schnittpunkt E mit AB zugleich den Halbierungspunkt gefunden.

Fig. 10.



Die Richtigkeit ergibt sich aus den Bemerkungen zu Fig. 8 und zu 72) und 73). Sie kann aber auch folgendermaßen bewiesen werden:

Man denke sich die beiden Kreise vollständig gezeichnet. Dann ist nicht nur das Segment CFD kongruent CGD, denn zu derselben Sehne CD gehören bei gleichen Kreisen gleiche Segmente, sondern auch die Restsegmente stimmen überein, und daher lassen sich durch Umklappen um CD die beiden Segmentpaare und damit die Kreise vollständig zur Deckung bringen. Dabei gelangen aber auch die Kreismittelpunkte zur Deckung, und daher ist EB gleich EA, d. h. die Gerade AB ist halbiert. Dabei deckt sich auch der Winkel BEC mit dem Winkel AEC, und da $\sphericalangle\, AEB$ ein gestreckter ist, muß jeder von beiden ein Rechter sein. Demnach ist CD die Mittelsenkrechte zu AB.

(Eine Kreisbogenfigur wie $CGDF$ soll als Doppelsegment bezeichnet werden.)

75) Sechste Grundkonstruktion: Von einem Punkte außerhalb einer gegebenen Geraden auf diese ein Lot zu fällen.

Auflösung. Ist in Fig. 11 AB die gegebene Gerade, P der gegebene Punkt, so schlage man mit einer hinreichend großen Zirkelöffnung um P einen Kreis, der AB in zwei Punkten A_1 und B_1 schneidet. Um A_1 und B_1 schlage man mit derselben (oder einer anderen) Zirkelöffnung Kreise, die einander in einem Punkte Q auf der anderen Seite der Geraden schneiden. Verbindet man P mit Q, so hat man auch das gesuchte Lot PC.

Die Richtigkeit ergibt sich daraus, daß PQ die Mittelsenkrechte von $A_1 B_1$ ist.

Bemerkung. Legt man um P einen Kreis mit dem Radius PC und dann einen Kreis mit kleinerem und einen Kreis mit größerem

Radius, so liegt der größere Kreis ganz außerhalb des Kreises mit Radius PC und schneidet die Gerade in zwei Punkten, die so rechts und links von C liegen, daß die Schnittpunkte gleich weit von C entfernt sind. (PQ ist Symmetrielinie.) Der kleinere Kreis dagegen liegt ganz innerhalb des mit PC geschlagenen Kreises. Der letztere trennt also die um P geschlagenen Kreise welche die Gerade AB schneiden, von den Kreisen, die AB überhaupt nicht treffen; er ist der einzige um P geschlagene Kreis, der AB nur in einem Punkte trifft, oder wie man sagt, berührt. AB liegt sonst ganz außerhalb dieses Kreises und heißt seine Tangente (Berührende) für den Punkt C. Errichtet man also auf einem Radius in dessen Endpunkte ein Lot, so ist dieses eine Tangente des Kreises. Zugleich sieht man, daß PC die kürzeste Gerade ist, die von P nach der Geraden AB gezogen werden kann. Deshalb ist es berechtigt, PC als den Abstand des Punktes P von der Geraden zu bezeichnen.

Fig. 11.

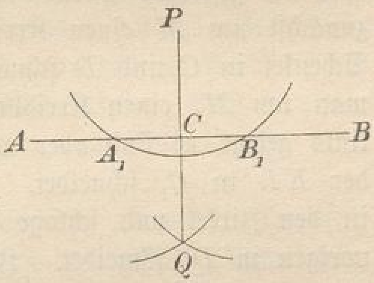
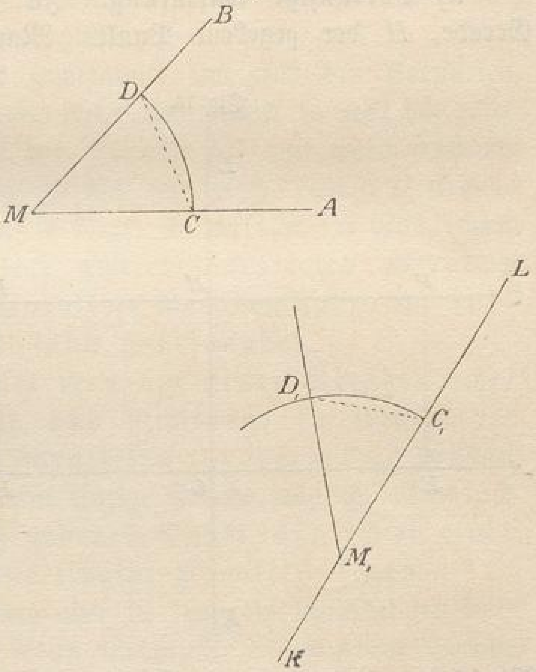


Fig. 12.



An Fig. 11 erkennt man, daß die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit der Sehnenmitte den Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne gibt. Bei der Deckung gleicher Segmente oder Bogen oder Sektoren eines Kreises decken sich auch die zugehörigen Sehnen und die Sehnenmitten. Daher decken einander auch die Abstände der Sehnen vom Kreismittelpunkte. Den unter 48) genannten Sätzen kann also noch folgender beigefügt werden: Bei jedem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Mittelpunktsabstände, zu gleichen Abständen vom Mittelpunkte gehören gleiche Sehnen.

76) Siebente Grundkonstruktion. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte (nach einer der vier vorhandenen Möglichkeiten) anzutragen.

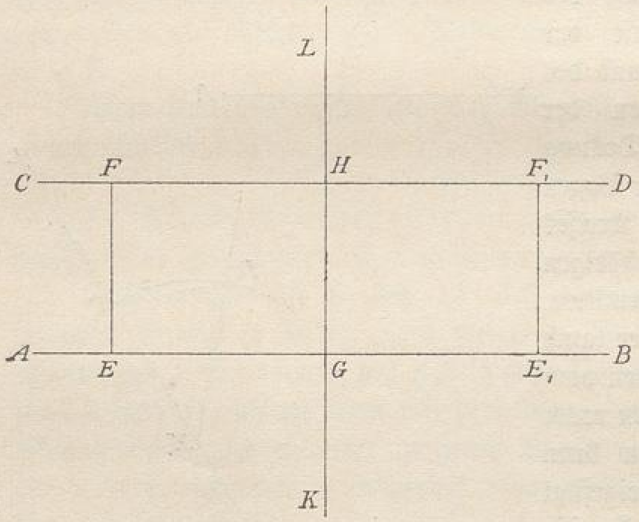
Auflösung. Ist in Fig. 12 AMB der gegebene Winkel, ist KL die gegebene Gerade und M_1 der gegebene Punkt, so schlage man zunächst um M einen Kreisbogen von beliebigem Radius, der die Schenkel in C und D schneidet. Mit derselben Zirkelöffnung schlage man um M_1 einen Kreisbogen (in der Figur ist er nach oben und links gelegt, es sind aber noch drei andere Möglichkeiten vorhanden), der KL in C_1 schneidet. Dann nehme man die Entfernung CD in den Zirkel und schlage damit einen Kreisbogen um C_1, der den vorigen in D_1 schneidet. Zieht man M_1D_1, so ist $C_1M_1D_1$ der angetragene Winkel.

Die Richtigkeit der Konstruktion folgt daraus, daß zu gleichen Sehnen CD und C_1D_1 gleich großer Kreise gleiche Zentriwinkel gehören.

77) Achte Grundkonstruktion. Zu einer gegebenen Geraden durch einen (außerhalb dieser) gegebenen Punkt eine Parallele zu legen.

α) **Vorläufige Auflösung.** In Fig. 13 sei AB die gegebene Gerade, H der gegebene Punkt. Man fälle von H auf AB ein Lot HG und errichte auf diesem in H ein Lot CHD, dann ist CD die gesuchte Parallele.

Fig. 13.



Beweis. Man denke sich AB und CD bis ins Unendliche verlängert. Denkt man sich dann die linke Hälfte der Figur um BG geklappt, so kann man sie mit der rechten Hälfte zur Deckung bringen, denn die Winkel bei H und bei G sind sämtlich rechte Winkel. Angenommen nun, auf der linken Seite hätten HC und GA einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt P, so müßte sich dieser mit einem symmetrisch gelegenen Schnittpunkte P_1 decken, in dem sich HD

und GB schneiden müßten. Dann aber hätte man zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten P und P_1 zwei getrennte gerade Verbindungslinien. Dies ist aber unmöglich. Daher ist auch ein endlicher Schnittpunkt P auf der linken Seite unmöglich und ebenso aus Gründen der Kongruenz ein endlicher Schnittpunkt P_1 auf der rechten Seite. Demnach sind die Geraden AB und CD Linien, die, soweit man sie auch verlängert, keinen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Solche Linien heißen aber parallele, sobald sie in derselben Ebene liegen, und dies ist hier der Fall. (Ebene der Zeichnung.)

Bemerkungen. a) Man hat damit den Satz gefunden: In der Ebene sind Lote auf derselben Geraden parallel. Umgekehrt folgt: Zwei Parallelen haben unendlich viele gemeinschaftliche Lote.

b) Bei dem obigen Umklappen decken sich zwei Punkte E und E_1, sobald $GE = GE_1$ ist. Fällt man von E und E_1 aus Lote EF und E_1F_1 auf CD, so sind beide gemeinschaftliche Lote der Parallelen AB und CD. Beim Umklappen um GH decken sich mit den Punkten E und E_1 zugleich die Lote EF und E_1F_1, weil die rechten Winkel GEF und $G_1E_1F_1$ aufeinander fallen. Folglich sind die Abstände EF und E_1F_1 einander gleich.

Denkt man sich aber das gemeinsame Lot GH der Parallelen an anderer Stelle gezeichnet, z. B. mehr nach rechts, so deckt sich beim Umklappen um das neue GH der Abstand EF mit einem anderen Lote E_2F_2, welches wiederum gleich EF sein muß. Da GH unendlich viele Lagen annehmen kann, so folgt: Sämtliche im Endlichen liegenden gemeinsamen Lote zweier parallelen Geraden sind einander gleich; oder: Parallele Geraden haben im Endlichen überall denselben Abstand voneinander.

c) Ferner folgt: Errichtet man auf einer Geraden zwei Lote von derselben Länge und Richtung, so liegen die freien Endpunkte in einer Parallelen zur Geraden. Zwischen diesen Endpunkten ist aber nur eine einzige Gerade möglich. Demnach gilt der Satz: Durch einen gegebenen Punkt läßt sich zu einer gegebenen Geraden nur eine einzige Parallele legen.

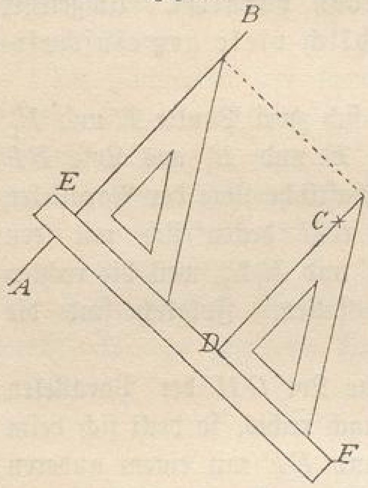
Ist das zweite Lot zu kurz oder zu lang, so schneidet die verlängerte Verbindungslinie der freien Endpunkte die gegebene Gerade in einem endlichen Punkte, das eine Mal in der Richtung nach dem zweiten Lote hin, das andere Mal in entgegengesetzter Richtung.

d) Das Viereck EFF_1E_1 bezeichnet man als ein Rechteck, weil es vier rechte Winkel hat. KL ist die eine Mittellinie oder

Symmetrieachse des Rechtecks. Wo liegt die zweite? Zieht man die Gerade EF_1, so zerlegt man das Rechteck in zwei kongruente Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke muß die Winkelsumme gleich zwei Rechten sein, weil die des Rechtecks gleich vier Rechten ist. Dabei ist $\sphericalangle E_1F_1F = \sphericalangle F_1EE_1$. Was folgt daraus für schräge Linien an Parallelen? EF_1 heißt eine Diagonale des Rechtecks, eine zweite ist E_1F. Der Schüler versuche schon jetzt selbständig die Eigenschaften des Rechtecks und seiner Mittellinien und Diagonalen abzuleiten.

e) Fig. 14 zeigt, wie man mit Hilfe des Lineals und des Winkelhakens zu AB durch den Punkt C eine Parallele zieht.

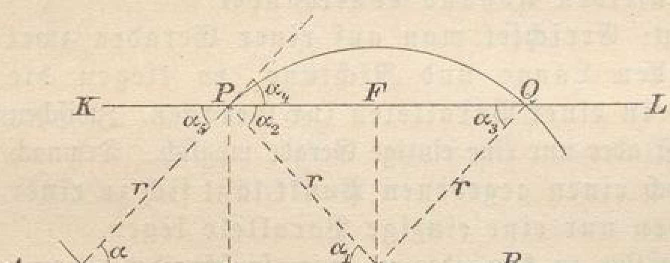
Fig. 14.



Man legt den Winkelhaken mit dem einen Schenkel genau an die Gerade AB an, an den anderen Schenkel wird das Lineal EF angelegt und fest auf das Reißbrett gedrückt. Dann verschiebt man den Winkelhaken längs des Lineals, bis der Punkt C in der gezeichneten Weise sichtbar wird. Man hält den Winkelhaken in der richtigen Lage fest und zeichnet CD, was die gesuchte Parallele gibt. — (Auch mit anders angelegtem Winkelhaken kann man die Parallele ziehen, was bisweilen bequemer ist.)

β) **Kürzere Auflösung.** Man schlage um P einen Kreisbogen mit beliebigem Radius r, der AB in C und D schneidet, schlage um D einen Kreisbogen mit demselben Radius (der also durch P geht), nehme CD in den Zirkel und schlage damit, wie es Fig. 15 zeigt, einen Kreisbogen um P, der den Schnittpunkt Q gibt. Zieht man dann PQ, so ist dies die gesuchte Parallele.

Fig. 15.



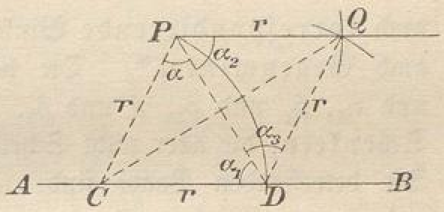
Beweis. Zu gleichen Sehnen CD und PQ gleicher Kreise gehören kongruente Sektoren, also lassen sich die Sektoren PCD und DQP (und damit die gleichschenkligen Dreiecke PCD und DQP) zur Deckung bringen

Dabei decken einander auch die Mittelsenkrechten von CD und PQ, sodaß der Abstand PE auf den Abstand DF fällt. Da demnach die Lote EP und DF gleich lang sind, ist PF und damit PQ parallel zu AB.

Bemerkungen. In Fig. 15 ist (nach 71 a) $\sphericalangle\,\alpha = \sphericalangle\,\alpha_1$, ebenso $\sphericalangle\,\alpha_2 = \sphericalangle\,\alpha_3$, also der Deckung wegen $\sphericalangle\,\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und $\sphericalangle\,CPD = \sphericalangle\,PDQ$. Man erhält demnach die Linie PQ auch dadurch, daß man den Winkel DPQ oder α_2 gleich dem Winkel CDP oder α_1 macht. Der Schüler zeige, daß auch $\sphericalangle\,QDB = \alpha$, also $DQ \parallel CP$ ist, sodaß die Berechtigung vorliegt, das Viereck $CDQP$ als ein Parallelogramm zu bezeichnen. Er versuche schon jetzt selbständig Eigenschaften des Parallelogramms und seiner Diagonalen aufzufinden. Besonders gilt der Satz: Die Gegenseiten eines Parallelogramms sind gleich und parallel, oder: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. — Auch die Winkel α_4 und α_5 sind gleich α. KL und AB sind also parallel, wenn gewisse Winkel gleich sind. Welche?

γ) Man kann auch mit einer einer einzigen Zirkelöffnung zum Ziele kommen: Man nehme auf AB einen beliebigen Punkt C an, schlage um C mit der Zirkelöffnung CP einen Kreisbogen, der in D schneidet, um P und D schlage man Kreisbogen mit derselben Öffnung, die den Schnittpunkt Q geben. PQ ist die gesuchte Parallele.

Fig. 16.



Die Richtigkeit folgt daraus, daß CQ die Mittelsenkrechte zu PD ist, wobei, wie früher, $\sphericalangle\,\alpha = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$ ist. Weil nämlich wieder $\alpha_2 = \alpha_1$ ist, muß $PQ \parallel CD$ sein.

Bemerkung. Ist umgekehrt $PQ \# CD$, so muß $PC \# DQ$, $\sphericalangle\,\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und $PD \perp CQ$ sein ($\#$ soll heißen gleich und parallel). Das Viereck $CDQP$ hat lauter gleiche und paarweise parallele Seiten. Es heißt eine Raute oder ein Rhombus. Der Schüler versuche schon jetzt selbständig Eigenschaften des Rhombus und seiner Diagonalen aufzufinden.

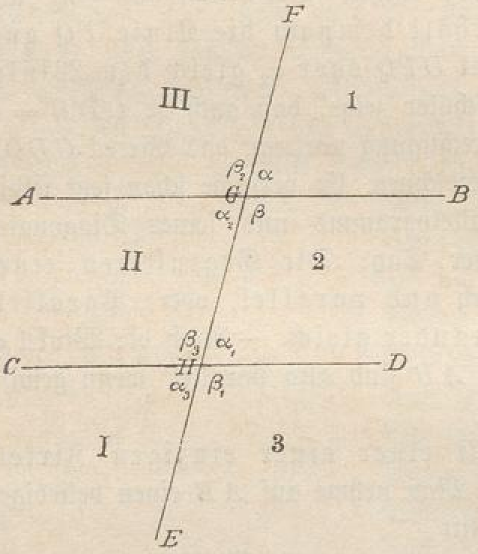
c) Bemerkungen über parallele Geraden und über die Winkelsumme des Dreiecks.

α) Die Parallelensätze.

78) Aus den letzten Konstruktionen und der Schlußbemerkung ergibt sich für Fig. 17 folgendes:

Ist $AB \parallel CD$, so ist $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_3$. Demnach ist im ganzen, weil auch Scheitelwinkel gleich sind, $\sphericalangle \beta_2 = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_3 = \sphericalangle \beta_1$. Da ferner zu gleichen Winkeln gleiche Nebenwinkel gehören, so ist auch $\sphericalangle \alpha = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_3$. Die Summe aus je einem α und je einem β ist gleich zwei Rechten.

Fig. 17.



Finden umgekehrt die genannten Winkelgleichheiten statt, so sind AB und CD parallel.

79) Man teilt die genannten acht Winkel der Fig. 17 in gewisse Gruppen ein. 1) β, α_2, β_3, α_1 liegen zwischen den Parallelen und werden daher **innere** Winkel genannt, die übrigen sind **äußere** Winkel. 2) Winkel wie α und α_1, die paarweise **gleichgerichtete** Schenkel haben, nennt man **gleichliegende** Winkel, auch **korrespondierende** Winkel (d. h. einander entsprechende), wohl auch **Gegenwinkel**.*) Die betreffenden Paare sind α und α_1, α_2 und α_3, β_1 und β_3, β und β_1. 3) **Winkel mit entgegengesetzten Schenkeln**, die aber nicht Scheitelwinkel sind, heißen **Wechselwinkel**. Die betreffenden Paare sind: α und α_3, α_2 und α_1, β und β_3, β_1 und β_2. 4) **Winkel mit einem gleichgerichteten und einem entgegengesetzt gerichteten Schenkelpaare**, die aber keine Nebenwinkel sind, bezeichnet man als **entgegengesetzte** Winkel.**) Die betreffenden Paare sind: α und β_1, β und α_1, β_1 und α_3, α_1 und β_3.

(Man kann diese Winkelgruppen auch so definieren, daß die Winkel entweder auf derselben Seite der die Parallelen schneidenden Geraden, oder auf verschiedenen Seiten liegen, daß sie ferner zugleich äußere bezw. zugleich innere Winkel sind, oder daß sie nicht zugleich innere bezw. äußere sind. Diese Definitionen sollen dem Schüler überlassen werden.)

80) Über diese Winkelpaare lassen sich nach obigem folgende Sätze aussprechen:

---

*) Diese allgemein übliche Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt.

**) Auch diese Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt, aber sie ist allgemein gebräuchlich. Sie soll beibehalten werden, weil diese Winkel von geringerer Bedeutung sind.

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei gleichliegende Winkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich, je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zusammen zwei Rechte.

Umgekehrt: Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, und sind dabei zwei gleichliegende Winkel gleich, oder sind zwei Wechselwinkel gleich, oder betragen zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte, so sind die beiden ersten Geraden parallel.*)

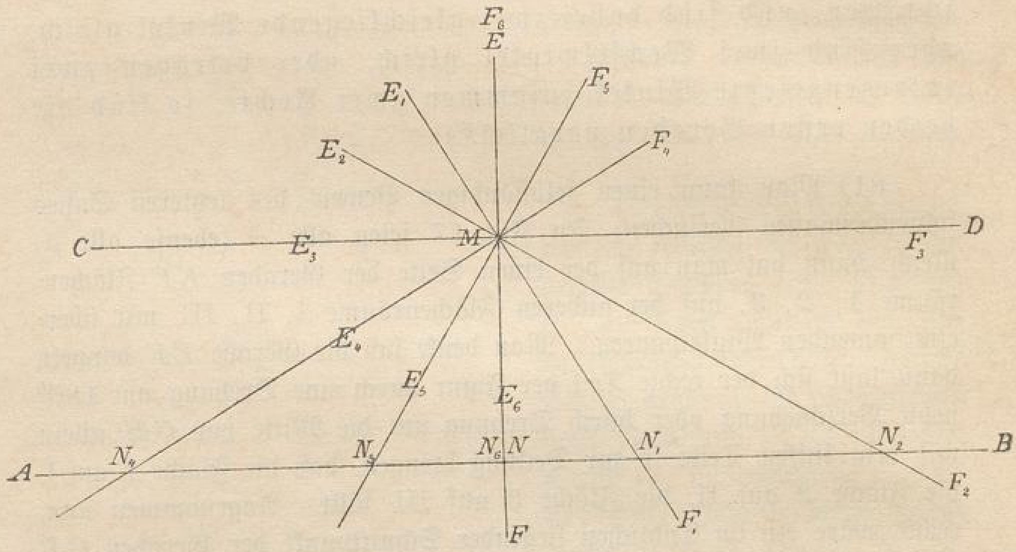
81) Man kann einen selbständigen Beweis des letzteren Satzes folgendermaßen versuchen: In Fig. 17 seien alle α (ebenso alle β) gleich, dann hat man auf der einen Seite der Geraden EF Flächenräume 1, 2, 3, auf der anderen Flächenräume I, II, III mit übereinstimmenden Winkelpaaren. Man denke sich die Gerade EF doppelt, dann läßt sich der rechte Teil der Figur durch eine Drehung um 180^0 nebst Verschiebung oder durch Drehung um die Mitte von GH allein mit dem linken Teile so zur Deckung bringen, daß die Fläche 1 auf I, die Fläche 2 auf II, die Fläche 3 auf III fällt. Angenommen nun, rechts wäre ein im Endlichen liegender Schnittpunkt der Geraden GB und HD vorhanden, so müßte er bei der Deckung mit einem dann notwendig vorhandenen Schnittpunkte der Geraden HC und GA zusammenfallen. Dann aber hätte man zwischen zwei endlichen Punkten zwei getrennte Geraden, was unmöglich ist. Demnach kann weder rechts noch links von der schneidenden Geraden ein im Endlichen liegender Schnittpunkt möglich sein, folglich sind AB und CD parallel.

82) Das gegenseitige Verhalten zweier Parallelen läßt sich noch auf folgendem Wege verdeutlichen. In Fig. 18 ist eine feste Gerade AB und eine um M drehbare Gerade dargestellt. Die Anfangslage der letzteren sei EF. Bewegt sich EF linksdrehend um M, so nimmt die Gerade z. B. die Lagen E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, ... E_6F_6 an, wobei sie eine halbe Umdrehung gemacht hat und sich entgegengesetzt zur Anfangslage befindet. Dabei ist der Durchschnittspunkt N mit der festen Geraden auf dieser über N_1 und N_2 nach unendlicher Entfernung gewandert, die der Lage E_3F_3 entspricht. Dann ist er plötzlich nach einem in entgegengesetzter Richtung liegenden unendlich fernen Punkte übergesprungen und von dort her über N_4, N_5 nach N_6, d. h.

*) Es ist gerechtfertigt, auch dann von gleichliegenden Winkeln usw. zu sprechen, wenn die beiden Geraden nur nahezu parallel sind. Die Behauptung des Parallelismus rechtfertigt die Benennung.

in die Anfangslage N zurückgelangt. Macht von jetzt ab die Linie noch eine Drehung von 180^0, so wiederholt sich der Vorgang und EF kommt in die eigentliche Anfangslage und Anfangsrichtung zurück.

Fig. 18.



Überall also ist die Bewegung von N eine ununterbrochene, nur beim **Passieren der parallelen Lage macht der Schnittpunkt auch bei der geringsten Drehung einen unendlich großen Sprung.**

[83)*) Dies führt auf die Frage, **wie man sich das Verhalten der Parallelen im Unendlichen selbst denken soll.** Der Satz, daß die beiden Geraden AB und EF für jede Lage einen und nur diesen einen Schnittpunkt haben, wird plötzlich zweifelhaft für den Fall des Parallelismus. Oben wurde absichtlich stets nur gesagt, dabei wäre im Endlichen kein Schnittpunkt vorhanden. Man kann ihn auch für das Unendliche ableugnen; man kann aber auch sagen, er befinde sich im Unendlichen, nur bleibe es zweifelhaft, ob er nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung zu denken sei; man kann aber auf Grund der besprochenen Symmetrie auch behaupten, es seien in unendlichen entgegengesetzten Entfernungen zwei Schnittpunkte vorhanden.

---

*) Dieser Abschnitt kann vorläufig übergangen werden, muß aber jedenfalls irgendwann zur Sprache kommen. Für den Zeitpunkt ist die Qualität der Schüler entscheidend.

Im Grunde genommen sind alle diese Redewendungen gleichberechtigt, und dies kann man folgendermaßen aufklären. Weil in Fig. 17 $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ ist, sagt man, die beiden Parallelen GB und HD hätten gegen die Gerade EF denselben Richtungsunterschied. Daher ist die Behauptung berechtigt, sie hätten dieselbe Richtung.

Denkt man sich einmal, die beiden Geraden hätten im Unendlichen denselben Abstand wie im Endlichen, so bedeutet dies den Richtungsunterschied Null; denkt man sich, sie hätten dort einen Schnittpunkt, so bedeutet dies einen unendlich kleinen Richtungsunterschied, dessen Folgen im Endlichen durchaus nicht wahrnehmbar sein können. Beide Annahmen bedeuten also für die nur im Endlichen arbeitende Mathematik ganz dasselbe. Ob das eine, ob das andere der Fall ist, ein Richtungsunterschied oder eine Änderung des Abstandes ist im Endlichen nicht wahrnehmbar.

Für die nur im Endlichen arbeitende Mathematik gilt daher auch der Satz, daß durch einen endlichen Punkt nur eine einzige Parallele gelegt werden könne, mit voller Bestimmtheit. Für die mit dem Unendlichen arbeitende Mathematik wird aber der Satz zweifelhaft, denn es können für das Unendliche die Fälle des Schneidens und des Nichtschneidens nicht auseinander gehalten werden. Man kann sogar für das Unendliche den Fall eines Auseinandergehens annehmen, ohne daß die Geltung jenes Satzes im Endlichen gestört wird. Daraus ergibt sich, daß dem Satze eine Geltung für das Unendliche sowohl zugesprochen, als auch abgesprochen werden kann; streng beweisen läßt er sich dafür nicht.

Euklid hat dies erkannt. Trotzdem sprach er ihn mit Bestimmtheit aus, jedoch ohne Beweis. Er sprach ihn aus als ein Axiom, d. h. als eine selbstverständliche aber unbeweisbare Annahme. Er dachte sich eben seinen mathematischen Raum so, daß der Satz Geltung haben sollte.*) Wir gehen sicher, wenn wir ihn vorläufig als für das Endliche geltend annehmen.]

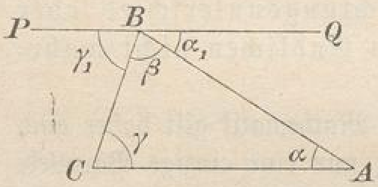
*) Zahlreiche, auch bedeutende Mathematiker haben versucht, diesen Satz und die obigen Parallelensätze in ihrer vollen Geltung zu beweisen. Stets aber wurde von anderen nachgewiesen, daß der angebliche Beweis Trugschlüsse enthielt. Im allgemeinen verwechselte man den wirklichen Weltraum mit dem mathematischen Raume, den man sich willkürlich als den des Euklid, aber auch anders denken kann, ohne daß für die Mathematik des Endlichen Unterschiede entstehen. So kann man sich z. B. die endliche Ebene als ein Stück einer unendlich großen Kugelfläche denken, dann aber läuft die so gedachte Ebene im Unendlichen in sich zurück. Zwei Parallelen verhalten sich dann wie zwei Meridiane, die einander in den beiden unendlich fernen Polen schneiden. Man

β) Die Winkelsumme des Dreiecks.

84) Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten. Im Vorkursus wurde dieser Satz zunächst für rechtwinklige Dreiecke abgeleitet, die sich stets als eine diagonale Hälfte gewisser Rechtecke betrachten lassen; dann für gleichschenklige Dreiecke, dann für allgemeine Dreiecke. Mit Hilfe der Parallelenlehre läßt er sich für Dreiecke von endlicher Größe folgendermaßen beweisen:

Man denke sich beim Dreieck ABC durch den Punkt B eine Parallele PQ zur Seite CA gelegt. Bezeichnet man die Winkel bei A, B und C (Fig. 19) als α, β und γ, die beiden durch die Parallele entstandenen Winkel mit α_1 und γ_1, so sind die Wechselwinkel α und α_1 einander gleich, ebenso die Wechselwinkel γ und γ_1, also stimmen die Winkelsummen $(\alpha + \beta + \gamma)$ und $(\alpha_1 + \beta + \gamma_1)$ überein. Die letztere Summe ist aber gleich dem gestreckten Winkel PBQ, also gleich zwei Rechten, daher ist auch die Summe $(\alpha + \beta + \gamma)$ gleich zwei Rechten.

Fig. 19.



[Auch dieser Satz gilt, streng genommen, nur für endliche Dreiecke. Gauß hat es für nötig gehalten, ihn für ein großes Dreieck, dessen Eckpunkte (trigonometrische Punkte) der Hohagen bei Göttingen, der Brocken und der Inselsberg sind, zu prüfen. Innerhalb der Fehlergrenzen der Instrumente bewährte sich der Satz als richtig. Absolute Gewißheit war damit nicht gewonnen.]

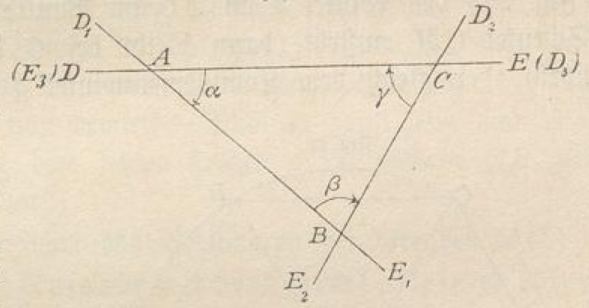
Bemerkungen. 1) Veranschaulichen läßt sich der Satz folgendermaßen: In Fig. 20 ist eine bewegliche Gerade DE auf die Seite AC des gezeichneten Dreiecks gelegt. Diese Gerade soll um den Punkt A gedreht werden, bis sie in die Lage von AB gelangt und als D_1E_1 erscheint. Dabei ist die kleinere der beiden möglichen Drehungen gemeint, die dem Winkel α entspricht. Darauf soll die Gerade ebenso um den Punkt B gedreht werden, bis sie in die Lage von BC gelangt und als D_2E_2 erscheint. Die neue Drehung entspricht dem Winkel β.

---

kann sich aber die endliche Ebene auch als einen Teil einer unendlich großen Drehungsfläche denken, auf der die „Meridiane" im Unendlichen auseinanderlaufen. Daraus ergibt sich die Unbeweisbarkeit des Euklidschen Axioms (für das unendlich ferne Gebiet), das der alte griechische Meister in seinem Scharfsinn richtig als ein solches bezeichnet hat. Eine interessante Frage ist dabei die folgende: Welche geometrischen Sätze sind unabhängig von diesen oder jenen Axiomen des Euklid?

Darauf ist sie ebenso um C zu drehen, bis sie in die Lage von CA gelangt und als D_3E_3 erscheint. Diese Schlußdrehung entspricht dem Winkel γ. Jetzt aber liegt die Gerade auf DE, jedoch hat sie zum ersten Male die der ursprünglichen entgegengesetzte Richtung erhalten. Demnach hat sie sich um 180^0 gedreht, und daher muß $\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 180^0$ sein.*)

Fig. 20.



2) Errichtet man auf einer Geraden AB in den Endpunkten unendlich lange Lote nach derselben Seite, so kann man das Gebilde als ein gleichschenkliges Dreieck mit unendlich langen Schenkeln betrachten. Die beiden Basiswinkel sind dabei Rechte, der dritte Winkel ist nach Euklid gleich Null.

3) Legt man durch die Endpunkte einer Geraden AB unendlich lange parallele Strahlen, die auf der einen Seite der Geraden liegen, so kann man das Gebilde als ein ungleichschenkliges Dreieck betrachten, dessen eine Seite AB ist, während die beiden anderen unendlich lang sind. Die Summe der Winkel A und B ist dabei gleich zwei Rechten, der dritte Winkel ist nach Euklid gleich Null.

γ) Einige Folgerungen der Parallelensätze.

85) Das gleichseitige Dreieck läßt sich auf drei Arten als gleichschenklig betrachten. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich. Folglich sind die sämtlichen Winkel des gleichseitigen Dreiecks einander gleich, und jeder ist gleich $\frac{180^0}{3} = 60^0$.

Nun läßt sich aber der Winkel $60^0 = \frac{360^0}{6}$ genau sechsmal um einen Punkt legen. Folglich lassen sich sechs gleichseitige Dreiecke von derselben Größe so aneinanderlegen, daß sie ein regelmäßiges Sechseck bilden (Fig. 21). Diesem läßt sich ein Kreis umbeschreiben, wobei der Radius gleich den Seiten der gleichseitigen Dreiecke ist. Folglich:

Trägt man in einen Kreis den Radius mehrfach als Sehne ein, so schließt sich die Reihe mit der sechsten Sehne.

*) Man veranschauliche den Satz mittels eines einseitig bezeichneten Lineals oder mit der Reißschiene an der Wandtafel, wobei sich die entgegengesetzte Schlußlage sehr deutlich zeigt.

Jeder Winkel des regelmäßigen Sechsecks beträgt 120^0, jeder seiner Zentriwinkel 60^0. Es besitzt sechs Symmetrielinien.

86) Die Summe der beiden spitzen Winkel im **rechtwinkligen Dreieck** ist gleich einem Rechten. (Sie sind Komplementwinkel.) Warum?

Daraus ergibt sich folgendes: Man denke sich im Dreieck ABC (Fig. 22) den Winkel α an AC im Punkte C angelegt, wodurch der Schenkel CM entsteht, dann bleibt bei C der Komplementwinkel β_1 übrig, der gleich dem Komplementwinkel β sein muß. Aus $\alpha = \alpha_1$

Fig. 21.

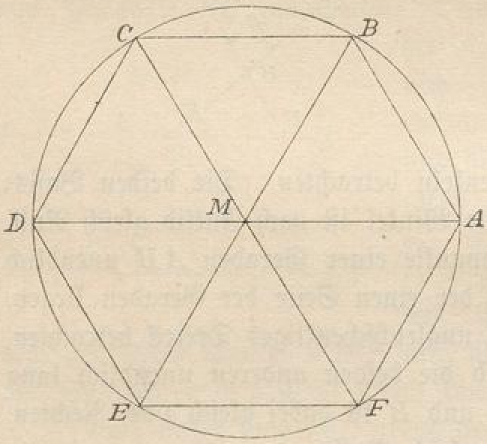
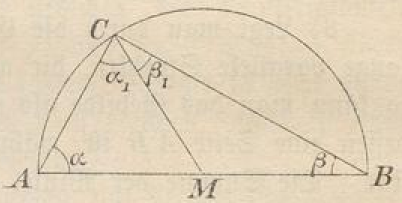


Fig. 22.



folgt, daß AMC ein gleichschenkliges Dreieck ist. Aus $\beta = \beta_1$ folgt, daß BCM ein gleichschenkliges Dreieck ist. Daraus folgt $AM = CM = BM$. Demnach ist AB durch M halbiert, und schlägt man mit dem Radius MA um M einen Kreis, so geht dieser durch A, B und C.

Man bezeichnet allgemein die Schenkel des rechten Winkels am rechtwinkligen Dreieck als **Katheten**, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als **Hypotenuse** des Dreiecks. Der gefundene Satz läßt sich daher folgendermaßen aussprechen:

Beim rechtwinkligen Dreieck hat der umbeschriebene Kreis seinen Mittelpunkt in der Mitte der Hypotenuse. Oder:

Der umbeschriebene Kreis des rechtwinkligen Dreiecks hat die Hypotenuse zum Durchmesser.

Umgekehrt: **Zeichnet man über dem Durchmesser eines Kreises ein Dreieck, welches den dritten Eckpunkt in der Kreislinie hat, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges.**

Beweis. In Fig. 22 ist $MA = MC$, folglich $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$. Außerdem ist $MB = MC$, folglich $\sphericalangle \beta = \beta_1$. Demnach ist $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$. Die Summe der vier Winkel ist aber gleich 180^0, folglich ist $\alpha_1 + \beta_1 = 90^0$, d. h $\sphericalangle ACB$ ein Rechter.

Der Satz wird gewöhnlich abgekürzt folgendermaßen ausgesprochen: Der Winkel im Halbkreise ist ein Rechter. (Sehr einfach ergibt sich daraus, daß sich um den Schnittpunkt M der Diagonalen eines Rechtecks ein Kreis legen läßt, der durch die Ecken des Rechtecks geht.)

Aufgabe. Auf einer Geraden AC im Endpunkte (oder in einem beliebigen Punkte) ein Lot zu errichten.

Auflösung. Man schlage um A und C Kreisbogen von demselben (beliebigen) Radius, die einen Punkt M geben (Fig. 22), und um M einen Kreisbogen von demselben Radius; dann ziehe man AM bis zum Schnitte B mit dem letzten Bogen. Die Gerade CB gibt das gesuchte Lot. (Warum?)

(Die Konstruktion erspart das Verlängern der Geraden AC.)

Aufgabe. Dieselbe Aufgabe mit dem Zirkel allein zu lösen.

Auflösung. Man schlage mit CA um C einen Kreisbogen, trage auf diesem zweimal hintereinander dieselbe Zirkelöffnung ab und schlage mit ihr um die beiden Teilpunkte D und E Kreisbogen, die einander in einem Punkte B schneiden. Durch C und B ist das gesuchte Lot vollständig bestimmt. (Warum? Vgl. das regelmäßige Sechseck.)

87) Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks sei gleich γ. Wie groß ist jeder Basiswinkel α? Antwort: $\alpha = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$.

Beweis. $\alpha+\alpha+\gamma=180^0$ oder $2\alpha+\gamma=180^0$, also $2\alpha=180^0-\gamma$, also $\alpha = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$. — (Daraus folgt ferner $\frac{\gamma}{2} = 90^0 - \alpha$, also $\gamma = 180^0 - 2\alpha$ als Winkel an der Spitze, wenn α der Basiswinkel ist.)

Aufgabe. Wie groß ist jeder Winkel des regelmäßigen Fünfecks?

Auflösung. Der Zentriwinkel des Fünfecks ist gleich $\frac{360^0}{5}=72^0$, der Basiswinkel des zugehörigen gleichschenkligen Dreiecks ist also gleich $90^0 - \frac{72^0}{2} = 90^0 - 36^0 = 54^0$. Jeder Winkel des regelmäßigen Fünfecks besteht aus zwei solchen Winkeln, ist also gleich 108^0.

[Für das regelmäßige n-Eck folgt: Zentriwinkel $= \frac{360^0}{n}$, Basiswinkel des zugehörigen gleichschenkligen Dreiecks $= 90^0 - \frac{180^0}{n}$, folglich der doppelt so große n-Eckswinkel $= 180^0 - \frac{360^0}{n}$, wobei $n > 2$ zu denken ist.]

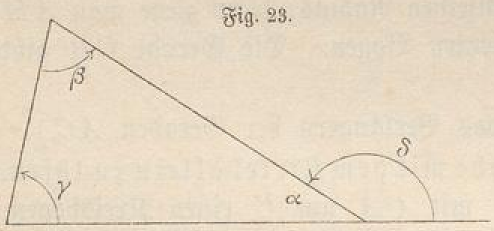
88) Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so stimmen sie auch im dritten überein. Sind nämlich α, β, γ die Winkel des einen Dreiecks, α_1, β_1, γ_1 die des anderen, und ist

$\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$, so ist in dem einen Dreiecke $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, im anderen $\gamma_1 = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1)$, also muß $\gamma = \gamma_1$ sein. (Warum?)

89) Unter einem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man einen Winkel, der durch Verlängerung einer der Seiten des Dreiecks entsteht. Von ihm gilt der Satz:

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der an den beiden anderen Ecken liegenden Dreieckswinkel.

Fig. 23.



Beweis. In Fig. 23 ist δ ein Außenwinkel, α, β, γ sind die Dreieckswinkel. Dabei ist $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$, auch $\delta = 180^0 - \alpha$, also $\delta = \beta + \gamma$.

Bemerkung. Eine durch den Scheitel von α gelegte Parallele zur Gegenseite zerlegt δ in die beiden Bestandteile β und γ. Die Summe aller sechs Außenwinkel des Dreiecks ist gleich vier Rechten.

90) Wie groß ist die Summe der Winkel im unregelmäßigen n-Eck?*) Antwort: Denkt man sich einen Punkt P im Innern des n-Ecks mit dessen Ecken verbunden, so entstehen n Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke hat als Winkelsumme zwei Rechte, alle Dreiecke zusammen haben also die Winkelsumme $2n$ Rechte. Davon sind vier Rechte abzuziehen als Summe der Winkel, die um P herumliegen, für das n-Eck bleibt daher als Winkelsumme $(2n - 4)$ Rechte.

Beispiele. Winkelsumme des Vierecks $(2 \cdot 4 - 4) = 4$ Rechte. Winkelsumme des Fünfecks $(2 \cdot 5 - 4) = 6$ Rechte. Winkelsumme des Sechsecks $(2 \cdot 6 - 4) = 8$ Rechte. Winkelsumme des Siebenecks $(2 \cdot 7 - 4) = 10$ Rechte. Jedes folgende hat zwei Rechte mehr.

Bemerkung. Die Summe aller 8 Außenwinkel des Vierecks beträgt 8 Rechte. Wie ist es bei dem konvexen n-Eck?

91) Halbiert man bei zwei Parallelen, die von einer Geraden geschnitten werden, gleichliegende Winkel oder Wechselwinkel, so werden die Halbierenden parallel; halbiert man entgegengesetzte Winkel, so stehen die Halbierenden aufeinander senkrecht. (Beweis dem Schüler zu überlassen.)

92) Winkel, deren Schenkel gleichgerichtet parallel sind, sind einander gleich. Winkel, deren Schenkel entgegengesetzt gerichtet parallel

*) Es sei zunächst vorausgesetzt, daß das n-Eck überall konvex ist, daß also jeder seiner Winkel kleiner als 180^0 ist.

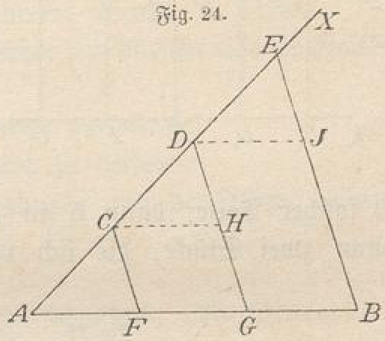
sind, sind einander gleich. Winkel mit parallelen Schenkeln, von denen ein Paar gleichgerichtet, ein Paar entgegengesetzt gerichtet ist, betragen zusammen zwei Rechte. (Beweis dem Schüler zu überlassen. Der Satz gilt auch von Nebenwinkeln.)

Fällt man von einem Punkte aus, der außerhalb eines Winkels und seines Scheitelwinkels liegt, Lote auf dessen Schenkel, so bilden diese Lote einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist. Fällt man sie von einem Punkte aus, der innerhalb des gegebenen Winkels oder seines Scheitelwinkels liegt, so bilden sie den Supplementwinkel des gegebenen Winkels.

93) **Aufgabe.** Eine gegebene Gerade in 3, 5 oder in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu zerlegen.*)

Auflösung. In Fig. 24 sei AB die in drei gleiche Teile zu zerlegende Gerade, dann ziehe man eine beliebig gerichtete Gerade AX und trage auf dieser mit beliebiger Zirkelöffnung gleiche Stücke AC, CD und DE ab. Jetzt verbinde man E mit B und lege durch D und C Parallelen zu EB, die auf AB Teilpunkte G und F geben. Dann ist $AF = FG = GB$.

Fig. 24.



Beweis. Um die letzte Behauptung zu beweisen, lege man durch D und E Parallelen zu AB, sodaß Dreiecke DEJ und CDH entstehen. Für diese Dreiecke ist $CD = DE$, auch stimmen ihre Winkel bei C und D, bei H und J, bei D und E überein. (Weshalb?) Es wird behauptet, daß die beiden Dreiecke sich zur Deckung bringen lassen. Man kann nämlich DE so auf CD legen, daß dabei die gleichen Winkel EDJ und DCH einander decken, daß ferner die gleichen Winkel DEJ und CDH einander decken. Weil dies der Fall ist, so müssen dabei auch die Punkte J und H zusammenfallen, denn zwei einander deckende Paare von Geraden müssen denselben Schnittpunkt haben. Demnach muß $DJ = CH$ sein.

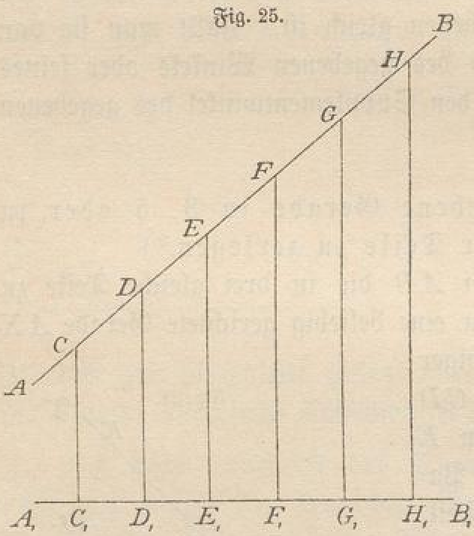
Weil aber Parallele zwischen Parallelen gleichlang sind, ist $GB = DJ$ und ebenso $FG = CH$. Demnach muß auch $FG = GB$ sein. (Warum?)

*) Diese Aufgabe, bei der es sich um kongruente Dreiecke handelt, wird vorausgeschickt, um eine Reihe von Konstruktionen zu ermöglichen.

Ebenso ist zu beweisen, daß sich Dreieck DEJ mit dem Dreieck ACF zur Deckung bringen läßt, und daß daher auch $AF = DJ$ und folglich auch $AF = GB$ ist. Es ist also, wie behauptet wurde, $AF = FG = GB$.

Folgerung. Ist eine Gerade in gleiche Teile geteilt, und zieht man von den Teilpunkten aus Parallelen bis zu einer anderen Geraden, so wird auch diese in gleiche Teile zerlegt.

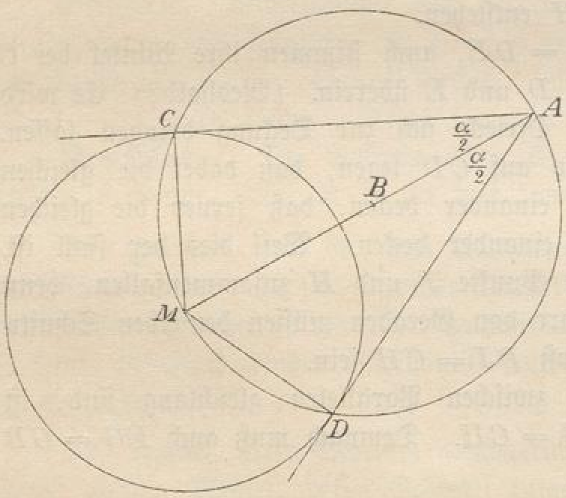
Fig. 25.



Der Beweis wird mit Hilfe ebensolcher Dreiecke geführt wie vorher. —

Sind die Parallelen Lote auf der zweiten Geraden, so sagt man, die Teilpunkte der ersten seien auf die zweite Gerade **projiziert**. Dies ist in Fig. 25 dargestellt. Also gilt der Satz: **Die Projektion gleicher Teile einer Geraden auf eine andere Gerade gibt auf dieser gleiche Teile.** Zählt man bei der einen Geraden erst 3 solcher Teile, dann 5 in aufeinander folgender Reihe ab, so hat man zwei Stücke, die sich verhalten wie 3 zu 5. Legt man durch die Endpunkte Parallelen bis zur zweiten Geraden, so erhält man auch dort zwei Stücke, die aus 3 bezw. 5 gleichen Teilen bestehen. Auch von diesen Stücken sagt man, sie verhielten sich wie 3 zu 5. Daher sagt man allgemein: **Alle Geraden, die durch drei Parallelen gezogen werden, sind in demselben Verhältnis geteilt, nämlich im Verhältnis der Abstände der Parallelen.**

Fig. 26.



94) **Aufgabe.** Von einem außerhalb eines (gegebenen) Kreises gegebenen Punkte an den Kreis Tangenten zu legen.

Auflösung. In Fig. 26 sei M der gegebene Kreis*), A der gegebene Punkt. Man ziehe die Gerade AM, halbiere sie, was B gibt und lege um B mit der Zirkelöffnung BM einen Kreis, der den ersten Kreis in C und D schneidet. Die Geraden AC und AD geben die gesuchten Tangenten.

Beweis. Der Winkel ACM ist als Winkel im Halbkreise ein Rechter, also ist CA das im Endpunkte des Radius MC auf diesem errichtete Lot, d. h. CA ist Tangente des Kreises M. Das Entsprechende findet bei D statt.

d) Konstruktionsübungen.**)

α) Addition und Subtraktion von Geraden, von Winkeln, von Kreisbogen mit demselben Radius.

96) Die Summe dreier oder mehrerer gegebener***) Geraden zu bilden.

97) Die Summe dreier oder mehrerer Winkel zu bilden.

98) Die Summe dreier oder mehrerer Kreisbogen von demselben Radius zu bilden.

99) Den Unterschied zweier Geraden zu bilden.

100) Den Unterschied zweier Winkel zu bilden.

101) Den Unterschied zweier Kreisbogen von demselben Radius zu bilden.

β) Vervielfachung und Teilung von Geraden, von Winkeln und von Kreisbogen.

102) Eine Gerade auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Länge zu bringen.

103) Einen Winkel auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Größe zu bringen.

104) Einen Kreisbogen auf das Doppelte, Dreifache, Vierfache usw. zu bringen.

105) Eine Gerade in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen. (Zwei Lösungsarten sind anzugeben.)

106) Eine Gerade in beliebig viele gleiche Teile zu zerlegen.

107) Beliebige Bruchteile einer Geraden zu bilden, z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ usw.

---

*) Man bezeichnet den gegebenen Kreis häufig nur mit seinem Mittelpunkte.

**) Einige der schon gelösten Aufgaben werden der leichteren Übersicht wegen noch einmal genannt.

***) Das Wort „gegeben" soll von jetzt ab weggelassen werden.

108) Einen Winkel in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen.*)

109) Einen Kreisbogen in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen.

110) Eine Gerade im Verhältnis 2 : 3 (zwei zu drei) zu teilen. (Man teile sie in 5 gleiche Teile. Zählt man 2 davon ab, so hat man den gesuchten Teilpunkt.)

111) Eine Gerade in einem beliebigen ganzzahligen Verhältnis zu teilen.

112) Eine Gerade so zu verlängern, daß sie sich zum Zusatzstück verhält wie 3 : 5. (Man teile sie in 3 Teile und verlängere sie um 5 solcher Teile.)

113) Einen Winkel so zu vergrößern, daß er sich zum Zusatzwinkel verhält wie 2 : 3. (Man halbiere den Winkel und addiere zu ihm das Dreifache einer Hälfte.)

114) So kann man einen Winkel derart vergrößern, daß er zum Zusatzteile im Verhältnis $2:n$, $4:n$, $8:n$, $16:n$ usw. steht, wobei n eine ganze Zahl ist.

115) Die Aufgaben 113) und 114) lassen sich auch für Kreisbogen ausführen.

γ) Konstruktion für gewisse Reihen von Winkeln.

116) Die Winkelreihe $\cdots 360^0, 180^0, 90^0, 45^0, \frac{45^0}{2}, \frac{45^0}{4}, \frac{45^0}{8}, \cdots$ zu konstruieren.

117) Die Winkelreihe $\cdots 240^0, 120^0, 60^0, 30^0, 15^0, \frac{15^0}{2}, \frac{15^0}{4}, \cdots$ zu konstruieren.

118) Die dreifachen, fünffachen, siebenfachen usw. Winkel der Reihen 116) und 117) zu konstruieren.

119) Durch Addition und Subtraktion das Anfangsglied für andere Reihen konstruierbarer Winkel aufzufinden, z. B.

$$330^0, 165^0, \frac{165^0}{2}, \frac{165^0}{4}, \cdots$$

$$300^0, 150^0, 75^0, \frac{75^0}{2}, \frac{75^0}{4}, \cdots$$

$$210^0, 105^0, \frac{105^0}{2}, \frac{105^0}{4}, \cdots$$

*) Andere Teilungen beliebiger Winkel sind mit Lineal und Zirkel aus später darzulegenden Gründen nicht durchführbar. Für gewisse Winkel ist aber die Dreiteilung möglich, z. B. für die Winkel 360°, 180°, 90°, für gewisse wird später die Fünfteilung gelehrt usw. Von den Teilungen beliebiger Kreisbogen gilt dasselbe.

δ) Konstruktion gewisser Kreisteilungen und regelmäßiger Vielecke.

120) Einen Kreis in 2, 4, 8, 16, 32, ... gleiche Teile zu zerlegen.

121) Einen Kreis in 3, 6, 12, 24, 48, ... gleiche Teile zu zerlegen

122) Einem Kreise ein regelmäßiges 4=Eck, 8=Eck, 16=Eck, 32=Eck, ... einzubeschreiben.

123) Einem Kreise ein regelmäßiges 3=Eck, 6=Eck, 12=Eck, 24=Eck, ... einzubeschreiben. (ACE in Fig. 21 ist ein gleichs. Dreieck.)

124) Einem Kreise ein regelmäßiges 4=Eck, 8=Eck, 16=Eck, 32=Eck, ... umzubeschreiben.

125) Einem Kreise ein regelmäßiges 3=Eck, 6=Eck, 12=Eck, 24=Eck, ... umzubeschreiben.

126) Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 4=Eck, 8=Eck, 16=Eck, 32=Eck, ... zu konstruieren.*)

127) Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 3=Eck, 6=Eck, 12=Eck, 24=Eck, ... zu konstruieren.*)

128) Die Aufgaben 122) und 124) bezw. 123) und 125) so zu vereinigen, daß die Seiten des umbeschriebenen Vielecks denen des einbeschriebenen parallel werden.

129) Dieselben Aufgaben so zu vereinigen, daß die Seiten des umbeschriebenen Vielecks durch die Ecken des einbeschriebenen gehen.

130) Den Mittelpunkt eines gegebenen regelmäßigen Vielecks zu finden und dessen ein= und dessen umbeschriebenen Kreis zu konstruieren.

ε) Übungen mit regelmäßigen Vielecken.

131) Die Ebene lückenlos mit gleichseitigen Dreiecken von derselben Größe zu belegen.

132) Die Ebene lückenlos mit Quadraten von derselben Größe zu belegen.

133) Die Ebene lückenlos mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe zu belegen.

---

*) Quadrat, gleichseitiges Dreieck, regelmäßiges Sechseck über einer gegebenen Geraden sind leicht zu konstruieren. Bei größerer Anzahl der Seiten konstruiere man zunächst das gleichschenklige Dreieck mit dem zugehörigen Zentriwinkel. Beim Achteck z. B. ist der Zentriwinkel gleich $\frac{360^0}{8} = 45^0$, der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks also gleich $90^0 - \frac{45^0}{2} = 67\frac{1}{2}^0$, was leicht zu konstruieren ist. Dann lege man um die Spitze des Dreiecks einen durch die Endpunkte der gegebenen Geraden gehenden Kreis, in den sich die Gerade achtmal als Sehne eintragen läßt, wenn man richtig gezeichnet hat.

134) Die Ebene mit regelmäßigen Achtecken von derselben Größe so zu belegen, daß Quadrate von derselben Seitenlänge übrig bleiben.

135) Die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe so zu belegen, daß gleichseitige Dreiecke von derselben Seitenlänge übrig bleiben. (Auf jeder Sechsecksseite steht ein solches Dreieck.)

136) Die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe so zu belegen, daß Rhomben von derselben Seitenlänge und von den Winkeln 60^0 und 120^0 übrig bleiben.

137) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein kleineres von gegebener Größe so einzuzeichnen, daß die Ecken des kleineren auf die Seiten des größeren fallen.*) Wann hat die Aufgabe zwei Lösungen, wann nur eine, wann keine?

138) Um ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein größeres von gegebener Seite so zu legen, daß die Seiten des letzteren durch die Eckpunkte des ersteren gehen.**) Wann hat die Aufgabe zwei Lösungen, wann nur eine, wann keine?

139) Die Aufgabe 137) für zwei Quadrate zu lösen.

140) Die Aufgabe 138) für zwei Quadrate zu lösen.

141) Die Aufgabe 137) für zwei regelmäßige Sechsecke oder Achtecke usw. zu lösen.

142) Die Aufgabe 138) für zwei regelmäßige Sechsecke oder Achtecke usw. zu lösen.

ζ) Zwei Hindernisaufgaben.

143) **Eine gerade Linie über ein gegebenes Hindernis hinaus zu verlängern.**

[Es kommt vor, daß auf dem Fußboden einer Werkstätte eine Gerade gezogen werden soll, die über eine im Wege stehende Maschine hinaus zu verlängern ist; oder daß eine geplante Straße abgesteckt werden soll, obwohl ein wegzureißendes Gebäude noch steht. Man begnüge sich mit folgender vorläufiger Lösung: Man umgehe das

*) Die Mitten beider Dreiecke müssen aufeinander fallen. Man zeichne das kleinere Dreieck irgendwo für sich, bilde den Radius seines umbeschriebenen Kreises, und lege mit diesem einen Kreis um den Mittelpunkt des gegebenen (größeren) Dreiecks. Ist der Radius groß genug, so erhält man sechs Schnittpunkte mit den Seiten des letzteren, welche zwei gleichseitige Dreiecke geben.

**) Man zeichne das größere Dreieck irgendwo für sich, bilde die Radien der ihm ein- und umbeschriebenen Kreise und lege mit diesen Kreise um den Mittelpunkt des gegebenen (kleineren) Dreiecks. Ragen die Spitzen des letzteren über den kleineren hinaus, so lassen sich von ihnen aus an diesen Kreis sechs Tangenten legen, von den je drei einem der zu zeichnenden Dreiecke angehören. Die Tangenten enden auf dem größeren Kreise.

Hindernis durch drei Seiten eines Rechtecks, die sich um das Hindernis herumlegen lassen und konstruiere statt der vierten Seite ihre Verlängerung als Lot auf der dritten.

Statt der drei Rechtecksseiten kann man auch zwei Seiten eines gleichseitigen oder gleichschenkligen Dreiecks benutzen, die das Hindernis umgehen.

Später wird eine von Winkeln unabhängige Konstruktion gelehrt.]

144) Den jenseits eines Hindernisses liegenden Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen.

[Die Geraden sind (zunächst nach der vorigen Methode) über das Hindernis hinaus zu verlängern. Dann ist der Schnittpunkt leicht zu bestimmen.]

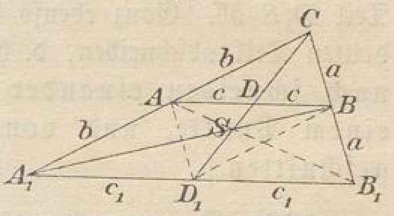
Bemerkung. Ist das Hindernis z. B. ein Fluß, der nicht umgangen werden kann, so benutzt der Landmesser Stäbe, von denen zwei auf der zu verlängernden Geraden senkrecht in die Erde gestoßen werden, während ein dritter Stab jenseits des Flusses so eingestellt wird, daß er dem über den ersten Stab hinblickenden Beobachter durch den zweiten Stab verdeckt wird. So findet man einen ersten Punkt für die Verlängerung der Geraden, einen zweiten kann man in derselben Weise bestimmen. In ähnlicher Weise kann mit der zweiten Aufgabe verfahren werden.

η) Einfache Vergrößerungs- und Verkleinerungsaufgaben.*)

145) Ein gegebenes Dreieck im doppelten Maßstabe zu zeichnen.

Auflösung. Ist in Fig. 27 ABC das gegebene Dreieck, so verlängere man CA über A hinaus um sich selbst, was A_1 gibt. Dann lege man durch A_1 eine Parallele zu AB, welche die Verlängerung von CB in einem Punkte B_1 schneidet. Dann ist A_1B_1C das verlangte Dreieck.

Fig. 27.



Beweis. Weil CA_1 in A halbiert und $A_1B_1 \parallel AB$ ist, so ist auch CB_1 in B halbiert, d. h. CB_1 ist doppelt so groß als CB. Zieht man ferner die Gerade $BD_1 \parallel AA_1$, so ist AB gleich A_1D_1, denn Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. Weil aber CB_1 in B hal-

*) Eigentlich gehören solche Aufgaben in die Ähnlichkeitslehre. Um jedoch die Konstruktionsübungen mannigfaltiger zu machen, sind sie schon hier eingeschaltet worden.

biert und $BD_1 \parallel CA_1$ ist, so ist auch A_1B_1 in D_1 halbiert, also ist $AB_1 = 2 \cdot A_1D_1 = 2 \cdot AB$. Alle Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind also doppelt so groß als die Dreiecks ABC. Zugleich sind alle Winkel des Dreiecks A_1B_1C gleich den entsprechend liegenden Winkel des Dreiecks ABC. (Warum?)

Bemerkungen. Die Auflösung kann folgendermaßen umgestaltet werden. Man verlängere CA über A hinaus um sich selbst, ebenso CB über B hinaus um sich selbst und verbinde die neuen Endpunkte A_1 und B_1 durch eine Gerade. Diese muß von selbst parallel zu AB und doppelt so lang wie AB werden. —

Zum Beweise konnte man auch $AD_1 \parallel CB_1$ ziehen.

Dann hat man vier übereinstimmende Dreiecke und sieht daraus, daß der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C viermal so groß ist als der von ABC.

Sind also die Seiten eines Dreiecks doppelt so groß wie die eines anderen, so haben beide Dreiecke dieselben Winkel und der Inhalt des größeren Dreiecks ist das Vierfache von dem des kleineren.

[In der Figur ist ganz ebenso Dreieck A_1SC die Vergrößerung des Dreiecks BSD_1 auf den doppelten Maßstab; also ist SC das Doppelte von SD_1, und SA_1 das Doppelte von SB. (Die Geraden SB und SD_1 sind jetzt über die Ecke S hinaus verdoppelt gezeichnet worden.) Demnach ist D_1S der dritte Teil von D_1C und BS der dritte Teil von BA_1. (Dies bestätigt sich auch, wenn man durch A und B Parallelen zu CD_1 legt, welche die halbierte Linie A_1B_1 in vier gleiche Teile zerlegen, von denen drei Teile durch Parallelen auf A_1B übertragen werden, sodaß diese Linie in drei gleiche Teile geteilt ist.)

Man nennt die Geraden, die von der Ecke des Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten gehen, Mittellinien des Dreiecks. Die Mittellinie A_1B schneidet also von der Mittellinie CD_1 den dritten Teil D_1S ab. Ganz ebenso muß die Mittellinie B_1A von CD_1 den dritten Teil abschneiden, d. h. sie muß auch durch S gehen. Demnach schneiden einander die Mittellinien des Dreiecks in einem Punkte, und von jeder wird der dritte Teil abgeschnitten.]

146) Ein gegebenes Dreieck im halben Maßstabe zu zeichnen.

Die Auflösung ergibt sich aus Fig. 27 und ist dem Schüler zu überlassen.

147) Ein gegebenes Dreieck im dreifachen Maßstabe zu zeichnen.

Die Auflösung geschieht ähnlich wie bei Aufgabe 145. Sie ist dem Schüler zu überlassen. Dieser soll die Richtigkeit der Konstruktion beweisen und durch Zeichnen geeigneter Parallelen das große Dreieck in neun mit dem gegebenen übereinstimmende Dreiecke zerlegen um so zu zeigen, daß der Flächeninhalt der neunfache des ursprünglichen ist.

148) [Ein gegebenes Dreieck im $n$fachen Maßstabe (wo n eine beliebige ganze Zahl ist) oder im $\frac{3}{2}$fachen Maßstabe, oder im $\frac{3}{4}$fachen Maßstabe, oder im $\frac{m}{n}$fachen Maßstabe (m und n ganze Zahlen) zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt des neuen Dreiecks der n^2fache bezw. $\frac{9}{4}$fache, bezw. $\frac{9}{16}$fache, bezw. der $\left(\frac{m}{n}\right)^2$fache geworden ist.]

149) Ein gegebenes Quadrat im doppelten, dreifachen, vierfachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt der vierfache, bezw. neunfache, bezw. 16fache ist. [Das Quadrat ferner im $\frac{2}{3}$fachen, $\frac{5}{4}$fachen, $\frac{m}{n}$fachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt das $\frac{4}{9}$fache, $\frac{25}{16}$fache, $\left(\frac{m}{n}\right)^2$fache geworden ist.]

150) Ein gegebenes regelmäßiges 6-Eck, oder 8-Eck, oder 12-Eck, oder 16-Eck im doppelten, oder dreifachen, oder vierfachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt das 4fache, bezw. 9fache, bezw. 16fache geworden ist.

(Die Auflösung geschieht am einfachsten, indem man um den Mittelpunkt des Vielecks einen Kreis mit dem doppelten, dreifachen, vierfachen Radius des umbeschriebenen Kreises schlägt und die nach den Ecken des ursprünglichen Vielflachs gezogenen Radien bis zum Kreise verlängert, worauf die Sehnen einzutragen sind.

Weil jedes der gleichschenkligen Dreiecke auf das Vierfache, Neunfache, Sechzehnfache des ursprünglichen Inhalts gelangt, so gilt dasselbe auch vom Gesamtinhalte des Vielecks.)

151a) Ein gegebenes Rechteck im doppelten, dreifachen, vierfachen usw. Maßstabe zu zeichnen.

(**Auflösung.** Man zeichne eine Diagonale und bringe sie nach derselben Richtung hin auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Länge. Von den gefundenen Endpunkten fälle man Lote auf die vom Anfangspunkte der Diagonale ausgehenden Rechtecksseiten. Es entstehen so Rechtecke von den Seiten $2a$ und $2b$, $3a$ und $3b$, $4a$ und $4b$ usw. oder, wie man auch sagt, von demselben Seitenverhältnis $a:b$. In allen diesen Rechtecken bildet die Diagonale mit den Rechtecksseiten dieselben beiden Winkel.)

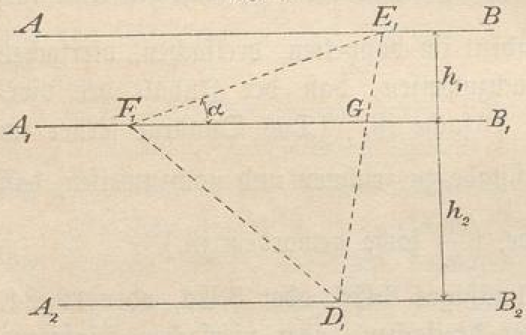
151b) **Ein beliebiges gegebenes Viereck im doppelten Maßstabe zu zeichnen.**

(Die Auflösung ist dem Schüler zu überlassen, der mehrere Wege aufzusuchen hat, z. B. auch den Weg, die Abschnitte der Diagonalen vom Schnittpunkte aus zu verdoppeln, wobei jedes Dreieck auf den vierfachen Inhalt kommt, also auch der Gesamtinhalt vervierfacht wird.)

Auch der dreifache, vierfache usw. Maßstab macht keine Schwierigkeiten.

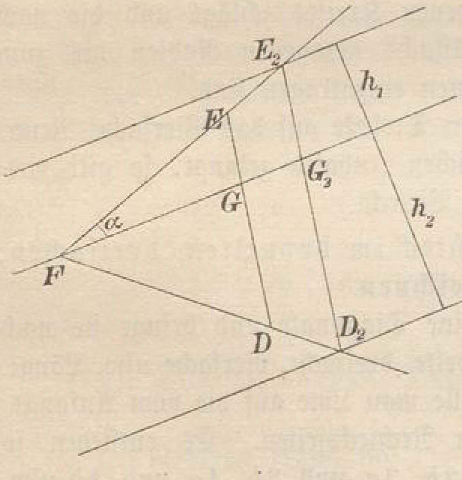
152) [Eine schwierigere Vergrößerungsaufgabe: Gegeben seien drei Parallelen, von denen die beiden letzten den doppelten gegenseitigen Abstand haben wie die beiden ersten. Es soll ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet werden, welches seine Ecken auf den Parallelen hat. Eine seiner Ecken soll vorgeschrieben sein.

Fig. 28.



Auflösung. In Fig. 28 seien AB, A_1B_1, A_2B_2 die Parallelen mit den Abständen h_1 und $h_2 = 2h_1$; F_1 soll der gegebene Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks sein. Man zeichne zunächst irgendwo ein gleichseitiges Dreieck DEF von beliebiger, z. B. kleiner Größe und mache in diesem $EG = \frac{1}{3} ED$ (Fig. 29). Dann verlängere man FE und FD und die zu ziehende Gerade FG über E, D, G hinaus. Zu FG ziehe man Parallele in den entgegengesetzten Abständen h_1 und h_2, welche die verlängerten Dreiecksseiten in E_2 und D_2 schneiden. Zieht man D_2E_2, so hat man ein gleichseitiges Dreieck FD_2E_2, welches den Forderungen genügt und nur noch in die richtige Lage zu bringen ist. Man lege den Winkel $EFG = \alpha$ an A_1B_1 im Punkte F_1 nach der Seite des kleineren Abstandes an, was den Schnittpunkt E_1 gibt und schlage um F_1 mit F_1E_1 einen Kreis-

Fig 29.



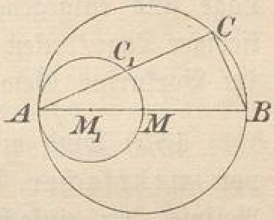
bogen, der A_2B_2 in D_2 schneidet. Dann sind $D_1E_1F_1$ die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks. (Letzteres kann noch auf eine zweite Art, links von F_1 liegend, gezeichnet werden, wozu nur die Vervollständigung des letzten Kreisbogens nötig ist.)

Der Beweis der Richtigkeit soll dem Schüler überlassen bleiben. Dieser wird dann auch imstande sein, die Aufgabe für beliebige Abstandsverhältnisse zu lösen. — Die Konstruktion kann erheblich abgekürzt werden, denn eigentlich ist die Aufgabe gelöst, sobald man im Hilfsdreieck FG gezogen und den Winkel α in die Hauptfigur übertragen hat.]*)

153) Zeichnet man in einen Kreis einen ihn berührenden vom halben Radius, so ist jede durch den Berührungspunkt gelegte Sehne durch den kleineren Kreis halbiert.

Beweis. Der kleinere Kreis geht durch den Mittelpunkt M des größeren. Ist A Berührungspunkt, so ist AMB ein Durchmesser, der durch die Mitten beider Kreise geht. Wird eine beliebige Sehne AC in C_1 vom kleineren Kreise geschnitten und zieht man CB und C_1M, so sind die Winkel AC_1M und ACB Rechte als Winkel im Halbkreis, also ist $C_1M \parallel CB$; da ferner AB in M halbiert ist, muß auch AC in C_1 halbiert sein.

Fig. 30.



Entsprechendes findet statt mit einem inneren Berührungskreise, dessen Radius der dritte, vierte, n^{te} Teil vom Radius des größeren ist.

Was geschieht, wenn der Berührungskreis außerhalb des gegebenen liegt?

(Der angegebene Satz läßt sich bei vielen Konstruktionsaufgaben anwenden.)

e) Begriff der Symmetrie in der Ebene.

α) Erklärung und Grundgesetze der einfachen und mehrfachen Symmetrie.

154) Bei den grundlegenden Konstruktionen drängte sich der Begriff der Symmetrie auf, bei dessen Beachtung viele Sätze und Konstruktionen sich als selbstverständlich ergeben.

Man bezeichnet ein planimetrisches Gebilde als einfach

*) Die Aufgabe kann natürlich überschlagen werden. Der Beweis der Richtigkeit soll nur eine Scharfsinnsprobe für begabtere Schüler sein.

symmetrisch, wenn es durch eine und nur eine Gerade so in zwei Hälften zerlegt wird, daß die eine Hälfte durch Umklappung um diese Gerade mit der anderen Hälfte zur Deckung gebracht werden kann.

Jede Hälfte bezeichnet man als das Spiegelbild der anderen. Die Gerade heißt die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Gebildes, oder auch die spiegelnde Gerade, die als unbegrenzt zu denken ist. Jeder Punkt dieser Geraden ist sein eigenes Spiegelbild. Das Spiegelbild jedes anderen Punktes wird gefunden, indem man von ihm auf die Gerade ein Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Die spiegelnde Gerade ist ihr eigenes Spiegelbild. Jede Parallele zur spiegelnden Geraden wird eine Parallele entgegengesetzten Abstandes. Jede die spiegelnde Gerade schneidende Gerade wird eine sie in demselben Punkte unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneidende Gerade. Jedes Lot zur spiegelnden Geraden gibt seine eigene Verlängerung. Symmetrische Stücke von Geraden sind dabei gleich lang; symmetrische Winkel von beliebiger Lage sind entgegengesetzt gleich. Symmetrische Kreisbogen von beliebiger Lage decken einander. (Vgl. zu diesem Abschnitte das unter V im Vorkursus Gesagte.)

155) Sind mehrere Symmetrieachsen vorhanden, so spricht man von mehrfacher Symmetrie. Das gleichschenklige Dreieck ist ein Beispiel der einfachen Symmetrie; die Halbierende des Winkels an der Spitze ist die Symmetrieachse. Das Rechteck ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Mittellinien sind seine Symmetrieachsen. Auch der Rhombus ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Diagonalen sind seine Symmetrieachsen. Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen, die Halbierenden der Winkel. Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen, die Diagonalen und die Mittellinien. Das regelmäßige Fünfeck hat fünf Symmetrieachsen, die Winkelhalbierenden. Das regelmäßige Sechseck hat sechs Symmetrieachsen, die drei Hauptdiagonalen und die drei Mittellinien usw. Der Kreis hat unendlich viele Symmetrieachsen, nämlich sämtliche Durchmesser.

156) Beim Rechteck und Rhombus schneiden die Symmetrieachsen einander rechtwinklig in einem Punkte, den man als den Mittelpunkt der Figur bezeichnet. Beim Rechteck ist dieser Punkt der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, beim Rhombus ist er der des einbeschriebenen Kreises. Bei allen genannten regelmäßigen Vielecken schneiden einander die Symmetrieachsen in einem Punkte, dem Mittel-

punkte des Vielecks, der zugleich Mittelpunkt des um- und des einbeschriebenen Kreises ist. Dort folgen sie unter gleichen Winkeln aufeinander, beim gleichseitigen Dreieck bilden sie Winkel von $\frac{180^0}{3} = 60^0$, beim Quadrat solche von $\frac{180^0}{4} = 45^0$, beim Fünfeck solche von $\frac{180^0}{5} = 36^0$, beim Sechseck solche von $\frac{180^0}{6} = 30^0$ usw.

157) Diese Einfachheit erklärt sich folgendermaßen: Das Spiegelbild einer Symmetrieachse gegen eine Symmetrieachse ist wieder eine Symmetrieachse. Schneiden einander die beiden ersten im Endlichen, so muß die dritte durch denselben Punkt gehen. Spiegelt man die beiden ersten Symmetrieachsen gegen die dritte, so müssen die Spiegelbilder wieder durch denselben Punkt gehen usw. Daraus folgt: Bei mehrfacher Symmetrie gehen alle Symmetrieachsen durch denselben Punkt. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Gebildes.

158) Sollen nur zwei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen diese aufeinander senkrecht stehen, denn sonst würde durch die Spiegelung gegen die eine eine dritte Symmetrieachse entstehen usw. Sollen nur drei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen sie einander unter 60^0 schneiden, denn sonst würden durch Spiegelung gegen eine davon neue Symmetrieachsen entstehen. Das Entsprechende gilt von vier, fünf, sechs usw. Symmetrieachsen. Eine Symmetrieachse teilt die Ebene in zwei übereinstimmende Hälften, zwei geben vier übereinstimmende „Quadranten", drei geben sechs übereinstimmende Sextanten der Ebene, n Symmetrieachsen geben $2n$ Zentriwinkel von der Größe $\frac{360^0}{2n}$ oder $\frac{180^0}{n}$. Das regelmäßige n-Eck hat n Symmetrieebenen. Ist n eine gerade Zahl, so sind die Symmetrieebenen zur Hälfte Hauptdiagonalen, zur Hälfte winkelhalbierende Mittellinien. Ist n ungerade, so sind sämtliche Winkelhalbierenden Mittellinien. Eine eigentümliche Stellung nehmen die unbegrenzten Parallelen ein. Jedes gemeinschaftliche Lot ist für sie eine Symmetrieachse. Es sind also unendlich viele Symmetrieachsen vorhanden, die einander im Endlichen nicht schneiden. Der Streif zwischen zwei Parallelen hat außerdem noch eine vereinzelte parallele Symmetrieachse.

159) Von der Zeichnung eines kunstgewerblichen ebenen Musters (Flachornament) von mehrfacher Symmetrie braucht nur der einem solchen Zentriwinkel entsprechende Teil gegeben zu sein. Der Rest ist

leicht zu konstruieren, sei es Punkt für Punkt oder Linie für Linie. (Hat man statt des Flachornaments ein mehrfach symmetrisches Relief auf ebener Grundlage, so braucht man auch nur den entsprechenden Teil zu geben, jedoch sind benachbarte symmetrische Teile nicht mehr kongruent, sondern räumlich symmetrisch. Vgl. Vorkursus V, 112 und 113.)

Fig. 31.

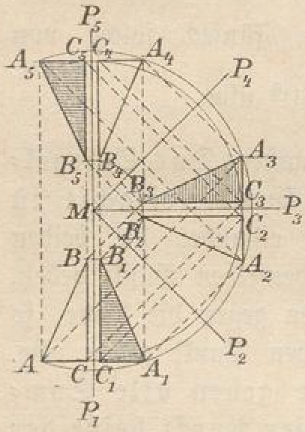
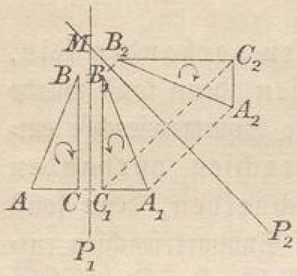


Fig. 32.



160) Die Umklappung eines mehrfach symmetrischen (planimetrischen) Gebildes gibt dessen Teilen entgegengesetzten Drehungssinn; die Umklappung des Bildes um die zweite Achse stellt den ursprünglichen Drehungssinn wieder her; die Umklappung des neuen Bildes um die dritte Achse gibt wieder den entgegengesetzten Drehungssinn usw. *Eine gerade Anzahl von Spiegelungen läßt den Drehungssinn ungeändert, eine ungerade Anzahl gibt den entgegengesetzten Drehungssinn.*

Fig. 31 und 32 veranschaulichen dies an einem mehrfach gespiegelten rechtwinkligen Dreieck. Die schraffierten Dreiecke sind nicht symmetrisch zu einander. Man könnte sie als *verkehrtsymmetrisch* bezeichnen.

β) Ableitung einfacher Sätze und Konstruktionen mit Hilfe der Symmetrie.

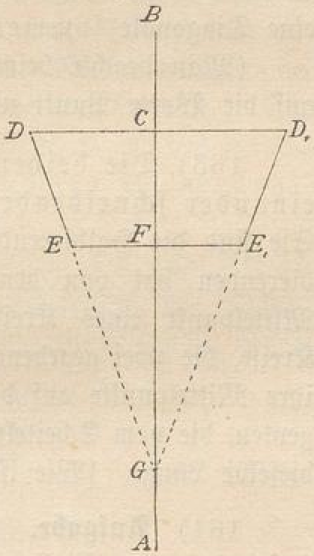
161) *Das Spiegelbild zweier Punkte.* In Fig. 33 sind zwei Punkte D und E gegen die Gerade AB gespiegelt, was D_1 und E_1 gegeben hat. Dadurch ist zugleich die Gerade DE gespiegelt und ihr Spiegelbild D_1E_1 entstanden. Schneidet nun DE die spiegelnde Gerade in einem im Endlichen liegenden Punkte G, so muß auch D_1E_1 durch den Punkt G gehen und AB unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneiden.

Man kann aber auch D und E_1 als die gespiegelten Punkte, D_1 und E als die Spiegelbilder betrachten. Demnach müssen auch DE_1 und D_1E einander auf der Geraden AB schneiden.

Zwei Geraden, die gegen eine dritte Gerade symmetrisch sind, bezeichnet man bisweilen als *antiparallel* in bezug auf die spiegelnde

Gerade. Deshalb wird das in bezug auf die Mittellinie CF symmetrische Viereck DEE_1D_1, von dem zwei Seiten DD_1 und EE_1 parallel sind, während die anderen DE und D_1E_1 antiparallel sind, als ein Antiparallelogramm bezeichnet. (Es heißt jedoch auch ein symmetrisches Paralleltrapez.)

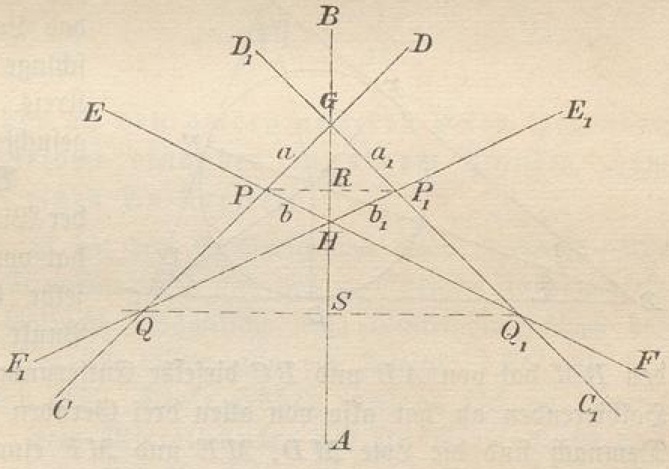
Fig. 33.



Die Diagonalen und die antiparallelen Gegenseiten eines solchen Vierecks schneiden also einander auf dessen Symmetrielinie. Die symmetrisch liegenden Geraden und Winkel stimmen überein.

162) Das Spiegelbild zweier unbegrenzter Geraden. In Fig. 34 sind zwei Geraden CD und EF gegen eine dritte Gerade AB gespiegelt, was die Bilder C_1D_1 und E_1F_1 gegeben hat, von denen das eine mit CD durch den Schnittpunkt G, das andere mit EF durch den Schnittpunkt H auf der Geraden AB gehen muß. Die Punkte P und P_1 sind ein symmetrisches Punktepaar. Betrachtet man aber CD und E_1F_1 als die gespiegelten Geraden, so folgt, daß auch die Punkte Q und Q_1 ein symmetrisches Punktepaar sind.

Fig. 34.



Das Viereck PHP_1G ist ein gegen die Diagonale GH symmetrisches. Es besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, welche die Grundlinie PP_1 gemein haben. Es wird als Deltoid bezeichnet. Zu diesem Viereck gehören sechs Verbindungslinien PP_1, GH, GP, GP_1, P_1H, PH. Die Gegenseiten geben drei Schnittpunkte Q, Q_1 und R. Ein Viereck mit seinen sämtlichen sechs Geraden bezeichnet man als ein vollständiges Viereck. Das hier vorliegende ist ein gegen eine Diagonale symmetrisches vollständiges Viereck.

Die Geraden a, b, a_1, b_1, bilden ein Vierseit mit sechs Schnittpunkten P, P_1, Q, Q_1, G, H. Das Vierseit mit seinen sechs Schnittpunkten besitzt also drei Diagonalen, PP_1, QQ_1, GH. Man nennt es ein vollständiges Vierseit. Hier handelt es sich um ein gegen eine Diagonale symmetrisches vollständiges Vierseit.

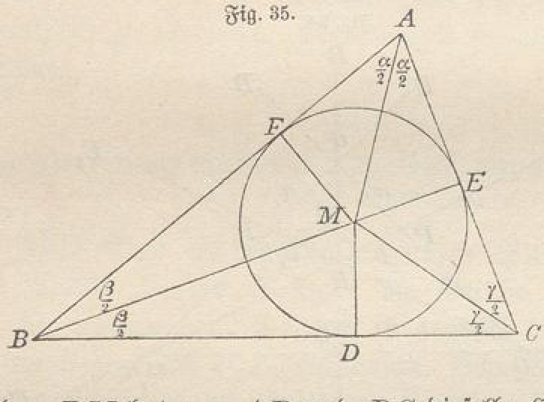
(Man beachte beim Viereck und Vierseit die Reziprozität in bezug auf die Worte Punkt und Gerade.)

163) Die beiden Symmetrielinien zweier unbegrenzten einander schneidenden Geraden stehen aufeinander senkrecht. Sie sind die Halbierenden der vier Winkel. Jeder Punkt jeder Halbierenden hat von den beiden Geraden denselben Abstand, ist also Mittelpunkt eines Kreises, der die beiden Geraden berührt. Alle Kreise, die zwei gegebene einander schneidende Geraden berühren, haben ihre Mittelpunkte auf den beiden Symmetrieachsen. Die beiden Tangenten, die vom Scheitelpunkte an jeden dieser Kreise gezogen sind, haben dieselbe Länge. [Wie ist es, wenn die beiden Geraden parallel sind?]

164) **Aufgabe.** In ein gegebenes Dreieck den einbeschriebenen Kreis (In-Kreis) einzuzeichnen (der die drei Seiten berührt).

Auflösung. In Fig. 35 sei ABC das gegebene Dreieck. Man halbiere die Winkel bei A und B. Die Halbierenden geben den Schnittpunkt M. Von M aus fälle man auf BC das Lot MD. Mit MD schlage man um M einen Kreis. Dieser Kreis ist der gesuchte Berührungskreis.

Fig. 35.



Beweis. Jeder Punkt der Winkehalbierenden AM hat von AB und AC dieselbe Entfernung. Jeder Punkt der Winkelhalbierenden BM hat von AB und BC dieselbe Entfernung. M gehört beiden Halbierenden an, hat also von allen drei Geraden dieselbe Entfernung. Demnach sind die Lote MD, ME und MF einander gleich.

Folgerung. Weil die Abstände MD und ME einander gleich sind, muß M auch auf der Halbierenden des Winkels C liegen. Also ist auch MC eine Winkelhalbierende. Folglich:

Die Halbierenden der Dreieckswinkel schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des In-Kreises.

165) **Aufgabe.** An ein gegebenes Dreieck ABC einen Kreis zu legen, der die Seite BC von außen her, die beiden anderen Seiten von innen her berührt.

Auflösung. In Fig. 36 halbiere man den Winkel bei A und den Außenwinkel CBF. Das gibt, wie vorher, einen Schnittpunkt M_1 als Mittelpunkt eines Kreises, der sowohl die Verlängerungen der Dreiecksseiten AB und AC, als auch die Seite BC berührt. Das von M_1 auf eine der Seiten gefällte Lot, z. B. M_1D, ist der Radius des nun leicht zu zeichnenden Kreises, eines äußeren Berührungskreises oder An-Kreises.

Folgerung. Weil der Kreis M_1 die Seiten AB und BC berührt, muß der Punkt M_1 auch auf der Halbierenden des Außenwinkels BCE liegen. Folglich: Die Halbierenden eines Drei-

Fig. 36.

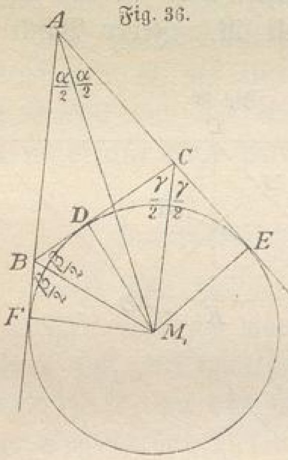
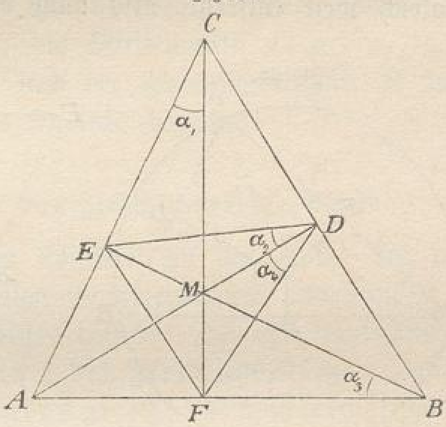


Fig. 37.



eckswinkels und der an den beiden anderen Ecken liegenden Außenwinkel schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des einen An-Kreises.

166) Das Dreieck hat drei An-Kreise und einen In-Kreis. Die Halbierenden jedes Dreieckswinkels und des zugehörigen Außenwinkels stehen aufeinander senkrecht. Sämtliche sechs Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF in Fig. 37 bilden also ein Dreieck ABC mit den Höhen AD, BE und CF. Diese Höhen müssen sich in **einem** Punkte schneiden, dem Mittelpunkte des In-Kreises für das Höhenfußpunktdreieck DEF, während A, B und C die Mittelpunkte der An-Kreise dieses Dreiecks sind.

Dieser Satz kommt später noch einmal zur Sprache.

167) Das Mittellot einer Geraden AB ist eine ihrer Symmetrielinien. (Als zweite kann man die Gerade selbst be-

trachten.) Jeder Punkt der Mittelsenkrechten ist von den Endpunkten A und B der Geraden gleich weit entfernt. Er ist also Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte A und B geht. Folglich:

Alle Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, haben ihre Mittelpunkte auf der zugehörigen Mittelsenkrechten.

168) **Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geht, die nicht auf einer Geraden liegen.

Auflösung. In Fig. 38 seien A, B und C die drei gegebenen Punkte. Man bilde die Mittelsenkrechte zu AB und die Mittelsenkrechte zu BC, diese schneiden einander in einem Punkte M, der von den drei Eckpunkten gleiche Entfernungen hat und daher Mittelpunkt des nun leicht zu zeichnenden Kreises ist.

Beweis. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten FM ist von A und B gleich weit entfernt, also auch der Punkt M. Jeder Punkt der

Fig. 38.

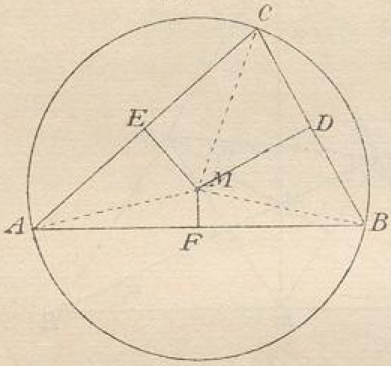
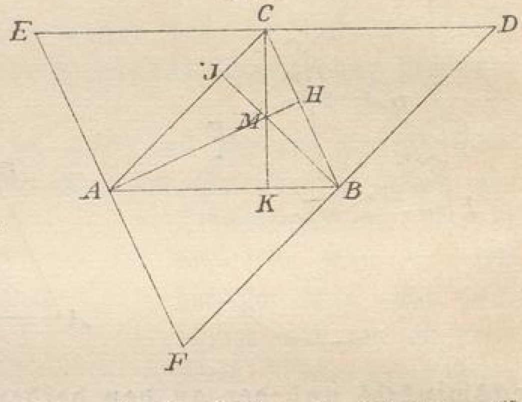


Fig. 39.



Mittelsenkrechten DM ist von B und C gleich weit entfernt, also auch M. Folglich ist M von A, B und C gleich weit entfernt. — Die Aufgabe ist nur auf eine Art lösbar. Haben zwei Kreise drei Punkte gemein, so fallen sie vollständig zusammen.

Folgerung. Weil M von A und C gleich weit entfernt ist, muß M auch auf der Mittelsenkrechten von AC liegen. Also:

Die Mittellote der Seiten eines Dreiecks schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Dieser Kreis soll kurz als der Um-Kreis des Dreiecks bezeichnet werden.

169) Denkt man sich auf den Höhen des Dreiecks ABC (Fig. 39) in den Eckpunkten Lote errichtet, so geben diese ein Dreieck DEF, dessen Seiten den Seiten von ABC parallel sind. (Warum?)

Dabei sind also $ABCE$ und $ACBF$ Parallelogramme, sodaß $CB = EA = AF$ ist. Demnach ist das Lot AH die Mittelsenkrechte von EF. Ebenso zeigt sich, daß BJ die Mittelsenkrechte von FD und CK die Mittelsenkrechte von DE ist. Diese Mittelsenkrechten müssen sich aber in einem Punkte schneiden. Demnach schneiden einander die Höhen des Dreiecks DEF und überhaupt jedes Dreiecks in **einem** Punkte. Der bereits ausgesprochene Satz über die Dreieckshöhen ist damit bestätigt. — Der Höhenschnittpunkt M hat also noch zweierlei Bedeutung. Er ist Mittelpunkt des Um-Kreises vom Dreieck DEF und zugleich Mittelpunkt des In-Kreises vom Dreieck HJK.

Bildet man jedoch ein stumpfwinkliges Dreieck ABC und dazu die Figur, so fällt M außerhalb der Dreiecke ABC, DEF und HJK und ist nicht In-Kreis, sondern An-Kreis des letzteren.

Der Durchschnittspunkt S der Mittellinien des Dreiecks, der Mittelpunkt M des Um-Kreises, die Mittelpunkte μ, μ_1, μ_2, μ_3 des In-Kreises und der An-Kreise und der Höhenschnittpunkt H werden als merkwürdige Punkte des Dreiecks bezeichnet

γ) Symmetrisches über das gleichschenklige Dreieck.

170) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks war als dessen Symmetrielinie nachgewiesen, sodaß es aus zwei kongruenten Hälften besteht. Zunächst folgte der Satz: Die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks (die Basiswinkel) sind einander gleich; oder: Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

171) Umgekehrt folgt: Sind zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Oder: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. (Sind nämlich die Winkel bei A und B einander gleich, so sind sie symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte, müssen also einander in demselben Punkte C der Mittelsenkrechten schneiden, sodaß auch $AC = BC$ ist.)

172) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks halbiert die Grundlinie und steht auf dieser senkrecht; die Mittelsenkrechte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze und halbiert den dortigen Winkel. Die Verbindungslinie der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie steht auf dieser senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

Alle diese Sätze sind nur Ausdrucksweisen dafür, daß das gleichschenklige Dreieck aus zwei kongruenten Teilen besteht.

Jedes Lot auf der Symmetrielinie des gleichschenkligen Dreiecks schneidet von den Schenkeln gleiche Stücke ab, von der Fläche ein Antiparallelogramm. Legt man an eine Gerade AB in A und B nach derselben Seite gleiche Winkel so an, daß die Schenkel einander in einem Punkte C schneiden, gibt man den Schenkeln dieselbe Länge $AD = BE$ und verbindet man A mit E und B mit D, so geben die Verbindungslinien gleichschenklige Dreiecke ABF und DEF. Warum?

173) Der Mittelpunkt des Um-Kreises, des In-Kreises, des An-Kreises für die Grundlinie, der Höhendurchschnitt, der Durchschnitt der Mittellinien liegen beim gleichschenkligen Dreieck auf dessen Symmetrielinie. Die Mittelpunkte der beiden anderen An-Kreise sind symmetrisch gegen die Symmetrielinie. Ihre Verbindungslinie geht durch die Spitze des Dreiecks.

174) Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht stets durch die Mitte des Kreises. Daraus folgt wieder der Satz: Das durch zwei Punkte gehende Büschel von Kreisen hat die Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten. Man konstruiere die betreffenden Linien und einige der Kreise. (Vgl. Nr. 167.)

175) Stehen, wie in Fig. 34, zwei ungleiche gleichschenklige Dreiecke über derselben Grundlinie, so haben sie eine gemeinschaftliche Symmetrielinie, denn die Symmetrielinien beider fallen mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen. Dabei können die beiden gleichschenkligen Dreiecke ihre Spitze auf verschiedenen Seiten der Grundlinie oder auf derselben Seite haben. Stimmen dagegen die beiden gleichschenkligen Dreiecke überein, so hat das Gebilde zwei Symmetrieachsen und ist eine Raute (oder Rhombus).

176) **Aufgaben.** Die mehrfache Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks, des Quadrates, des regelmäßigen Fünfecks, des regelmäßigen Sechsecks usw. eingehender zu untersuchen.

(Es soll z. B. untersucht werden, ob parallele Seiten vorhanden sind, ob Diagonalen vorhanden sind, die zu einer Seite parallel sind, wie sich beliebige Diagonalen paarweise verhalten, ob sich kongruente Flächenteile vorfinden. Die Zerlegung jedes regelmäßigen Vielecks in gleichschenklige Dreiecke, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammenfallen, ist gleichfalls zu untersuchen. Die Winkel dieser Dreiecke sind zu bestimmen. Die ein- und umbeschriebenen Kreise sind zu untersuchen, besonders hinsichtlich ihrer Sektoren, Segmente und Bogen.

δ) Symmetrisches über Kreise.*)

177) Daß jeder Kreis in bezug auf jeden Durchmesser symmetrisch ist, war schon gezeigt. Zwei oder mehrere konzentrische Kreise haben jeden gemeinschaftlichen Durchmesser zur Symmetrielinie.

178) Errichtet man auf dem Durchmesser eines Kreises einen zweiten rechtwinklig schneidenden Durchmesser, so hat das Gesamtgebilde vier Symmetrieachsen, die den Kreis in gleiche Oktanten zerlegen. Errichtet man auf dem Durchmesser an beliebiger anderer Stelle ein unbegrenztes Lot, so ist das Gesamtgebilde nur gegen den Durchmesser symmetrisch. (Man unterscheide die Fälle, daß das Lot außerhalb des Kreises liegt, daß es den Kreis nur in einem Punkte trifft, daß es innerhalb des Kreises liegt. Man zeige, daß es im letzteren Falle zwei Schnittpunkte mit dem Kreise haben muß und nicht mehr haben kann. Die Folgen der Symmetrie sind anzugeben.)

179) Hat ein Kreis zwei einander schneidende unbegrenzte Tangenten, so ist nur die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Mittelpunkte Symmetrielinie des Gesamtgebildes. Was folgt daraus für gewisse Stücke der Tangenten, für gewisse Winkel, für gewisse Kreisbogen, für gewisse Flächenstücke? Verbindet man die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreismittelpunkte, was folgt dann weiter hinsichtlich der Symmetrie?

Sind aber die beiden Tangenten parallel, so gibt es für das Gesamtgebilde zwei aufeinander senkrechte Symmetrielinien.

180) Zwei nicht konzentrische ungleiche Kreise haben nur eine Symmetrielinie, die Zentrale, d. h. die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte. Folgende Fälle sind möglich: Die Kreise liegen ganz auseinander; sie berühren einander äußerlich; sie schneiden einander. (Dies geschieht dann in zwei symmetrischen Punkten, aber nicht in mehr Punkten; denn Kreise, die in mehr als zwei Punkten übereinstimmen, stimmen vollständig überein); sie berühren einander innerlich, wobei der größere den kleineren umschließt; der kleinere wird vom größeren ganz umschlossen, ohne daß sie einen gemeinschaftlichen Punkt haben. [$c > (r + r_1)$; $c = (r + r_1)$; $(r + r_1) > c > (r - r_1)$; $c = (r - r_1)$; $c < (r - r_1)$; $c = 0$ gibt konzentrische Kreise.]

Im Falle des Schneidens haben die Kreise eine gemeinschaftliche Sehne. Welche Symmetrieverhältnisse finden dabei hinsichtlich gewisser Längen, Winkel, Kreisbogen, Flächen statt?

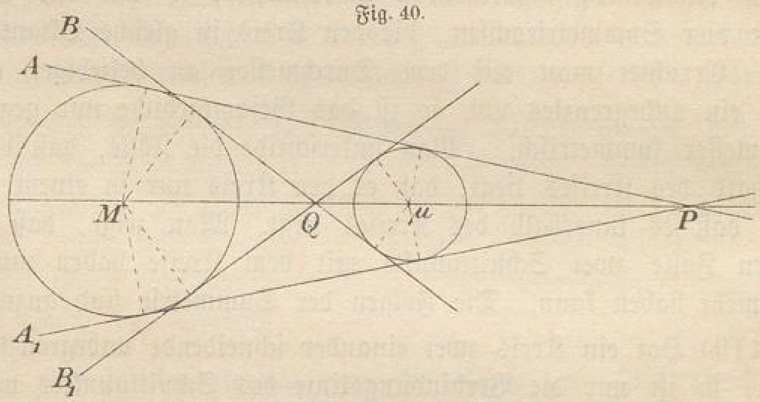
---

*) Dieser Abschnitt gibt Veranlassung zu zahlreichen Beispielen für das technische Zirkelzeichnen.

181) Im Falle des Auseinanderliegens haben die beiden Kreise vier gemeinschaftliche Tangenten. Aus Gründen der Symmetrie schneiden sich diese paarweise in Punkten P und Q der Symmetrieachse (der Zentrale).

AP und A_1P nennt man die äußeren gemeinschaftlichen Tangenten, BQ und B_1Q die inneren. (Fig. 40.)

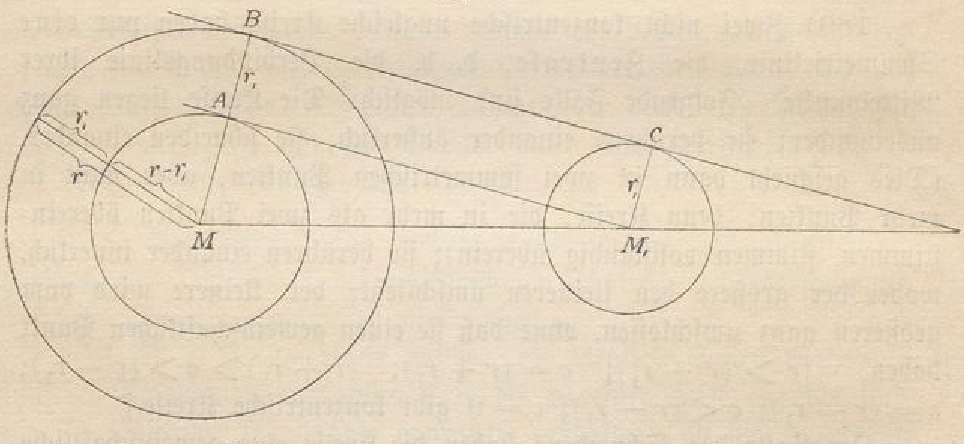
Fig. 40.



Was folgt für die Punkte der Figur, für die einzelnen Tangentenstücke, für die Winkel, Bogen, Flächenstücke der Figur; für die Radien der Berührungspunkte usw.?

Im Falle der äußerlichen Berührung beschränkt sich die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten auf drei; im Falle des Schneidens

Fig. 40 b.



auf zwei; im Falle der inneren Berührung auf eine; im Falle der vollständigen Umschließung des kleineren durch den größeren (ohne Berührung) gibt es keine Tangente.

[Will man die gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise konstruieren, so verfahre man vorläufig folgendermaßen: In Fig. 40b seien die Kreise M und M_1 mit den Radien r und r_1 gegeben. Man schlage um M, den Mittelpunkt des größeren Kreises, einen Hilfskreis mit dem Radius $(r - r_1)$, lege an diesen von M_1 aus eine Tangente, die in A berühre, ziehe MA bis zum Schnittpunkte B und errichte auf MB in B ein Lot. Dieses gibt die Tangente BC. Die gegen MM_1 dazu symmetrische Linie ist leicht zu zeichnen. —

Der Beweis der Richtigkeit ergibt sich aus dem Rechteck $ABCM_1$ und ist dem Schüler zu überlassen.

Für die gemeinsamen inneren Tangenten zweier auseinander liegenden Kreise benutze man einen Hilfskreis mit dem Radius $(r + r_1)$.]

182) Sind zwei nicht konzentrische Kreise gleich groß, so hat das Gesamtgebilde stets zwei Symmetrieachsen. Die zweifache Symmetrie soll für die verschiedenen Lagen untersucht werden.

183) Haben drei oder mehr ungleiche Kreise ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, so ist diese die einzige Symmetrieachse. Gehen drei oder mehr ungleiche Kreise durch zwei Punkte, so liegen alle Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte, die demnach die einzige Symmetrielinie ist. Gehen drei oder mehr ungleiche Kreise durch einen Punkt, und liegen dabei ihre Mittelpunkte auf einer durch diesen Punkt gehenden Geraden, so ist diese Symmetrielinie des Gesamtgebildes, alle Kreise berühren einander in den gegebenen Punkten und haben dort eine gemeinschaftliche Tangente.

184) **Aufgabe.** Die Kreisreihe zu konstruieren, die innerhalb eines (z. B. spitzen) Winkels liegt und dessen Schenkel berührt, wobei aber jeder Kreis die beiden benachbarten Kreise äußerlich berühren soll.

(Man gehe von einem beliebigen Lote auf der Winkelhalbierenden aus, welches ein gleichschenkliges Dreieck gibt, dessen In-Kreis und dessen An-Kreis leicht zu zeichnen sind. Dann errichte man Lote in den neuen Schnittpunkten der Winkelhalbierenden, was neue gleichschenklige Dreiecke gibt, für die nun entweder In-Kreise oder Außenkreise zu zeichnen sind. Statt die neuen Winkel stets zu halbieren, ziehe man gewisse Parallelen mit Hilfe des Lineals und Winkelhakens, errichte auch die Lote mit deren Hilfe.)

Sind die beiden Berührungsgeraden parallel, so werden alle Kreise gleich, und die Aufgabe vereinfacht sich.

185) **Aufgabe.** Um einen gegebenen Kreis lassen sich Berührungskreise, die mit ihm denselben Radius haben, so legen, daß jeder seine beiden Nachbarn berührt. Wie groß ist ihre Anzahl, und

konstruiert man diese Kreise? Die Symmetrieverhältnisse des Gesamtgebildes sollen untersucht werden.

(Sowohl die Mittelpunkte als auch die gegenseitigen Berührungspunkte der Kreisreihe liegen auf gewissen Kreisen, auch hat die Reihe einen umbeschriebenen Kreis.)

186a) **Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, um den drei, vier, acht, zwölf, sechzehn solcher Berührungskreise von gegebenem Radius gelegt sind, wobei die Reihe jedesmal geschlossen sein soll.

186b) Um einen gegebenen Kreis drei, vier, acht, zwölf, sechzehn solcher Berührungskreise zu zeichnen, wobei die Reihe jedesmal geschlossen sein soll.

(Im ersteren Falle zeichne man zwei Durchmesser, die einander unter 60^0 schneiden. Im Schnittpunkte des ersten Durchmessers mit dem Kreise zeichne man eine Tangente. Man halbiere den Winkel von 150^0, den die Tangente mit dem zweiten Durchmesser bildet. Wo die Winkelhalbierende den ersten Durchmesser schneidet, liegt das Zentrum des gesuchten Kreises. Mit den übrigen Fällen verfahre man in entsprechender Weise.)

187) **Aufgabe.** Einen Kreis in sechs gleiche Sektoren einzuteilen und in jeden Sektor einen Berührungskreis zu zeichnen.

(Man bilde die Symmetrielinie eines der Sektoren, errichte auf ihr im Schnittpunkte mit dem Kreise ein Lot und zeichne den In-Kreis des entstehenden (gleichseitigen) Dreiecks.)

188) **Aufgabe.** Um einen Punkt eines gegebenen Kreises mit dem Radius einen Kreisbogen zu schlagen, der ganz innerhalb des Kreises liegt und zwei Teilpunkte der Kreislinie gibt. Mit den beiden Teilpunkten soll dasselbe geschehen und die Konstruktion so oft wiederholt werden, bis das Ganze schließt.

Das Gesamtgebilde soll beschrieben werden.*)

189) **Aufgabe.** In die Bogendreiecke, welche vom gegebenen Kreise und je zwei aufeinander folgenden der vorher konstruierten Kreisbogen gebildet sind, Berührungskreise einzuzeichnen.*)

---

*) Zahlreiche Beispiele mehrfach symmetrischer Figuren findet man in den Lehrbüchern für gebundenes Zeichnen. Auf gotische Maßwerke, besonders auf Rosetten, sei aufmerksam gemacht, weil sie vortreffliche Zeichenübungen geben und das Verständnis für die gotische Baukunst vermitteln. Man vgl. G. Müller: Übungsstoff für das geometrische Zeichnen (Stuttgart bei P. Neff); Weishaupt-Richter: Das Ganze des Linearzeichnens; Bd. I (Leipzig bei H. Zieger).

(Das Lot, welches auf dem Symmetrieradius eines Bogendreiecks im Endpunkte errichtet ist, berührt die beiden vollendeten Kreisbogen des Dreiecks. Diese Tangente ist bereits halbiert. Man zeichne über der einen Hälfte einen Halbkreis. Dieser gibt auf dem einen Grenzbogen den Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreise, denn die drei betreffenden Tangenten müssen gleich lang sein.)

II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.

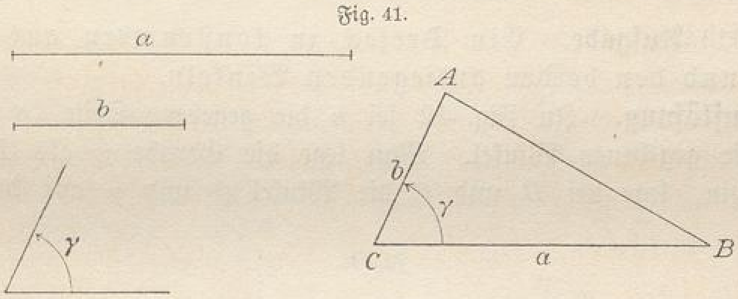
a) Die Lehre von der Kongruenz.

α) Die grundlegenden Kongruenzsätze für das Dreieck.

190) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Auflösung. In Fig. 41 seien a, b und $\sphericalangle \gamma$ die gegebenen Stücke. Man lege die Gerade a als CB beliebig hin, trage bei C

Fig. 41.



an sie den Winkel γ an, mache den neuen Schenkel $CA = b$ und verbinde A mit B. Dann ist Dreieck ABC das gesuchte, denn es enthält die gegebenen Stücke.

Bemerkungen. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald nur γ ein konkaver Winkel ist, was vorausgesetzt werden soll. (Ist der $\sphericalangle \gamma = 0$, so fällt Seite b auf a. Ist $\sphericalangle \gamma = 180^0$, so fällt b in die zu a entgegengesetzte Richtung. Im ersteren Grenzfalle wird Seite $c = a - b$, falls a die größere ist, im zweiten wird $c = a + b$. In beiden Fällen wird die Dreiecksfläche gleich Null; im allgemeinen wird die Fläche verschieden von Null.)

Die Aufgabe führt stets zu einer einzigen Lösung. So oft man ein Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruiert, sei es im einen oder im entgegengesetzten Sinne (Umklappung), stets erhält man Dreiecke, die sich mit dem zuerst konstruierten decken.