Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

A. Planimetrische Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

Erste Abteilung.
Planimetrie.

A. Planimetrische Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

I. Übersichtliche Zusammenstellung und Ergänzung der planimetrischen Ergebnisse des Vorkursus.

a) Einige Vorbegriffe und ihre Erklärungen.

α) Die Mathematik und ihre Teile.*)

1) Die Mathematik ist die Lehre von den Größen. Sie zerfällt in die reine und die angewandte Mathematik. (Vgl. Vorkursus I.)**)

α_1) Die reine Mathematik ist die Lehre von den Raum- und den Zahlengrößen.
Die Geometrie oder Raumlehre ist die Lehre von den Raumgrößen.
Die Arithmetik oder Zahlenkunde ist die Lehre von den Zahlengrößen.

α_2) Die angewandte Mathematik ist die Lehre von allen anderen meßbaren Größen.
(Hierher gehören z. B. die Zeitgrößen und die Geschwindigkeiten, die mechanischen Größen wie Kräfte, Gewichte, Massen, Druckspannungen, Zugspannungen, Arbeiten, Maschinenleistungen, physikalische Größen aller Art, wie Lichtstärke, Wärme, magnetische und elektrische Kräfte usw.)

---

*) Um an die griechischen Buchstaben zu gewöhnen, hat Verfasser solche zur Zählung der Abschnitte benutzt. Das griechische Alphabet befindet sich am Schlusse dieses Bandes.

**) Es wird angenommen, daß der Vorkursus sich in der Hand des Lehrers befinde. Dort sind ausführlichere Erläuterungen gegeben. Hier soll mehrfach auf diese hingewiesen werden und zwar unter Angabe der Nummern der dortigen Paragraphen.

β) Der mathematische Raum und die geometrischen Gebilde.

2) Der **Weltraum** ist das Gebiet, in dem sich alle wirklichen oder physischen Körper befinden, und in dem alle möglichen Bewegungen (Ortsveränderungen) stattfinden. Er enthält z. B. die gesamte uns bekannt gewordene Fixsternwelt und erstreckt sich nach menschlicher Auffassung über diese hinaus nach jeder Richtung hin ins Unendliche (Endlose, Unbegrenzte, Unmeßbare). Wie sich der Weltraum außerhalb der Fixsternwelt verhält, ist uns vollständig unbekannt, sodaß man sogar seine Unendlichkeit nicht nachweisen, sondern nur vermuten oder voraussetzen kann. Deshalb denke man sich statt des wirklichen Weltraums einen **mathematischen Raum**, dem bestimmte Eigenschaften zuzuschreiben sind, die sich auch auf das unendlich ferne Gebiet beziehen sollen. (Vorkursus § 1.)

3) Der **mathematische Raum**, den wir uns denken wollen, soll folgende Eigenschaften haben: Er erstreckt sich nach allen Richtungen hin ununterbrochen ins Unendliche. Er ist in jeder Hinsicht unverändert und befindet sich z. B. im Zustande vollkommener Ruhe (Unbeweglichkeit).*) Er ist in allen Teilen gleichartig und vollkommen stoffleer, besitzt also keine physikalisch-chemischen Eigenschaften.**) Er ist lediglich als ausgedehnt und als in Teile zerlegbar zu denken. Unter den unendlich zahlreichen Richtungen pflegt man im Hinblick auf die Stellung des Beobachters drei Hauptrichtungen auszuwählen, z. B. von vorn nach hinten, von rechts nach links, von unten nach oben. Allgemeiner spricht man von **drei Dimensionen** (Ausdehnungen) des mathematischen Raumes***), worüber erst später eingehend berichtet werden soll. (Gewöhnlich bezeichnet man diese Dimen-

---

*) Die Alten hielten die Erde für unbewegt und meinten, um diese drehe sich das gesamte Weltall. Später hielt man die Sonne für das in Ruhe befindliche Zentrum des Weltalls. Bald mußte man auch diese als im Weltraume sich bewegend annehmen. So wurde man zur Annahme eines ruhenden Weltraumes genötigt. Dem entspricht die Annahme eines in Ruhe befindlichen mathematischen Raumes.

**) Gewisse Unregelmäßigkeiten, die man im wirklichen Raume wahrnimmt, haben ihren Grund in seiner unregelmäßigen Stofferfüllung. Ein schräg ins Wasser getauchter geradliniger Stab z. B. erscheint als gebrochen. Solche Unregelmäßigkeiten sind im mathematischen Raume ausgeschlossen.

***) Auf die Untersuchung mathematischer Räume von mehr als drei Dimensionen kann die Schule nicht eingehen. Der hier zu besprechende Raum wird als der **Euklidsche Raum** bezeichnet. Euklid, der um 300 v. Chr. gelebt und nach **Pappus** in Alexandria gewirkt hat, stellte die Elemente der Mathematik in mustergültiger Weise zusammen.

sionen als Länge, Breite und Höhe.) Nur von diesem mathematischen Raume soll von jetzt ab die Rede sein.

4) Ein **mathematischer** Körper ist ein Teil des Raumes, der vollständig gegen den übrigen Raum abgegrenzt ist. Diese Abgrenzung geschieht durch Gebilde, die man als **Flächen** bezeichnet. (Diese bedürfen noch der näheren Erläuterung.) Von der Art der Begrenzung hängt die besondere **Gestalt** (Form) des Körpers ab. Die Größe des Raumes, den ein Körper einnimmt, bezeichnet man als seinen **Rauminhalt** oder kürzer als seinen **Inhalt.** Jeder mathematische Körper ist teilbar durch Flächen. Er wird als im Raum bewegbar angenommen. Nur von mathematischen Körpern soll von jetzt ab gesprochen werden. (Über die Unterschiede zwischen wirklichen und mathematischen Körpern vgl. Vorkursus §§ 2, 7, 8.)

[**Bemerkungen.** Ein Körper kann sich ganz im Endlichen (im meßbaren Gebiete) befinden, er kann sich aber auch vom Endlichen aus bis ins Unendliche (Unmeßbare) erstrecken. Hier soll zunächst nur von endlichen Körpern die Rede sein. Diese haben eine bestimmt vorstellbare Gestalt und einen endlichen Inhalt.

Reicht der Körper bis ins Unendliche, so kann zwar seine Gestalt auch dort eine bestimmt vorgeschriebene sein, aber von eigentlicher Vorstellbarkeit kann dann nicht mehr gesprochen werden, auch wird der Inhalt im allgemeinen unbestimmbar, weil er im allgemeinen unendlich groß wird. (Trotzdem gibt es mathematische Körper, die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen genau bestimmbaren Inhalt haben.)*) Die Begrenzung eines ganz im Endlichen liegenden

*) Diese Behauptung erscheint auf den ersten Blick unwahrscheinlich. Lediglich zu dem Zwecke, vor übereilten Aussprüchen über das Unendliche zu warnen, soll ein einfaches Beispiel angegeben werden.

Man denke sich eine senkrecht stehende Säule von quadratischer Grundfläche. Die letztere fasse 1 qm, die Säule habe die Höhe von 2 m, also den Inhalt 2 cbm. Man denke sich die Säule durch horizontale Schnitte in Schichten zerlegt, die von unten her der Reihe nach die Höhen 1 m, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{8}$ m, $\frac{1}{16}$ m usw. haben, sodaß jedesmal die noch vorhandene Resthöhe halbiert wird. Man kann sich denken, daß diese Resthalbierung unendlich oft vorgenommen wird, sodaß die Restschicht schließlich unendlich dünn wird und ihre Höhe allmählich immer näher an Null heranrückt. Die einzelnen Schichten haben dann der Reihe nach die Inhalte 1 cbm, $\frac{1}{2}$ cbm; $\frac{1}{4}$ cbm, $\frac{1}{8}$ cbm, $\frac{1}{16}$ cbm usw. Die Summe der Inhalte ist also $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$ cbm

Körpers bezeichnet man als seine Oberfläche. Diese ist zugleich die Grenzfläche seines Außenraumes. Ein Körper kann auch mehrere Oberflächen haben.*)

5) Eine mathematische Fläche ist zunächst ein Gebilde, welches als Grenze eines Körpers auftritt und demnach benachbarte Räume voneinander trennt. Sie selbst ist nicht ein Teil eines Raumes, sondern die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarter Raumteile. Ihr räumlicher Inhalt ist gleich Null, weil sie keine Dicke besitzt. Ist die Fläche begrenzt, so sind ihre Grenzen Gebilde, die man Linien nennt und die noch der näheren Erläuterung bedürfen. Die Fläche ist teilbar durch Linien. Die Fläche hat, auch wenn sie unbegrenzt ist, eine bestimmte Gestalt; ist sie begrenzt, so ist die Gestalt auch von der Art der Begrenzung abhängig. Die Größe einer Fläche bezeichnet man als den Flächeninhalt. Die Flächen werden als im Raume bewegbar angenommen. (Vgl. Vorkursus § 3.)

---

und dies muß gleich dem ursprünglichen Inhalte 2 cbm sein. (Daher sagt man, die Summe der bis ins Unendliche fortzusetzenden Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ sei gleich 2.)

Jetzt denke man sich die einzelnen Teile der Säule statt übereinander dicht nebeneinander gelegt, sodaß sie einen geradlinigen Streifen von der Breite 1 m bedecken, von dem jeder Teil 1 qm Grundfläche beansprucht. Dann muß dieser Streifen bis ins Unendliche reichen, denn es sind unzählige Körperteile vorhanden, die unendlich viele Quadratmeter bedecken.

Betrachtet man jetzt das Ganze als einen einzigen Körper, so reicht dieser bis ins Unendliche und hat doch nur 2 cbm Inhalt. —

In derselben Weise kann man mit einer solchen Säule von $1\frac{1}{2}$ m Höhe verfahren, von der man erst eine Schicht von 1 m Höhe abschneidet, dann eine solche von $\frac{2}{3}$ der Resthöhe, nämlich $\frac{1}{3}$ m, dann wieder eine solche von $\frac{2}{3}$ der Resthöhe usw. Dabei erhält man in derselben Weise die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{3}{2}$. Mit den Körperteilen kann jetzt ebenso verfahren werden, wie vorher. Der neue Körper erstreckt sich dann wieder ins Unendliche und hat doch nur den Inhalt $\frac{3}{2}$ cbm.

An solchen Beispielen erkennt man, daß es in vielen Fällen falsch ist, von der Erstreckung eines Körpers ins Unendliche darauf zu schließen, daß sein Inhalt unendlich groß sei.

*) Als Beispiel sei die Hohlkugel genannt, die eine äußere und eine innere Oberfläche hat.

[**Bemerkungen.** Eine Fläche kann ganz im Endlichen liegen und muß dabei nicht notwendig durch Linien begrenzt sein, denn sie kann vollständig in sich zurücklaufen.*) Eine Fläche kann teilweise in sich zurücklaufen, teilweise sich ins Unendliche erstrecken**). Eine Fläche kann ins Unendliche reichen, ohne im Endlichen irgendwie in sich zurückzulaufen oder irgendwie begrenzt zu sein.***) Flächen, die bis ins Unendliche reichen, haben im allgemeinen einen unendlich großen Flächeninhalt. (Trotzdem gibt es Flächen, die bis ins Unendliche reichen und doch einen endlichen, genau bestimmbaren Flächeninhalt haben.†) Eine ganz im Endlichen befindliche Fläche hat im allgemeinen einen endlichen Flächeninhalt. (Trotzdem gibt es Flächen solcher Art, deren Inhalt unendlich groß ist).††)

Die Begrenzung einer im Endlichen liegenden Fläche nennt man ihre Umrandung oder ihren Umfang. Eine Fläche kann auch mehrere Umrandungen haben. Als Beispiel diene die Fläche zwischen zwei Kreisen derselben Ebene, von denen der eine den andern umschließt, ohne ihn zu berühren.

6) Eine Linie ist zunächst ein Gebilde, welches eine Fläche begrenzt oder benachbarte Flächenteile voneinander trennt. Sie selbst ist nicht ein Teil einer Fläche, sondern die gemeinschaftliche Grenze zweier benachbarter Flächenteile. Ihr Flächeninhalt ist gleich Null, weil sie keine Breite hat. Ist die Linie begrenzt, so sind die Grenzen Gebilde, die man als Punkte bezeichnet und die noch der

---

*) Das einfachste Beispiel ist die Kugelfläche. Diese ist unbegrenzt und liegt doch ganz im Endlichen, sobald nur der Radius endlich ist. Die Kugelfläche hat dabei eine bestimmte Gestalt. Man kann aus dieser Fläche Teile ausschneiden, deren Gestalt nun auch durch die Grenzlinien bestimmt ist.

**) Beispiele sind die Mantelflächen des Kreiszylinders und des Kreiskegels, die sich bis ins Unendliche erstrecken können.

***) Ein Beispiel ist die Ebene.

†) Als Beispiel diene eine der beiden bis ins Unendliche reichenden senkrechten Grenzflächen des in der Randbemerkung zu 4) besprochenen ersten Körpers. Die Teile dieser Fläche haben zusammengenommen den Flächeninhalt $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right) \text{qm} = 2 \text{ qm}$.

††) Man kann sich auf einem endlichen Zeichenblatt eine Linie denken, die aus unendlich vielen Kreuz- und Querzügen oder Windungen besteht, sodaß ihre Länge unendlich groß ist. Denkt man sich über dieser Linie einen „Zylindermantel“ von nur 1 cm Höhe errichtet, so ist dessen Flächeninhalt unendlich groß, obwohl er ganz im Endlichen liegt. Auch dieses Beispiel soll nur vor übereilten Aussagen über das Unendliche warnen.

näheren Erläuterung bedürfen. Jede Linie ist durch Punkte teilbar. Sie hat eine bestimmte Gestalt (Form). Die Größe einer Linie bezeichnet man als ihre Länge. Die Linien werden als im Raume bewegbar angenommen. (Vgl. Vorkursus § 4.)

[**Bemerkungen.** Eine Linie kann ganz im Endlichen liegen und muß dabei nicht notwendig eine Grenze haben, denn sie kann in sich zurücklaufen.*) Eine bis ins Unendliche reichende Linie ist stets von unendlicher Länge. Eine ganz im Endlichen liegende Linie ist im allgemeinen von endlicher Länge. Trotzdem gibt es Linien, die ganz im Endlichen liegen und doch von unendlicher Länge sind.**) Mathematische Linien sind „unsichtbar"***), da sie keine Breite haben. Man kann sie durch dünne Fäden oder durch gezeichnete „Linien" nur veranschaulichen.]

7) Ein Punkt ist zunächst ein Gebilde, welches eine Linie begrenzt oder benachbarte Linienteile voneinander trennt. Er selbst ist kein Teil einer Linie, sondern nur das Ende einer solchen oder die gemeinschaftliche Grenze benachbarter Linienteile. Seine Länge ist gleich Null. Er ist also nur eine im Raume gedachte Stelle, die überhaupt keine Ausdehnung hat, also weder Gestalt noch Größe besitzt und auch nicht teilbar ist. Die Punkte werden als im Raume bewegbar angenommen.

Mathematische Punkte sind unsichtbar. Man kann sie nur veranschaulichen.

8) Es gibt also an einfachen geometrischen Gebilden nur die folgenden: Körper, Flächen, Linien und Punkte. Daher gibt es für die Raumlehre nur Raumgrößen (im engeren Sinne), Flächengrößen, Liniengrößen (oder Längen), während man von Punktgrößen nicht reden kann. Dies führt auf die Raummaße, Flächenmaße und Längenmaße.

*) Das einfachste Beispiel ist die Kreislinie.

**) Vgl. die letzte zu 5) gegebene Randbemerkung.

***) Das Wort „unsichtbar" ist nur aus Gründen der Veranschaulichung gebraucht, da im mathematischen Raume von Lichterscheinungen nicht die Rede sein kann. Auch bei Punkten wird in diesem veranschaulichenden Sinne von „Unsichtbarkeit" gesprochen. Trotzdem wird später vielfach vom Erscheinen solcher Gebilde gesprochen. Anstelle des wirklichen Auges hat man sich dabei ein geistiges Auge zu denken, bei dem die Schärfe der Sehkraft als eine unendlich große zu denken ist, sodaß ihm sogar Unendlichkleines sichtbar ist.

Als zusammengesetzte geometrische Gebilde kann man sich Gruppen von Körpern, Gruppen von Flächen, Gruppen von Linien, Gruppen von Punkten und auch Gruppen verschiedenartiger dieser Gebilde denken.

Jetzt wird folgende Erklärung verständlich sein:

Die Raumlehre oder Geometrie beschäftigt sich mit den gesetzmäßig gestalteten mathematischen Körpern und den an ihnen auftretenden oder auch als selbständig zu denkenden Flächen, Linien und Punkten, mit den Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen dieser Gebilde, mit ihrer Berechnung und Konstruktion. (Vgl. Vorkursus § 9.)

γ) Bewegungsbeziehungen und Ausdehnungen oder Dimensionen.

9) Durch Bewegung eines Punktes im Raume entsteht als Weg eine Linie. Dieser Weg hat eine (endliche oder eine unendliche) Länge, aber keine Breite und keine Dicke. Man sagt daher: Eine Linie hat nur eine einzige Dimension, die Länge. (Vorkursus § 44 und 45.)

10) Durch Bewegung einer Linie entsteht als Weg im allgemeinen eine Fläche. Zur Längenausdehnung der Linie tritt dabei eine neue Ausdehnung, die als Breite bezeichnet werden soll. Man sagt daher: Eine Fläche hat zwei Dimensionen, Länge und Breite.

Für die Bewegung wird dabei vorausgesetzt, daß die Linie sich nicht in sich selbst bewege, sondern seitlich aus ihrer Lage heraustrete. (Vorkursus § 46.)*)

11) Durch Bewegung einer Fläche entsteht als Weg im allgemeinen ein Körper. Zu den Dimensionen Länge und Breite tritt dabei eine neue, die man als Dicke oder auch als Höhe bezeichnet. Man sagt daher: Ein Körper hat drei Dimensionen, Länge, Breite und Dicke (oder Höhe).

Für die Bewegung wird dabei vorausgesetzt, daß die Fläche sich nicht in sich selbst bewege, sondern seitlich aus ihrer Lage heraustrete.*)

---

*) Daß sich Linien ohne jede Gestaltveränderung in sich selbst bewegen können, sodaß keine Fläche entsteht, erkennt man z. B. an der Geraden, am Kreise, an der Schraubenlinie. Daß sich Flächen ohne Gestaltveränderung in sich selbst bewegen können, sodaß kein Körper entsteht, erkennt man z. B. an der Ebene, am Kreiszylinder, am senkrechten Kreiskegel, an der Kugel, an jeder Drehungsfläche und an jeder Schraubenfläche. Auch gewisse entsprechende Körper können sich so in sich selbst bewegen, daß sie nicht aus sich selbst

[**Bemerkungen.** Durch Bewegung eines Körpers entsteht im allgemeinen wieder ein körperlicher Weg. Eine vierte Dimension nämlich, in die ein Körper z. B. mit allen Punkten zugleich hinaustreten könnte, ist uns im Weltraum nicht sinnlich wahrnehmbar. Daher nehmen wir auch für unseren mathematischen Raum an, er besitze nur die genannten drei Dimensionen.*)

In jedem endlichen Körperteile kann man sich einen kleinen Würfel denken, an dessen Kanten man Länge, Breite und Höhe erkennt. Demnach muß der Körper selbst alle drei Dimensionen haben. Auf jeden endlichen Teil einer (z. B. krummen) Fläche kann man im allgemeinen ein sehr kleines Quadrat zeichnen (z. B. auf die Kugelfläche.) An den Seiten des Quadrates erkennt man die Länge und Breite. Die beiden ersten Dimensionen besitzt also auch die Fläche, aber sie hat keine Dicke. Von jeder z. B. krummen Linie läßt sich im allgemeinen ein so kleines Stück ausschneiden, daß man es als geradlinig betrachten kann. An ihm beobachtet man nur die Länge, aber keine Breite und Dicke. So hat auch die ganze Linie nur die Dimension Länge, nicht aber die Dimensionen Breite und Dicke.]

12) Umgekehrt kann man sich folgendes vorstellen: Läßt man bei einem Körper die Dicke so zusammenschrumpfen, daß sie schließlich überall verschwindet (gleich Null wird), so bleibt nur noch eine Fläche übrig. Läßt man bei dieser die Breite so zusammenschrumpfen, daß diese schließlich überall verschwindet, so bleibt nur eine Linie übrig. Läßt man bei dieser die Länge so zusammenschrumpfen, daß letztere schließlich gleich Null ist, so bleibt nur noch ein Punkt übrig. (Vgl. Vorkursus § 44.)

δ) Das gegenseitige Schneiden und Durchdringen geometrischer Gebilde.

13) Schneiden einander zwei Linien einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt zweier Linien ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Linien gemeinsam.**) Eine krumme Linie kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

---

heraustreten und ihre Bewegung nicht wahrnehmbar ist, z. B. jeder Drehungskörper, der sich um seine Achse dreht, jeder beiderseits ins Unendliche reichende Zylinder, jeder ebenso ins Unendliche reichende Schraubenkörper, der sich in entsprechender „Schraubung" bewegt.

*) Wer sich einen Raum mit mehr als vier Dimensionen denken will, der möge sich mit dessen Geometrie beschäftigen. Mit unserem Euklidschen Raume haben solche Untersuchungen nichts zu schaffen.

) **Beispiele: Zwei gerade Linien haben höchstens einen Schnittpunkt,

14) Schneiden einander zwei Flächen einmal oder mehrfach, so geschieht es jedesmal in einer Linie. Also: Jeder Schnitt zweier Flächen ist eine Linie. Die Schnittlinie ist beiden Flächen gemeinsam.*) Eine gekrümmte Fläche kann auch sich selbst schneiden. (Vorkursus § 6.)

15) Schneiden einander eine Linie und eine Fläche einmal oder öfter, so geschieht es jedesmal in einem Punkte. Also: Jeder Schnitt einer Linie und einer Fläche ist ein Punkt. Der Schnittpunkt ist beiden Gebilden gemeinsam.**)

16) Bei Körpern spricht man nicht von gegenseitigem Schneiden, sondern von gegenseitigem Durchdringen. „Wahrnehmbar" ist dabei nur das gegenseitige Durchschneiden ihrer Oberflächen, welches in Linien geschieht. Darüber soll erst in der Stereometrie gesprochen werden. Gekrümmte Körper können so gestaltet sein, daß Teile von ihnen einander durchdringen. (Vorkursus § 6.)

ε) Begriff der geraden Linie und der Richtungen im Raume.

17) Die gerade Linie wird in der Regel veranschaulicht durch einen straff gespannten Faden, der sich zwischen zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Punkten befindet.***) Man schließt daraus: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen je zweien ihrer Punkte. Daraus folgt z. B., daß die Summe zweier Dreiecksseiten stets größer ist als die dritte, auch wenn letztere die größte von ihnen ist. In einem Dreiecke ABC z. B., dessen Ecken die Seiten a, b, c gegenüberliegen, sei c die größte Seite, dann

---

zwei Kreise haben höchstens zwei Schnittpunkte, zwei Ellipsen haben höchstens vier Schnittpunkte usw.

*) **Beispiele:** Zwei Ebenen können einander höchstens in einer Geraden schneiden. Drei Ebenen können einander höchstens in drei Geraden schneiden. Zwei Kugelflächen können einander in einer Kreislinie schneiden. Eine Ebene und eine Kugelfläche können einander in einer Kreislinie schneiden.

**) Eine Gerade und eine Ebene können einander höchstens in einem Punkte schneiden, eine Kreislinie und eine Ebene höchstens in zwei Punkten, eine Gerade und eine Kugelfläche in höchstens zwei Punkten.

***) Diese Veranschaulichung versagt bei größeren Entfernungen der beiden Punkte. So geben z. B. Telegraphendrähte und Telephondrähte trotz aller Zugspannung doch krumme „Linien". Dasselbe gilt von Seilen, auch Drahtseilen, von längeren Ketten usw. Man nennt die so veranschaulichten Linien Kettenlinien. Die Abweichung von der geradlinigen Form erfolgt durch die Wirkung der Schwerkraft. Ein längerer Telegraphendraht würde zerreißen, ehe er durch Zugspannung ganz geradlinig würde. Ein in senkrechter Richtung gespannter Draht wird jedoch stets geradlinig.

ist doch $a + b > c$*), denn der direkte Weg von B bis A ist kürzer als der Umweg $BC + CA$.

Daraus folgt ferner $(a + b) - b > c - b$, oder $a > c - b$ d. h. jede Dreiecksseite, auch die kleinste, ist größer als der Unterschied der beiden andern. (Daß $a + b - b = a$ ist, erscheint leichtverständlich.)

18) Man kann das Auge in Lagen bringen, in denen jedes Stück einer Geraden als Punkt erscheint.**) Der vorderste Punkt verdeckt dabei alle andern Punkte der Geraden.

19) Daher sagt man: Für diese Lage des geistigen Auges liegen alle Punkte der Geraden in derselben Richtung. Ebenso sagt man allgemeiner: Die Gerade hat in allen ihren Teilen dieselbe Richtung. Sind A und B die Endpunkte der Geraden, so kann man ihr zwei Richtungen zuschreiben, die Richtung von A nach B oder die Richtung von B nach A. Daraus folgt ferner:

20) Die Gerade kann in ihrer Richtung bewegt werden, ohne seitlich aus der „Richtungslinie" herauszutreten. Durch diese Bewegung erhält man nicht eine Fläche, sondern nur die Verlängerung der Geraden. Die Gerade kann nach beiden Richtungen hin ins Unendliche verlängert werden.

21) Dreht man die Gerade unter Festhaltung zweier ihrer Punkte, so nimmt das (geistige) Auge nichts von einer Lagenänderung wahr. (Dagegen würden krumme Linien bei dieser Drehungsbewegung dem Auge in unendlich vielen verschiedenen Lagen erscheinen.) Man schließt daraus: Zwischen je zwei (im Endlichen liegenden) Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich. Oder: Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte vollständig bestimmt.

22) Weil zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist und diese den kürzesten Weg gibt, so mißt man den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte mittels dieser Geraden. Also: Die gegenseitige Entfernung zweier Punkte ist gleich der Länge der sie verbindenden Geraden.

23) Aus 21) folgt noch: Zwei Geraden können höchstens einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Hätten sie

---

*) Das Zeichen $>$ bedeutet „größer als", das Zeichen $<$ bedeutet „kleiner als".

**) Der ausgesprochene Satz sagt eigentlich nur, daß eine Gerade eine Ebene nur in einem Punkte schneiden kann. Auf einem höheren Standpunkte wird er so ausgedrückt: Kann die Projektion einer Linie auf eine Ebene ein Punkt sein, so ist die Linie eine Gerade.

nämlich zwei solche, so würden zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten zwei Geraden möglich sein, was dem in 21) angegebenen Satze widerspräche.

24) Zwei gleich lange Geraden können auf zweierlei Art zur Deckung gebracht werden. Ist AB die eine Gerade, A_1B_1 die andere, so kann man AB sowohl auf A_1B_1 als auch auf B_1A_1 legen. Statt dieses Satzes sagt man auch: Zwei Geraden von derselben Länge sind auf zweierlei Art kongruent.

25) Eine nur einseitig begrenzte Gerade bezeichnet man als Strahl. Den Grenzpunkt bezeichnet man als seinen Ausgangspunkt oder Anfangspunkt. Seine Richtung geht von diesem aus ins Unendliche. So kann man sich z. B. vom Auge aus nach jedem Punkte des scheinbaren Himmelsgewölbes eine Gerade gezogen und diese bis ins Unendliche verlängert denken. Allgemeiner gilt:

Von jedem Raumpunkte gehen unendlich viele Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das Strahlenbündel des Punktes. Durch das Strahlenbündel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen im Raume angegeben.

26) Linien, die nicht alle Eigenschaften der Geraden besitzen, nennt man krumme Linien oder Kurven. (Man vgl. Vorkursus § 11—16.)

ζ) Begriff der Ebene, der ebenen Gebilde und der Planimetrie.

27) Eine Ebene ist eine unbegrenzte Fläche, in der sich von jedem ihrer Punkte aus nach jedem andern (ihrer Punkte) eine Gerade ziehen läßt, die nirgends, auch in ihrer Verlängerung nicht, aus dieser Fläche heraustritt.

28) Von jedem Punkte der Ebene gehen also unendlich viele ganz in ihr liegende Strahlen aus. Die Gesamtheit aller dieser Strahlen bezeichnet man als das (ebene) Strahlenbüschel des Punktes. Durch dieses Strahlenbüschel werden alle von dem Punkte ausgehenden Richtungen in der Ebene angegeben.

29) Das Auge kann in Lagen gebracht werden, in denen ihm ein irgendwie begrenztes Stück der Ebene als eine gerade Linie erscheint.*)

*) Der Satz ist im Grunde derselbe, wie der Satz, daß zwei Ebenen einander nur in einer Geraden schneiden können. Auf einem höheren Standpunkte wird gesagt: Eine Fläche, deren Projektion auf eine Ebene eine Gerade sein kann, ist stets eine Ebene.

30) Statt dessen kann man sagen: Bewegt sich ein Strahl um seinen festliegenden Anfangspunkt so, daß er stets auf einer festen Geraden hingleitet, die nicht durch diesen Punkt geht, so beschreibt er eine Ebene. (Statt des Strahles kann man auch die unbegrenzte Gerade nehmen.) Daraus folgt:

31) Eine Ebene ist durch eine Gerade und einen außerhalb dieser liegenden Punkt vollständig bestimmt. Daraus folgt ferner:

32) Eine Ebene ist durch drei Punkte vollständig bestimmt; denn zwei davon kann man durch eine Gerade verbinden. Daraus folgt ferner:

33) Durch zwei einander schneidende Geraden ist eine Ebene vollständig bestimmt. Die eine Gerade kann man nämlich als die feste Gerade, einen beliebigen Punkt der andern kann man als den Drehungspunkt des Strahles betrachten, die zweite Gerade als den bewegten Strahl in einer seiner Lagen. Gleitet also eine Gerade auf zwei festen einander schneidenden Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene.

34) Bei der unter 30) beschriebenen Bewegung tritt der Fall ein, daß der Durchschnittspunkt der gedrehten und der festgehaltenen Geraden in unendliche Entfernung rückt. Dann sagt man, die feste Gerade und die bewegte Gerade sind in dieser Lage parallel, sie haben dabei dieselbe Richtung, sie gehen nach demselben unendlich fernen Punkte hin. Daraus folgt für 33), daß der Schnittpunkt der beiden Geraden auch in unendlicher Entfernung liegen darf. Also ergibt sich der Satz: Durch zwei parallele Geraden ist stets eine Ebene vollständig bestimmt. Oder: Gleitet eine Gerade auf zwei festen parallelen Geraden hin, so beschreibt sie eine Ebene. Oder: Durch zwei parallele Geraden läßt sich stets eine Ebene legen.

35) Umgekehrt kann man sagen: Schneiden einander zwei Geraden im Raume nicht, so weit man sie auch verlängert, läßt sich aber durch beide eine Ebene legen, so sind die Geraden parallel. (Es gibt Geraden im Raume, die noch so weit verlängert, einander nicht schneiden, durch die sich aber keine Ebene legen läßt. Solche Gerade nennt man windschiefe Gerade.)

Über diese Sätze muß aber noch ausführlicher gesprochen werden.

36) Flächen, die nicht alle Eigenschaften der Ebene besitzen, nennt man krumme Flächen.

37) Geometrische Gebilde, die ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als ebene Gebilde.

Geometrische Gebilde, die nicht ganz in derselben Ebene liegen, bezeichnet man als nicht ebene, oder als unebene oder als räumliche Gebilde (im engeren Sinne).

So gibt es ebene Punktgruppen und räumliche Punktgruppen; ebene Liniengruppen und räumliche Liniengruppen; ebene und räumliche Gruppen von Punkten und Linien und ebene und räumliche Gruppen von Flächenstücken; es gibt ebene Kurven und räumliche Kurven.

38) Demnach zerfällt die Geometrie in zwei Teile, in die Geometrie der ebenen Gebilde oder die Planimetrie und in die Geometrie der räumlichen Gebilde (im engeren Sinne) oder die Stereometrie.

Vorläufig soll nur noch von der Planimetrie die Rede sein. In ihr kann man hinsichtlich der Größenmessung von Längenmessung (Longimetrie) und Flächenmessung (Planimetrie im engeren Sinne) sprechen. (Vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus § 20—29.)

η) Begriff des Kreises*), des regelmäßigen Vielecks und ihrer Teile.

39) Bewegt sich ein Punkt, ohne umzukehren, in einer Ebene so, daß er von einem gegebenen festen Punkte der letzteren stets denselben Abstand behält, so kehrt er schließlich in die ursprüngliche Lage zurück. Der nach einem solchen Umlaufe zurückgelegte Weg wird als eine Kreislinie bezeichnet. Der feste Punkt heißt ihr Mittelpunkt, oder ihre Mitte, oder ihr Zentrum.

Die Kreislinie ist diejenige ebene, in sich zurücklaufende Kurve, deren Punkte von einem bestimmten festen Punkte der Ebene denselben Abstand haben. (Man vgl. zu diesem Abschnitte Vorkursus VI.)

40) Jede Verbindungslinie des Kreiszentrums mit einem Punkte der Kreislinie bezeichnet man als einen Halbmesser oder Radius des Kreises. Die Länge aller Radien eines Kreises ist dieselbe, denn sie ist gleich jenem unveränderlichen Abstande vom Mittelpunkte.

---

*) Unter Kreis wird bald die Kreislinie, bald die Kreisfläche verstanden. Der Sprachgebrauch schwankt. Nach Bedürfnis sollen die letzteren Worte gebraucht werden, sonst der Kürze halber das Wort Kreis.

41) Zu jedem Kreisradius gibt es einen anderen von entgegengesetzter Richtung. Jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade schneidet also den Kreis in zwei Punkten. Das zwischen den letzteren liegende Stück einer solchen Geraden heißt der **Durchmesser** des Kreises. Jeder Kreisdurchmesser ist doppelt so lang als der zugehörige Kreisradius. Alle Durchmesser eines Kreises sind also gleich lang. Die Endpunkte jedes Durchmessers heißen **Gegenpunkte** des Kreises.

42) **Je zwei Kreislinien von demselben Radius decken einander** (oder sind **kongruent**). Legt man nämlich die eine so auf die andere, daß ihr Mittelpunkt auf den der anderen fällt, so müssen auch die beiden Kreislinien sich decken. (Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßten ungleiche Radien vorhanden sein.)

Sie decken einander auf unendlich viele Arten, dreht man nämlich die auf die andere gelegte in der Ebene um ihren Mittelpunkt, so wird die Kongruenz nicht gestört. Jeder Radius des einen Kreises kann mit einem beliebigen des anderen zur Deckung gebracht werden.

Daraus folgt, **daß der Kreis ein vollkommen regelmäßiges ebenes Gebilde ist.**

43) **Jeder Durchmesser teilt die Kreislinie in zwei kongruente Teile**, die man als **Halbkreise** bezeichnet. Kongruent sind sie, weil sich der eine so um das Kreiszentrum drehen läßt, daß beide einander decken. Die Deckung kann auch durch Umklappen der einen Hälfte um den sie begrenzenden Durchmesser erfolgen.

44) Jeder Teil einer Kreislinie heißt ein **Kreisbogen**. Die gerade Verbindungslinie seiner Endpunkte heißt **Sehne**. Die verlängerte Sehne heißt **Sekante**. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei verschiedene Kreisbogen, in einen kleineren und einen größeren Kreisbogen. Jeder kann als der zum anderen gehörige **Restbogen** bezeichnet werden. (Fig. 1.)

Fig. 1.

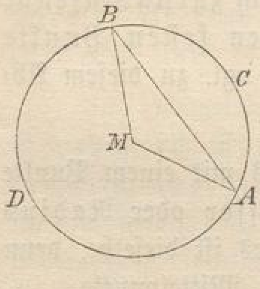


Fig. 2.

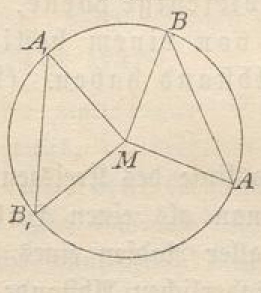
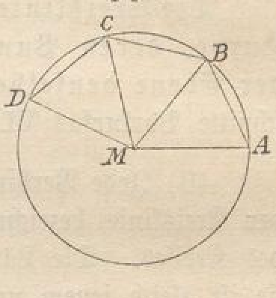


Fig. 3.

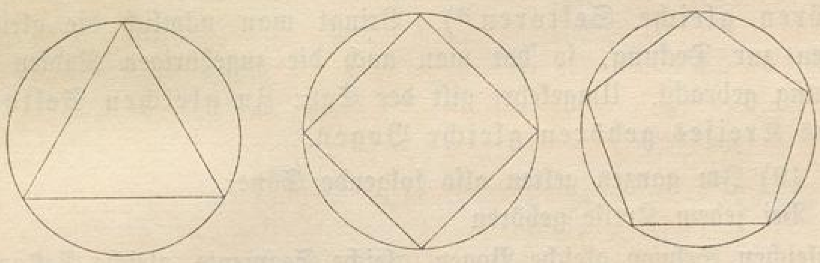


45) Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Bogen.*) Sind nämlich zwei Sehnen eines Kreises gleich, so lassen sie sich durch Drehung der einen um das Kreiszentrum zur Deckung bringen. Dabei decken einander sowohl die beiden kleinen Bogen, als auch die zugehörigen Restbogen. Gewöhnlich spricht man nur von dem kleineren Bogen.

Dann gilt die Erklärung: Gleiche Bogen eines Kreises sind also solche, zu denen gleiche Sehnen gehören. (Fig. 2.)

46) Schließt eine Reihe gleicher Sehnen, deren Anzahl größer als zwei ist, nach einem Umgange, so ist die Kreislinie in eine entsprechende Anzahl gleicher Teile eingeteilt. Von den Sehnen sagt man dann: Sie bilden ein regelmäßiges Vieleck. Verbindet man nämlich die Ecken eines solchen Gebildes durch Radien mit dem Mittelpunkte, so hat man lauter gleichschenklige Dreiecke, von denen jedes mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann, indem man es um den Mittelpunkt dreht. (Man kann die Sehnen zur Deckung bringen, also auch die zu ihnen gehörigen Radienpaare, denn zwischen einem Endpunkte und dem Mittelpunkte ist nur eine einzige Gerade möglich.)

Fig. 4.



47) Die von der Kreislinie umschlossene Fläche heißt die Kreisfläche. Sie entsteht z. B. durch Drehung eines Radius um einen seiner Endpunkte. Die Kreisfläche wird durch jede Sehne in zwei Flächen zerlegt, die man Kreisabschnitte oder Segmente nennt. Nur bei dem Durchmesser sind die beiden Segmente kongruent (Halbkreisflächen). Bei anderen Sehnen ist das Segment, in dem das Kreiszentrum liegt, das größere, das andere ist das kleinere. Gewöhnlich versteht man unter dem zu einer Sehne gehörigen Segment das kleinere, während man das größere als das zugehörige Restsegment bezeichnet. (Man kann das kleinere Segment soweit um den Mittelpunkt drehen, daß es ganz innerhalb des größeren liegt.) Dann

*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bogenpaare“.

gilt der Satz: Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Segmente.*) Man kann nämlich die Sehnen zur Deckung bringen, mit ihnen auch die Kreisbogen und ihre Mittelpunkte, folglich auch die von Sehne und Bogen umschlossenen Flächen. Umgekehrt gehören zu gleichen Segmenten eines Kreises gleiche Sehnen.

48) Den von zwei Radien begrenzten Teil einer Kreisfläche bezeichnet man als Kreisausschnitt oder Kreissektor. Durch zwei Radien wird die Kreisfläche in zwei Sektoren zerlegt. Nur wenn die beiden Radien einen Durchmesser bilden, sind die beiden Sektoren einander gleich (Halbkreisflächen). Sonst sind sie ungleich. Der kleinere Sektor kann soweit um den Mittelpunkt gedreht werden, daß er ganz innerhalb des größeren liegt. Gewöhnlich meint man bei Angabe eines Sektors den kleineren. Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sektoren.*) Bringt man nämlich die gleichen Bogen zur Deckung, so hat man auch die zugehörigen Radien zur Deckung gebracht. Umgekehrt gilt der Satz: Zu gleichen Sektoren eines Kreises gehören gleiche Bogen.

49) Im ganzen gelten also folgende Sätze:

Bei jedem Kreise gehören

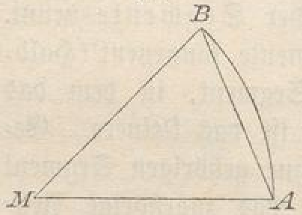
zu gleichen Sehnen	gleiche Bogen,	gleiche Segmente,	gleiche Sektoren;
" " Bogen	" Sehnen,	" Segmente,	" Sektoren;
" " Segmenten	" Sehnen,	" Bogen,	" Sektoren;
" " Sektoren	" Sehnen,	" Bogen,	" Segmente.

Statt gleich kann man hier überall kongruent sagen.

ϑ) Begriff des Winkels in der Ebene.

50) Gehen von einem festen Punkte der Ebene zwei Strahlen aus, ein in ihr festliegender und ein in ihr um den Punkt drehbarer, so kann man den letzteren zunächst mit dem ersteren zur Deckung bringen und dann in zweierlei Sinne von ihm wegdrehen. Die Drehung kann nämlich im Sinne der Uhrzeigerbewegung und auch im entgegengesetzten Sinne erfolgen.**) Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt des bewegten Strahles einen Kreis, der sich schließt, sobald der Strahl eine volle Umdrehung gemacht hat. Dieses Schließen

Fig. 5.



*) Will man den Unterschied festhalten, so sage man: „Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Segmentpaare" oder: „gleiche Sektorenpaare" usw.

**) Vielfach bezeichnet man die der Uhrzeigerbewegung entsprechende erfolgt für alle Teile des Strahles gleichzeitig. Ebenso vollenden alle Punkte des bewegten Strahles gleichzeitig eine halbe Umdrehung, oder eine drittel Umdrehung, oder zwei Drittel einer Umdrehung usw. Jeder Lage entspricht also für alle Punkte des Strahles ein bestimmter Bruchteil bezw. ein bestimmtes Vielfaches einer vollen Umdrehung (z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$ Umdrehung). Gewöhnlich spricht man nur von (echten) Bruchteilen der Umdrehung, da sich beim Überschreiten der Anfangslage der Vorgang noch einmal oder mehrfach wiederholt. Jenen Bruchteil der vollen Umdrehung bezeichnet man auch als die Abweichung des bewegten Strahles vom festen Strahle, oder als den Richtungsunterschied beider Strahlen, oder als den Winkel, den beide Strahlen miteinander bilden.

Fig. 6.

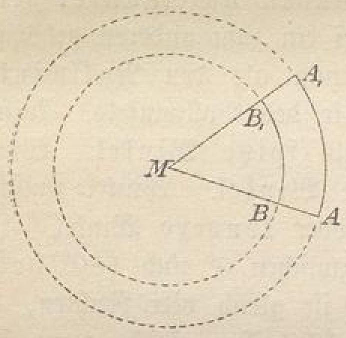
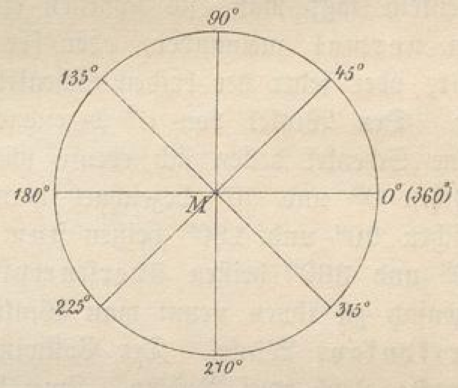


Fig. 7.



Die gezeichneten Teile der beiden Strahlen nennt man die Schenkel des Winkels. Ihre Länge ist vollständig gleichgültig und hat keinen Einfluß auf die Größe der Drehung oder auf die Größe des Winkels. Der Winkel ist lediglich das Maß der (besprochenen) Drehung. Der Drehungspunkt heißt Scheitelpunkt oder kürzer Scheitel des Winkels. (Fig. 6.)

51) Im Vorkursus (Abschnitt VI) ist gezeigt worden, wie man teils durch Konstruktion, teils durch Versuche*) einen Kreis in 2, 3,

Drehung als die negative Drehung, die entgegengesetzte als die positive Drehung. Andere sprechen bezw. von Rechtsdrehung und Linksdrehung.

*) Man kann zwar gewisse Kreisteilungen mit Zirkel und Lineal exakt (andere mit Hilfe gewisser Kurven annäherungsweise) ausführen. Im allgemeinen sind aber die Teilungen in 7, 9, 11, 13, 19, 23, 25 usw. Teile nur auf dem Wege des probeweisen Absteckens mit Hilfe des Zirkels mit einiger Annäherung durchführbar, worüber im Schlußbande zu sprechen ist. Merkwürdig ist, daß auch die Grundlage der Gradeinteilung, der 360. Teil des Kreises, nur annäherungsweise bestimmt werden kann.

4, 5, 6, 7, 8, 9, ... Teile zerlegen kann. Verbindet man die Endpunkte eines solchen Teiles durch Radien mit dem Kreismittelpunkte, so erhält man Winkel von entsprechender Größe, sodaß die Kreisteilung und die Winkelkonstruktion eng zusammenhängen. Winkel, die von zwei Radien eines Kreises gebildet werden, heißen Zentriwinkel. Durch die (angenäherte) Konstruktion des 360-Ecks erhält man zugleich den Winkel, den man als einen Winkelgrad bezeichnet. Die volle Umdrehung gibt einen Winkel von 360^0, er heißt Vollwinkel. Seine Schenkel decken einander (vgl. Fig. 7). Die halbe Umdrehung gibt einen Winkel von 180^0, er heißt gestreckter Winkel. Seine Schenkel haben entgegengesetzte Richtungen und fallen daher in dieselbe gerade Linie. Der vierte Teil der Umdrehung gibt den Winkel von 90^0. Dieser heißt der rechte Winkel oder einfach der Rechte. Von seinen Schenkeln sagt man, sie schnitten einander rechtwinklig, oder sie seien normal zueinander, oder sie ständen aufeinander senkrecht, oder jeder der beiden Schenkel sei ein zum anderen gehöriges Lot. Den Winkel von 0^0 bezeichnet man als den Nullwinkel. Seine Schenkel decken sich ebenso wie die des Vollwinkels. Winkel zwischen 0^0 und 90^0 bezeichnet man als spitze Winkel. Winkel zwischen 90^0 und 180^0 heißen stumpfe Winkel. Winkel zwischen 180^0 und 360^0 heißen überstumpfe oder konvexe Winkel. Im Gegensatz zu ihnen nennt man Winkel zwischen 0^0 und 180^0 hohle oder konkave Winkel. Der Vollwinkel ist gleich vier Rechten, der gestreckte gleich zwei Rechten. Zwei Winkel heißen gleich, wenn ihre Schenkel sich (abgesehen von der Länge) zur Deckung bringen lassen.

52) Ist die Summe zweier Winkel gleich 360^0, so heißt jeder der Restwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich 180^0, so heißt jeder der Supplementwinkel des anderen. Ist die Summe zweier Winkel gleich 90^0, so heißt jeder der Komplementwinkel des anderen.

53) [Den sechzigsten Teil eines Winkelgrades bezeichnet man als Minute, den sechzigsten Teil der Minute als Sekunde (den sechzigsten Teil der Sekunde als Tertie) usw. (Erste, zweite, dritte Verminderung.) So sagt z. B. $\sphericalangle \alpha = 22^0 23' 35''$, der Winkel α zähle 22 Grad 23 Minuten 35 Sekunden. (Drei Striche würden Tertien bedeuten.) Man kann aber den Winkel auch in Dezimalbruchform schreiben, z. B. $\sphericalangle \beta = 39^0{,}51$.] Unter $\sphericalangle ABC$ versteht man einen Winkel, dessen Scheitel der Punkt B ist, während A und C die Endpunkte der Schenkel sind. Der Scheitel wird also stets in der Mitte genannt.

54) Durch Verlängerung eines Winkelschenkels über den Scheitel hinaus erhält man den Nebenwinkel des Winkels, der zugleich ein Supplementwinkel des gegebenen Winkels ist. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man zwei einander gleiche Nebenwinkel, außerdem den Scheitelwinkel. Dieser ist dem gegebenen Winkel gleich, denn er ist wie jener der Supplementwinkel für jeden der beiden Nebenwinkel.

55) Aus Gründen der Regelmäßigkeit des Kreises folgt: Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren. Bringt man nämlich zwei gleiche Zentriwinkel zur Deckung, so fallen die Endpunkte ihrer Radien paarweise zusammen, ebenso die Endpunkte der zugehörigen Sehnen, der zugehörigen Bogen. Danach läßt sich die unter 49) gegebene Tabelle erweitern.

56) Den halben Umfang des Kreises vom Radius 1 bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π. Der Umfang ist also $u = 2\pi$. Wird der Kreis z. B. im 7-fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang $u = 2 \cdot 7 \cdot \pi$; wird er im r-fachen Maßstabe gezeichnet, so ist der Umfang $u = 2r\pi$. Zunächst durch Messung (durch Umlegen eines möglichst dünnen Fadens um eine Kreisscheibe) findet man, daß π ungefähr gleich $\frac{22}{7}$ oder ungefähr 3,14 ist.*) Jedem Bogen des Kreises vom Radius 1, der ein bestimmter Bruchteil des Kreisumfangs ist, entspricht also ein Winkel (Zentriwinkel), der denselben Bruchteil von 360^0 gibt. So entsprechen einander z. B. $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{360^0}{6} = 60^0$; $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{360^0}{5} = 72^0$ usw. Man sagt daher: Ein Winkel β^0 verhält sich zum Winkel 360^0 ebenso, wie der zugehörige Bogen $\widehat{\beta}$ jenes Kreises zum Bogen 2π; oder: Ein Winkel β^0 verhält sich zum Winkel 180^0 ebenso, wie der zugehörige Bogen $\widehat{\beta}$ zum Bogen π. Diesen Satz stellt man in folgender Schreibweise (als folgende Proportion) dar:

$$\beta^0 : 180^0 = \widehat{\beta} : \pi.$$

*) Ein genauerer Wert ist $\pi = 3{,}14159265\ldots$ Archimedes (geboren 287 v. Chr. zu Syrakus) nahm $\frac{22}{7}$ an, was $3{,}142857\ldots$ gibt, also etwas zu groß ist. Ein weit genauerer Näherungswert ist $\frac{355}{113}$. Dieser gibt $3{,}1415929\ldots$, was schon auf 7 Stellen stimmt, für die gewöhnlichen Berechnungen also vollständig ausreicht. Die Berechnung von π wird später gelehrt.

Zur Umrechnung von Winkeln in Bogen und von Bogen in Winkel braucht man also die Formeln*)

$$\beta^0 = \frac{\widehat{\beta}}{\pi} 180^0, \quad \widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}.$$

So gehört z. B. zum Bogen $\widehat{\beta} = 1$ der Winkel $\beta^0 = \frac{1}{\pi} 180^0 = 57^0{,}295$ $= 57^0 17',70 = 57^0 17' 42''$.**) Derselbe Winkel gehört zum Bogen $\widehat{b} = r \cdot \widehat{\beta} = r \cdot 1$ am Kreise mit Radius r.

(Den Kreisumfang berechnet man aus dem Radius nach der obigen Formel $u = 2r\pi$, den Kreisradius aus dem Umfange nach der Formel $r = \frac{u}{2\pi}$.***)

Zum Winkel 1^0 gehört (am Kreise mit Radius 1) der Bogen $\widehat{\beta} = \pi \frac{1^0}{180^0} = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453$, am Kreise mit Radius r dagegen der r-fache Bogen.

(Bezeichnet man den am Kreise mit Radius r gemessenen Bogen mit $\widehat{b}_r$, den am Radius 1 gemessenen wieder mit $\widehat{\beta}$, so hat man die Formeln $\widehat{b}_r = r\widehat{\beta}$, $\beta = \frac{\widehat{b}_r}{r}$. Die obigen Umrechnungsformeln für den Kreis mit Radius r werden dann

$$\beta^0 = \frac{\widehat{b}_r}{r\pi} 180^0, \quad \widehat{b}_r = r\pi \frac{\beta^0}{180^0},$$

die mit den obigen übereinstimmen, sobald man den Wert $r\widehat{\beta}$ für $\widehat{b}_r$ einsetzt.)

---

*) Die Gradbezeichnungen heben sich in der Formel $\widehat{\beta} = \pi \frac{\beta^0}{180^0}$ auf, man kann sie also in der Form $\widehat{b} = \pi \frac{\beta}{180}$ schreiben, nur muß dann gesagt werden, daß der Winkel in Graden ausgedrückt ist, z. B. $\beta = 20^0{,}3$, nicht etwa $\beta = 20^0 18'$ oder $1218'$.

**) Man vergesse nie, daß der Bogen $\widehat{b}$ am Kreise vom Radius 1 gemessen wird. Bei ungenauen Werten von π findet man nicht so genaue Resultate. Die Bruchteile der Sekunden sind hier vernachlässigt.

***) Nimmt man also den Erdumfang als 5400 geographische Meilen an, so hat der Erdradius eine Länge von 859,43 geographischen Meilen. Nimmt man den Erdumfang zu 40 000 000 m an, so hat der Erdradius eine Länge von 6 366 200 m. Dabei ist der genauere Wert von π zugrunde gelegt und eine Genauigkeit auf fünf Stellen erstrebt. — Der Äquatorgrad hat für die Erde eine Länge von $\frac{5400}{360} = \frac{2700}{180} = 15$ geogr. Meilen. Für jede Reise längs des Äquators kann man also die Länge aus den Graden und die Grade aus der Länge berechnen.

(In vielen Lehrbüchern, besonders in den physikalischen, wird von Winkeln π oder $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ usw. gesprochen. Man meint damit Winkel von 180°, bezw. 90°, 60°, 45° usw., denn dabei ist die Größe des am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogens angegeben. Hier soll bei einem Winkel α stets der Winkel in Graden und seinen Bruchteilen gemeint sein, während $\widehat{\alpha}$ den am Kreise mit Radius 1 gemessenen Bogen bedeuten soll. Bogenlängen an Kreisen von beliebigem Radius sollen dagegen mit lateinischen Buchstaben nebst Bogen, z. B. mit $\widehat{a}$ bezeichnet werden, gegebenenfalls mit $\widehat{a}_r$, wenn der Radius r bekannt ist. Es handelt sich bei diesen Unterscheidungen nur um die Vermeidung von Mißverständnissen.)

b) Die einfachsten planimetrischen Konstruktionen.

α) Die Zeichengeräte.

57) Die unentbehrlichsten Zeichengeräte sind das Lineal und der Zirkel. Das erstere dient zum Zeichnen gerader Linien mittels des Bleistiftes oder der mit Tusche gefüllten Handreißfeder*). Der Handzirkel dient zum Messen der Längen und zur Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnungen, der Einsatzzirkel mit den Einsatzteilen zum Zeichnen der Kreise und Kreisbogen mit Bleistift oder Reißfeder.

(Daß es auch krummlinige oder Kurvenlineale und Schablonen zum Zeichnen bestimmter Kurven gibt, sei beiläufig bemerkt).

58) Sollen Geraden von gegebener Länge gezeichnet werden, so ist die Länge unmittelbar mit Hilfe eines Maßstabes, oder mittelbar mit Hilfe des Zirkels zu bestimmen, dem man an einem Maßstabe die geforderte Öffnung gibt. Der Maßstab ist entweder nur auf dem Blatte gezeichnet, oder er ist ein Lineal mit metrischer Einteilung, welches also Meter, Dezimeter, Zentimeter, Millimeter angibt. (Vorkursus § 14 bis 16.)

59) Bei technischen Zeichnungen stellt man die Gebilde meist nicht in der wirklichen Größe, sondern in „verkleinertem Maßstabe" dar. Dann wird auf dem Rande des Zeichenblattes ein „verjüngter"

*) Die Vorsilbe Reiß hängt mit dem Worte Riß zusammen, denn man spricht vom Grundriß oder Aufriß eines Gebäudes oder einer Maschine oder eines Apparates oder irgend eines räumlichen Gebildes. Solche Risse werden auf dem Reißbrett gezeichnet. Die Zeicheninstrumente gehören zum Reißzeug.

oder „verkleinerter Maßstab" gezeichnet, der angibt, welche Länge z. B. 1 m bedeuten soll. Auf Landkarten für nicht allzugroße Gebiete wird durch den Maßstab angegeben, welche Länge ein Kilometer oder eine geographische Meile bedeuten soll. Man spricht dann vom Maßstabe $\frac{1}{10}$ oder 1 : 10; vom Maßstabe $\frac{1}{10000}$ oder 1 : 10 000 usw. Kleinere Gebilde werden in den naturwissenschaftlichen Lehrbüchern oft in vergrößertem Maßstabe dargestellt, z. B. im zehnfachen Maßstabe ($\frac{10}{1}$ oder 10 : 1) usw.

60) Zur Zeichnung von Kreisen erhält der Einsatzzirkel bestimmte Einsatzteile, für das Zeichnen mit Bleistift den Blei- oder Stifteinsatz, für das Zeichnen mit Tusche oder einer sonstigen gefärbten Flüssigkeit den Reißfeder- oder Federeinsatz.

61) Soll die Zeichnung genau werden, so ist ein ebenes, genau rechtwinkliges Reißbrett mit aufgespanntem Zeichenbogen zu benutzen, auf dem mit Hilfe der Reißschiene senkrechte und wagerechte Linien bequem zu zeichnen sind. Zu den senkrechten Linien benutzt man aber meist das längs der wagerechten Reißschiene bewegliche Winkeldreieck oder den Winkelhaken (Rechtwinkellineal), welches außerdem das bequeme Zeichnen von Linien gestattet, die 45° bezw. 30° und 60° Neigung haben. Lineal und Winkelhaken oder die beiden Arten von Winkelhaken dienen auch zum bequemen Zeichnen von Loten und Parallelen.

62) Schwierig ist das Zeichnen sehr kleiner Kreise. Für diese hat man sogenannte Nullzirkel (oder Nullenzirkel) mit Mikrometerschraube zum Regulieren der Zirkelöffnung und mit feinem Nadeleinsatz zur schärfsten Einhaltung des Kreismittelpunktes konstruiert. Der Einsatz wird durch eine elastische Feder nach dem Zirkel hingedrängt, durch die Schraube von ihm weggedrängt. Federzirkel mit Schraube benutzt man auch zum genauen Messen kleiner Abstände.

63) Zur Zeichnung bezw. Messung von beliebigen Winkeln dient der Transporteur des Reißzeugs, bei dem der Halbkreis in 180 gleiche Teile eingeteilt ist, die also den Winkelgraden entsprechen.*)

64) Das Bestimmen der Längen mit Hilfe des Maßstabs und das der Winkel mit Hilfe des Transporteurs fällt in der Regel ungenau aus. Zur Verschärfung der Ablesung benutzt man den sog. Nonius, womöglich mit mikroskopischer Vorrichtung zum Ablesen.

---

*) Sehr brauchbar zu Längen- und Winkelmessungen ist Simons durchsichtige Meßtafel. D. R. G. M. 80 166.

Darüber ist in der Physik zu sprechen, wohin die Vorrichtungen der Feldmeß- und der astronomischen Instrumente gehören.

65) Selbst beim genauesten Zeichnen mathematischer Figuren stellen sich in der Regel Ungenauigkeiten ein. Diese beruhen teils in den Ungenauigkeiten der Lineale, Winkelhaken und der sonstigen Zeichengeräte, teils im ungenauen Anlegen des Lineals oder Einsetzen der Zirkelspitze, im ungenauen Einstellen der Zirkelöffnung, teils im ungenauen Beurteilen des Schnittpunktes zweier Geraden oder zweier Kreisbogen. Letzteres ist namentlich dann der Fall, wenn die Geraden oder Kreisbogen einander unter sehr kleinen Winkeln schneiden. Daher ist danach zu streben, daß die betreffenden Bestimmungslinien einander möglichst rechtwinklig schneiden. Auch die Breite der gezeichneten Linien gibt zu Ungenauigkeiten Anlaß, ebenso die Ausdehnung der veranschaulichten Punkte.

Im allgemeinen ist das Zirkelzeichnen*) genauer als das Linealzeichnen. Erstrebt man möglichste Genauigkeit, so ist es gut, während der Arbeit Kontrollkonstruktionen (oder Messungen) vorzunehmen und bei der Entdeckung von Abweichungen den Grundfehler aufzusuchen oder wenigstens für möglichste Ausgleichung der Ungenauigkeiten zu sorgen.**)

Man pflegt die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen als exakte zu bezeichnen. Sie sind aber nur in der Vorstellung genau ausführbar, weil, wie schon gesagt, in der Wirklichkeit die gezeichneten Linien eine gewisse Breite haben müssen, um sichtbar zu werden, und weil ebenso die Punkte der Zeichnung durchaus nicht mathematische, ausdehnungslose Gebilde sind. Die praktische Konstruktion ist nur eine rohe Veranschaulichung der mathematischen Konstruktion. Diese setzt gewisse in der Wirklichkeit unerfüllbare Forderungen oder Postulate voraus, die in folgendem besprochen werden.

β) Drei Forderungen (Postulate) der Konstruktionslehre.

66) Erste Forderung: Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden.

*) Deshalb hat der italienische Mathematiker Mascheroni (sprich Maskeróni) den erfolgreichen Versuch gemacht, alle Grundkonstruktionen nur mit Hilfe des Zirkels auszuführen. Andere machten den Versuch, alle Konstruktionen mit Hilfe des Lineals allein auszuführen, was aber, wie Steiner fand, nur möglich war, sobald man einen festen Kreis als gegeben annahm.

**) Die sogenannte Geometrographie versucht die Konstruktionen so kurz als möglich auszuführen und mit der Verminderung der Zahl der Ope-

Die Aufgabe ist nur mit Hilfe eines sehr genauen und genau an die Punkte angelegten Lineals und mit scharf gespitztem Bleistift bezw. scharfer Reißfeder mit einiger Genauigkeit auf dem Reißbrett lösbar. Dabei sind folgende Bedingungen zu beachten: 1) Beide Punkte müssen im Endlichen (z. B. auf dem Reißbrett) liegen; 2) die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte darf nicht unendlich klein sein, denn dabei hat man kein hinreichendes Urteil über die dem Lineal zu gebende Richtung. —

Die Gerade kann mit Hilfe des Lineals über die beiden Punkte hinaus verlängert werden.*) Das zwischen den gegebenen Punkten liegende Stück gibt zugleich den gegenseitigen Abstand der Punkte an. Liegt zwischen den Punkten ein Hindernis, soll z. B. auf dem Fußboden einer Werkstätte eine Gerade über eine im Wege stehende Maschine hinaus gezogen werden, so sind besondere Konstruktionen nötig.

67) Zweite Forderung**): Den Schnittpunkt zweier Geraden zu konstruieren.

Die Verlängerung der Geraden muß mit möglichster Genauigkeit erfolgen. Sonst ist über die Genauigkeit der Lösungen dasselbe zu sagen wie vorher. Bedingungen: a) Die beiden Geraden müssen im Endlichen liegen; b) sie dürfen nicht unendlich nahe aneinander liegen, denn dann wird der Schnittpunkt unbestimmt; c) sie dürfen nicht parallel sein, denn dann fällt der Schnittpunkt in unendliche Entfernung. Die Parallelen geben dann nur die Richtung an, in der er liegt. — Der Schnittpunkt wird um so genauer bestimmt, je näher der Schnittwinkel an 90^0 liegt. Von etwaigen Hindernissen gilt dasselbe wie vorher.

68) Dritte Forderung: Um einen gegebenen Punkt einen Kreis von gegebenem Radius zu legen.

---

rationen zugleich die Anzahl der Fehlermöglichkeiten zu verringern. In der Praxis sind aber Kontrollkonstruktionen und Probemessungen nicht zu entbehren.

*) Die Verlängerung wird bisweilen als ein zweites Postulat genannt.

**) Diese zweite Forderung wird in der Regel nicht mit genannt, sie ist aber ebenso wesentlich wie die erste. Das eine Mal handelt es sich um die Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte, das andere Mal um die Bestimmung eines Punktes durch zwei Geraden. Die zweite Forderung ist die reziproke der anderen. (Vertauschung der Worte Linie und Punkt.) Es müssen auch Konstruktionen dafür gelehrt werden, eine Gerade über ein Hindernis hinaus zu verlängern, oder den Schnittpunkt zweier Geraden, der jenseits eines Hindernisses liegt, zu bestimmen.

Der Zirkel ist genau in den Punkt einzusetzen, nachdem die Zirkelöffnung genau gleich der Länge des Radius gemacht ist. Bedingungen: 1) Der Punkt muß im Endlichen liegen. 2) Der Radius darf weder unendlich groß noch unendlich klein sein. — Einen Sonderfall bildet die Aufgabe, um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der durch einen gegebenen Punkt geht.

69) Man könnte noch Nebenforderungen aufstellen, die sich auf die Benutzung des metrisch eingeteilten Maßstabes, des Transporteurs, des Winkeldreiecks beziehen.

γ) Die grundlegenden Konstruktionen.

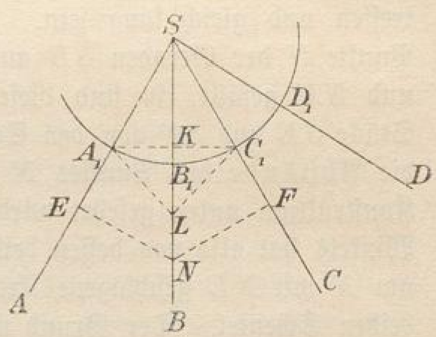
70) Erste Grundkonstruktion: Eine gegebene Gerade (nach der einen ihrer Richtungen) um sich selbst zu verlängern, ihre Länge zu verdreifachen, zu vervierfachen usw.

Der Schüler beschreibe die mit Lineal und Zirkel auszuführende Konstruktion selbst. (Die Teilpunkte sollen durch kleine Kreisbogen markiert werden.)

71) Zweite Grundkonstruktion*): Einen gegebenen Winkel (in einem der beiden Drehungssinne) zu verdoppeln, zu verdreifachen, zu vervierfachen usw.

Auflösung. In Fig. 8 sei ASB der zu vervielfachende Winkel. Man lege um den Scheitel S einen Kreis von beliebigem Radius, der die Schenkel in A_1 und B_1 schneidet, dann schlage man mit der Zirkelöffnung B_1A_1 um B_1 einen Bogen, der den Kreis in C_1 schneidet, dann um C_1 mit derselben Öffnung einen Bogen, der ihn in D_1 schneidet usw. Dann ziehe man die Geraden SC_1, SD_1 usw. Dann ist $\sphericalangle A_1SC_1$ der doppelte Winkel, $\sphericalangle A_1SD_1$ der dreifache usw.

Fig. 8.



Die Richtigkeit der Konstruktion beruht darauf, daß zu gleichen Sehnen eines Kreises gleiche Zentriwinkel gehören.

Bemerkungen. a) Klappt man den Winkel BSC um die Gerade BS, so deckt er sich mit dem Winkel BSA. Man nennt BS die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Winkels ASC.

---

*) Diese Konstruktion kann als eine reziproke der ersten betrachtet werden.

Bei diesem Umklappen deckt sich SC_1 mit SA_1, sodaß C_1 auf A_1 fällt. Jeder Punkt von SB bleibt dabei in seiner Lage. Zieht man also die Gerade A_1C_1, so deckt sich beim Umklappen ihr Teil KC_1 mit KA_1, sodaß beide gleich lang sind. Ferner deckt sich $\sphericalangle SKC_1$ mit SKA_1, da aber $\sphericalangle A_1KC_1$ ein gestreckter Winkel ist, so muß $\sphericalangle SKA_1$ und ebenso $\sphericalangle SKC_1$ ein Rechter sein. Ferner deckt sich $\sphericalangle SC_1K$ mit SA_1K, beide sind also ebenfalls gleich. (Man nennt ein Dreieck mit gleichen „Schenkeln" A_1S und C_1S ein gleichschenkliges Dreieck. A_1C_1 heißt seine Grundlinie oder Basis. Aus der Figur lassen sich also Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks ablesen, die der Schüler schon jetzt selbständig auszusprechen versuche; z. B. die Winkel an der „Grundlinie" des gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich. Man bezeichnet diese Winkel als Basiswinkel. Sind umgekehrt zwei Dreieckswinkel einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig, denn es hat eine Symmetrieachse.)

b) Verbindet man einen beliebigen Punkt L von SB mit A_1 und C_1, so decken einander bei jenem Umklappen auch die Geraden A_1L und C_1L. Jeder Punkt der Geraden SB ist also von A_1 und C_1 gleich weit entfernt. Man nennt SB, weil es das in der Mitte K von A_1C_1 auf dieser Linie errichtete Lot ist, die Mittelsenkrechte oder das Mittellot von A_1C_1. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Geraden ist also von deren Endpunkten gleich weit entfernt.

c) Macht man ferner $SE = SF$ und denkt man sich in E und F auf diesen Linien Lote errichtet, so decken sich bei jenem Umklappen diese Lote, sie müssen sich also in einem Punkte N der Geraden SB treffen und gleich lang sein. Denkt man sich umgekehrt von einem Punkte N der Geraden SB auf die Geraden SA und SC Lote NE und NF gefällt, so sind diese gleich lang und sie schneiden gleiche Stücke SE und SF von den Schenkeln ab. Man nennt NE und NF die Abstände des Punktes N von den Geraden AS und CS, deren Konstruktion unten gelehrt wird. Jeder Punkt der Halbierenden eines Winkels hat also von dessen beiden Schenkeln denselben Abstand. (Der um N mit NE geschlagene Kreis geht auch durch F und berührt die beiden Schenkel. Der Grund wird unten auseinandergesetzt.)

Die Symmetrielinie SB eines Winkels ASC oder seiner Halbierungslinie hat also sehr bemerkenswerte Eigenschaften, die sofort Benutzung finden sollen.

72) Dritte Grundkonstruktion: Einen Winkel zu halbieren.

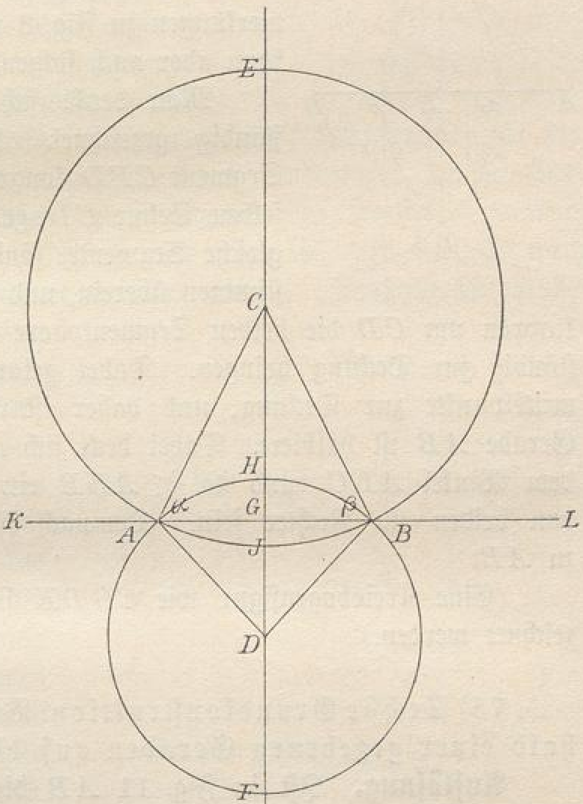
Auflösung. Ist in Fig. 8 $\sphericalangle ASC$ der zu halbierende Winkel, so lege man um den Scheitel S einen Kreisbogen von beliebigem Radius, der die Schenkel in A_1 und C_1 schneidet. Darauf schlage man um A_1 und C_1 mit derselben (oder einer anderen) Zirkelöffnung Kreisbogen, die einander in einem Punkte L schneiden. Verbindet man L mit S, so hat man den Winkel halbiert.

Die Richtigkeit folgt aus den obigen Bemerkungen. (Beiläufig ergibt sich folgendes: Stehen über derselben Grundlinie zwei verschiedene, gleichschenklige Dreiecke, so ist die Verbindungslinie ihrer Spitzen das Mittellot der Grundlinie.)

Ist der gegebene Winkel ein gestreckter, so erhält man durch diese Konstruktion einen rechten Winkel.

Dadurch ist also folgende Aufgabe gelöst:

Fig. 9.



73) **Vierte Grundkonstruktion:** Auf einer Geraden in einem gegebenen Punkte G ein Lot zu errichten.

Auflösung. Man schneide von G aus auf der Geraden nach beiden Richtungen gleiche Stücke ab. Um die Schnittpunkte schlage man mit einer größeren Zirkelöffnung Kreisbogen, die einander auf beiden Seiten der Geraden schneiden. Verbindet man die neuen Schnittpunkte durch eine Gerade, so hat man das gesuchte Lot errichtet. (Die Konstruktion ist in Fig. 9 enthalten, wenn man sich $AC = AD$ denkt.)

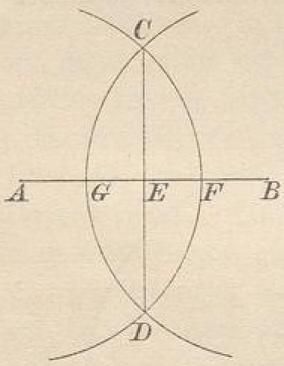
Eines neuen Beweises bedarf es nicht. (Eine zweite Lösung soll später gegeben werden. Welche Folgerungen ergeben sich für das gleichschenklige Dreieck?)

Daraus ergibt sich noch die Lösung der folgenden Aufgabe.

74) Fünfte Grundkonstruktion: Eine gegebene Gerade zu halbieren (und zugleich ihr Mittellot zu konstruieren).

Auflösung. Ist AB in Fig. 10 die gegebene Gerade, so schlage man um A und B mit derselben (hinreichend großen) Zirkelöffnung Kreise, die einander auf beiden Seiten der Geraden in Punkten C und D schneiden. Verbindet man die Punkte C und D durch eine Gerade, so hat man die Mittelsenkrechte gezeichnet und durch ihren Schnittpunkt E mit AB zugleich den Halbierungspunkt gefunden.

Fig. 10.



Die Richtigkeit ergibt sich aus den Bemerkungen zu Fig. 8 und zu 72) und 73). Sie kann aber auch folgendermaßen bewiesen werden:

Man denke sich die beiden Kreise vollständig gezeichnet. Dann ist nicht nur das Segment CFD kongruent CGD, denn zu derselben Sehne CD gehören bei gleichen Kreisen gleiche Segmente, sondern auch die Restsegmente stimmen überein, und daher lassen sich durch Umklappen um CD die beiden Segmentpaare und damit die Kreise vollständig zur Deckung bringen. Dabei gelangen aber auch die Kreismittelpunkte zur Deckung, und daher ist EB gleich EA, d. h. die Gerade AB ist halbiert. Dabei deckt sich auch der Winkel BEC mit dem Winkel AEC, und da $\sphericalangle\, AEB$ ein gestreckter ist, muß jeder von beiden ein Rechter sein. Demnach ist CD die Mittelsenkrechte zu AB.

(Eine Kreisbogenfigur wie $CGDF$ soll als Doppelsegment bezeichnet werden.)

75) Sechste Grundkonstruktion: Von einem Punkte außerhalb einer gegebenen Geraden auf diese ein Lot zu fällen.

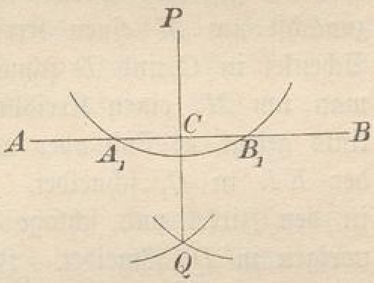
Auflösung. Ist in Fig. 11 AB die gegebene Gerade, P der gegebene Punkt, so schlage man mit einer hinreichend großen Zirkelöffnung um P einen Kreis, der AB in zwei Punkten A_1 und B_1 schneidet. Um A_1 und B_1 schlage man mit derselben (oder einer anderen) Zirkelöffnung Kreise, die einander in einem Punkte Q auf der anderen Seite der Geraden schneiden. Verbindet man P mit Q, so hat man auch das gesuchte Lot PC.

Die Richtigkeit ergibt sich daraus, daß PQ die Mittelsenkrechte von A_1B_1 ist.

Bemerkung. Legt man um P einen Kreis mit dem Radius PC und dann einen Kreis mit kleinerem und einen Kreis mit größerem

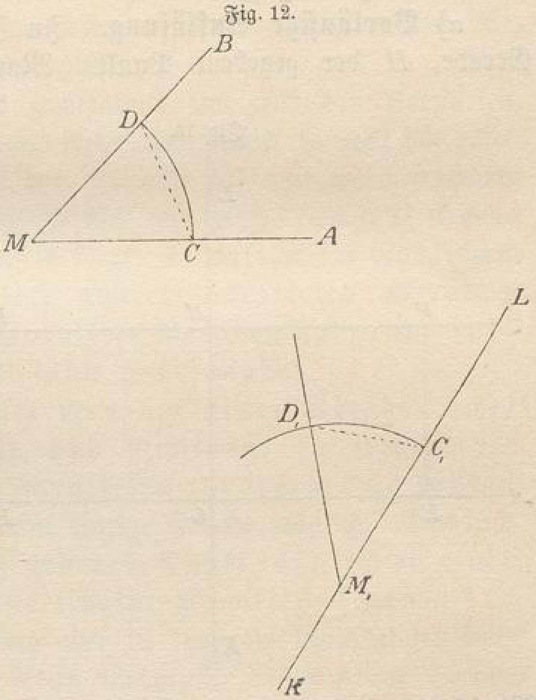
Radius, so liegt der größere Kreis ganz außerhalb des Kreises mit Radius PC und schneidet die Gerade in zwei Punkten, die so rechts und links von C liegen, daß die Schnittpunkte gleich weit von C entfernt sind. (PQ ist Symmetrielinie.) Der kleinere Kreis dagegen liegt ganz innerhalb des mit PC geschlagenen Kreises. Der letztere trennt also die um P geschlagenen Kreise welche die Gerade AB schneiden, von den Kreisen, die AB überhaupt nicht treffen; er ist der einzige um P geschlagene Kreis, der AB nur in einem Punkte trifft, oder wie man sagt, berührt. AB liegt sonst ganz außerhalb dieses Kreises und heißt seine Tangente (Berührende) für den Punkt C. Errichtet man also auf einem Radius in dessen Endpunkte ein Lot, so ist dieses eine Tangente des Kreises. Zugleich sieht man, daß PC die kürzeste Gerade ist, die von P nach der Geraden AB gezogen werden kann. Deshalb ist es berechtigt, PC als den Abstand des Punktes P von der Geraden zu bezeichnen.

Fig. 11.



An Fig. 11 erkennt man, daß die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit der Sehnenmitte den Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne gibt. Bei der Deckung gleicher Segmente oder Bogen oder Sektoren eines Kreises decken sich auch die zugehörigen Sehnen und die Sehnenmitten. Daher decken einander auch die Abstände der Sehnen vom Kreismittelpunkte. Den unter 48) genannten Sätzen kann also noch folgender beigefügt werden: Bei jedem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Mittelpunktsabstände, zu gleichen Abständen vom Mittelpunkte gehören gleiche Sehnen.

Fig. 12.



76) Siebente Grundkonstruktion. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte (nach einer der vier vorhandenen Möglichkeiten) anzutragen.

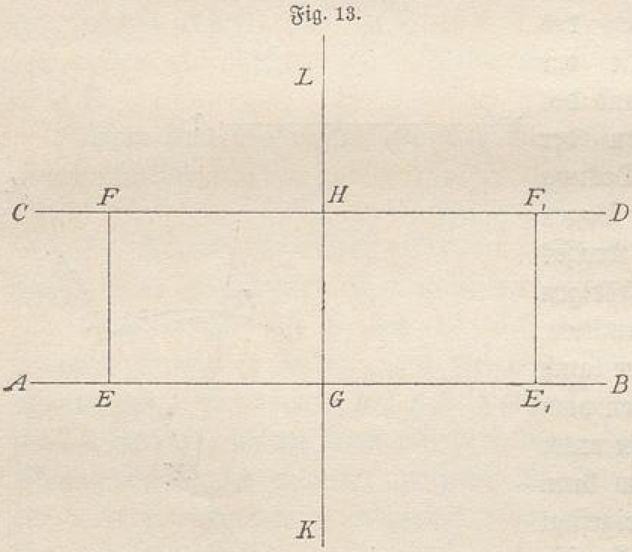
Auflösung. Ist in Fig. 12 AMB der gegebene Winkel, ist KL die gegebene Gerade und M_1 der gegebene Punkt, so schlage man zunächst um M einen Kreisbogen von beliebigem Radius, der die Schenkel in C und D schneidet. Mit derselben Zirkelöffnung schlage man um M_1 einen Kreisbogen (in der Figur ist er nach oben und links gelegt, es sind aber noch drei andere Möglichkeiten vorhanden), der KL in C_1 schneidet. Dann nehme man die Entfernung CD in den Zirkel und schlage damit einen Kreisbogen um C_1, der den vorigen in D_1 schneidet. Zieht man M_1D_1, so ist $C_1M_1D_1$ der angetragene Winkel.

Die Richtigkeit der Konstruktion folgt daraus, daß zu gleichen Sehnen CD und C_1D_1 gleich großer Kreise gleiche Zentriwinkel gehören.

77) Achte Grundkonstruktion. Zu einer gegebenen Geraden durch einen (außerhalb dieser) gegebenen Punkt eine Parallele zu legen.

α) **Vorläufige Auflösung.** In Fig. 13 sei AB die gegebene Gerade, H der gegebene Punkt. Man fälle von H auf AB ein Lot HG und errichte auf diesem in H ein Lot CHD, dann ist CD die gesuchte Parallele.

Fig. 13.



Beweis. Man denke sich AB und CD bis ins Unendliche verlängert. Denkt man sich dann die linke Hälfte der Figur um BG geklappt, so kann man sie mit der rechten Hälfte zur Deckung bringen, denn die Winkel bei H und bei G sind sämtlich rechte Winkel. Angenommen nun, auf der linken Seite hätten HC und GA einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt P, so müßte sich dieser mit einem symmetrisch gelegenen Schnittpunkte P_1 decken, in dem sich HD

und GB schneiden müßten. Dann aber hätte man zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten P und P_1 zwei getrennte gerade Verbindungslinien. Dies ist aber unmöglich. Daher ist auch ein endlicher Schnittpunkt P auf der linken Seite unmöglich und ebenso aus Gründen der Kongruenz ein endlicher Schnittpunkt P_1 auf der rechten Seite. Demnach sind die Geraden AB und CD Linien, die, soweit man sie auch verlängert, keinen im Endlichen liegenden Schnittpunkt haben. Solche Linien heißen aber parallele, sobald sie in derselben Ebene liegen, und dies ist hier der Fall. (Ebene der Zeichnung.)

Bemerkungen. a) Man hat damit den Satz gefunden: In der Ebene sind Lote auf derselben Geraden parallel. Umgekehrt folgt: Zwei Parallelen haben unendlich viele gemeinschaftliche Lote.

b) Bei dem obigen Umklappen decken sich zwei Punkte E und E_1, sobald $GE = GE_1$ ist. Fällt man von E und E_1 aus Lote EF und E_1F_1 auf CD, so sind beide gemeinschaftliche Lote der Parallelen AB und CD. Beim Umklappen um GH decken sich mit den Punkten E und E_1 zugleich die Lote EF und E_1F_1, weil die rechten Winkel GEF und $G_1E_1F_1$ aufeinander fallen. Folglich sind die Abstände EF und E_1F_1 einander gleich.

Denkt man sich aber das gemeinsame Lot GH der Parallelen an anderer Stelle gezeichnet, z. B. mehr nach rechts, so deckt sich beim Umklappen um das neue GH der Abstand EF mit einem anderen Lote E_2F_2, welches wiederum gleich EF sein muß. Da GH unendlich viele Lagen annehmen kann, so folgt: Sämtliche im Endlichen liegenden gemeinsamen Lote zweier parallelen Geraden sind einander gleich; oder: Parallele Geraden haben im Endlichen überall denselben Abstand voneinander.

c) Ferner folgt: Errichtet man auf einer Geraden zwei Lote von derselben Länge und Richtung, so liegen die freien Endpunkte in einer Parallelen zur Geraden. Zwischen diesen Endpunkten ist aber nur eine einzige Gerade möglich. Demnach gilt der Satz: Durch einen gegebenen Punkt läßt sich zu einer gegebenen Geraden nur eine einzige Parallele legen.

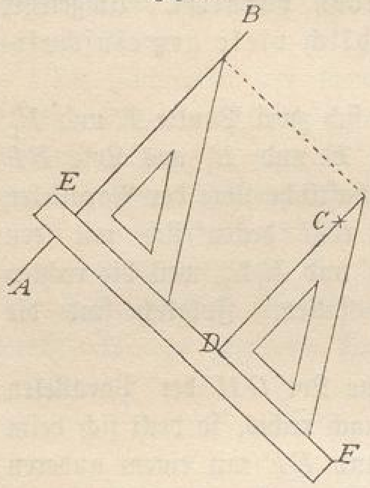
Ist das zweite Lot zu kurz oder zu lang, so schneidet die verlängerte Verbindungslinie der freien Endpunkte die gegebene Gerade in einem endlichen Punkte, das eine Mal in der Richtung nach dem zweiten Lote hin, das andere Mal in entgegengesetzter Richtung.

d) Das Viereck EFF_1E_1 bezeichnet man als ein Rechteck, weil es vier rechte Winkel hat. KL ist die eine Mittellinie oder

Symmetrieachse des Rechtecks. Wo liegt die zweite? Zieht man die Gerade EF_1, so zerlegt man das Rechteck in zwei kongruente Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke muß die Winkelsumme gleich zwei Rechten sein, weil die des Rechtecks gleich vier Rechten ist. Dabei ist $\sphericalangle E_1F_1F = \sphericalangle F_1EE_1$. Was folgt daraus für schräge Linien an Parallelen? EF_1 heißt eine Diagonale des Rechtecks, eine zweite ist E_1F. Der Schüler versuche schon jetzt selbständig die Eigenschaften des Rechtecks und seiner Mittellinien und Diagonalen abzuleiten.

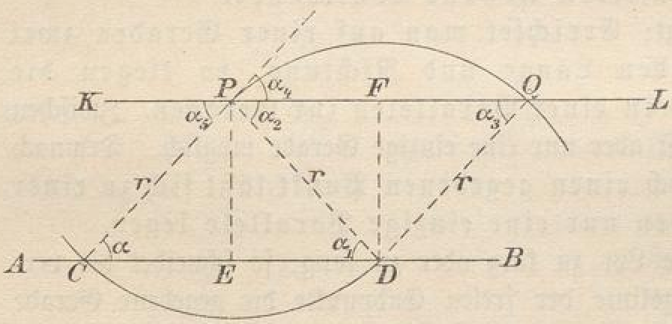
e) Fig. 14 zeigt, wie man mit Hilfe des Lineals und des Winkelhakens zu AB durch den Punkt C eine Parallele zieht. Man legt den Winkelhaken mit dem einen Schenkel genau an die Gerade AB an, an den anderen Schenkel wird das Lineal EF angelegt und fest auf das Reißbrett gedrückt. Dann verschiebt man den Winkelhaken längs des Lineals, bis der Punkt C in der gezeichneten Weise sichtbar wird. Man hält den Winkelhaken in der richtigen Lage fest und zeichnet CD, was die gesuchte Parallele gibt. — (Auch mit anders angelegtem Winkelhaken kann man die Parallele ziehen, was bisweilen bequemer ist.)

Fig. 14.



β) **Kürzere Auflösung.** Man schlage um P einen Kreisbogen mit beliebigem Radius r, der AB in C und D schneidet, schlage um D einen Kreisbogen mit demselben Radius (der also durch P geht), nehme CD in den Zirkel und schlage damit, wie es Fig. 15 zeigt, einen Kreisbogen um P, der den Schnittpunkt Q gibt. Zieht man dann PQ, so ist dies die gesuchte Parallele.

Fig. 15.



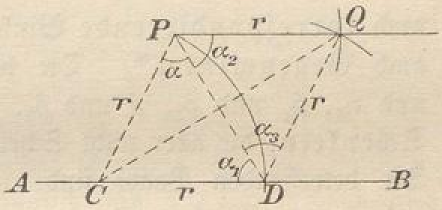
Beweis. Zu gleichen Sehnen CD und PQ gleicher Kreise gehören kongruente Sektoren, also lassen sich die Sektoren PCD und DQP (und damit die gleichschenkligen Dreiecke PCD und DQP) zur Deckung bringen

Dabei decken einander auch die Mittelsenkrechten von CD und PQ, sodaß der Abstand PE auf den Abstand DF fällt. Da demnach die Lote EP und DF gleich lang sind, ist PF und damit PQ parallel zu AB.

Bemerkungen. In Fig. 15 ist (nach 71a) $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$, ebenso $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha_3$, also der Deckung wegen $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und $\sphericalangle CPD = \sphericalangle PDQ$. Man erhält demnach die Linie PQ auch dadurch, daß man den Winkel DPQ oder α_2 gleich dem Winkel CDP oder α_1 macht. Der Schüler zeige, daß auch $\sphericalangle QDB = \alpha$, also $DQ \parallel CP$ ist, sodaß die Berechtigung vorliegt, das Viereck $CDQP$ als ein Parallelogramm zu bezeichnen. Er versuche schon jetzt selbständig Eigenschaften des Parallelogramms und seiner Diagonalen aufzufinden. Besonders gilt der Satz: Die Gegenseiten eines Parallelogramms sind gleich und parallel, oder: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. — Auch die Winkel α_4 und α_5 sind gleich α. KL und AB sind also parallel, wenn gewisse Winkel gleich sind. Welche?

γ) Man kann auch mit einer einer einzigen Zirkelöffnung zum Ziele kommen: Man nehme auf AB einen beliebigen Punkt C an, schlage um C mit der Zirkelöffnung CP einen Kreisbogen, der in D schneidet, um P und D schlage man Kreisbogen mit derselben Öffnung, die den Schnittpunkt Q geben. PQ ist die gesuchte Parallele.

Fig. 16.



Die Richtigkeit folgt daraus, daß CQ die Mittelsenkrechte zu PD ist, wobei, wie früher, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$ ist. Weil nämlich wieder $\alpha_2 = \alpha_1$ ist, muß $PQ \parallel CD$ sein.

Bemerkung. Ist umgekehrt $PQ \# CD$, so muß $PC \# DQ$, $\sphericalangle \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ und $PD \perp CQ$ sein ($\#$ soll heißen gleich und parallel). Das Viereck $CDQP$ hat lauter gleiche und paarweise parallele Seiten. Es heißt eine Raute oder ein Rhombus. Der Schüler versuche schon jetzt selbständig Eigenschaften des Rhombus und seiner Diagonalen aufzufinden.

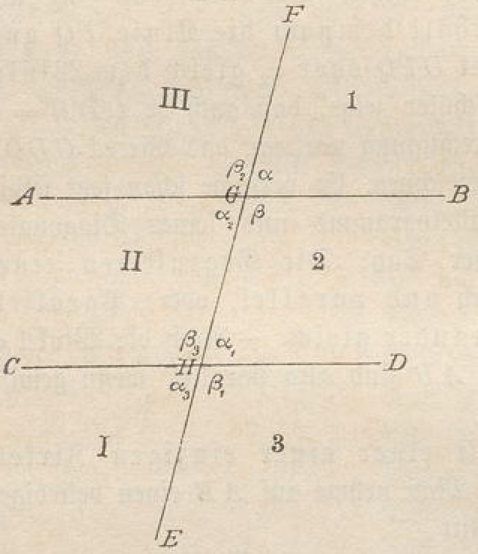
c) Bemerkungen über parallele Geraden und über die Winkelsumme des Dreiecks.

α) Die Parallelensätze.

78) Aus den letzten Konstruktionen und der Schlußbemerkung ergibt sich für Fig. 17 folgendes:

Ist $AB \parallel CD$, so ist $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_3$. Demnach ist im ganzen, weil auch Scheitelwinkel gleich sind, $\sphericalangle \beta_2 = \sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_3 = \sphericalangle \beta_1$. Da ferner zu gleichen Winkeln gleiche Nebenwinkel gehören, so ist auch $\sphericalangle \alpha = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_3$. Die Summe aus je einem α und je einem β ist gleich zwei Rechten.

Fig. 17.



Finden umgekehrt die genannten Winkelgleichheiten statt, so sind AB und CD parallel.

79) Man teilt die genannten acht Winkel der Fig. 17 in gewisse Gruppen ein. 1) β, α_2, β_3, α_1 liegen zwischen den Parallelen und werden daher innere Winkel genannt, die übrigen sind äußere Winkel. 2) Winkel wie α und α_1, die paarweise gleichgerichtete Schenkel haben, nennt man gleichliegende Winkel, auch korrespondierende Winkel (d. h. einander entsprechende), wohl auch Gegenwinkel.*) Die betreffenden Paare sind α und α_1, α_2 und α_3, β_1 und β_3, β und β_1. 3) Winkel mit entgegengesetzten Schenkeln, die aber nicht Scheitelwinkel sind, heißen Wechselwinkel. Die betreffenden Paare sind: α und α_3, α_2 und α_1, β und β_3, β_1 und β_2. 4) Winkel mit einem gleichgerichteten und einem entgegengesetzt gerichteten Schenkelpaare, die aber keine Nebenwinkel sind, bezeichnet man als entgegengesetzte Winkel.**) Die betreffenden Paare sind: α und β_1, β und α_1, β_1 und α_3, α_1 und β_3.

(Man kann diese Winkelgruppen auch so definieren, daß die Winkel entweder auf derselben Seite der die Parallelen schneidenden Geraden, oder auf verschiedenen Seiten liegen, daß sie ferner zugleich äußere bezw. zugleich innere Winkel sind, oder daß sie nicht zugleich innere bezw. äußere sind. Diese Definitionen sollen dem Schüler überlassen werden.)

80) Über diese Winkelpaare lassen sich nach obigem folgende Sätze aussprechen:

*) Diese allgemein übliche Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt.

**) Auch diese Bezeichnung ist nicht glücklich gewählt, aber sie ist allgemein gebräuchlich. Sie soll beibehalten werden, weil diese Winkel von geringerer Bedeutung sind.

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei gleichliegende Winkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich, je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zusammen zwei Rechte.

Umgekehrt: Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, und sind dabei zwei gleichliegende Winkel gleich, oder sind zwei Wechselwinkel gleich, oder betragen zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte, so sind die beiden ersten Geraden parallel.*)

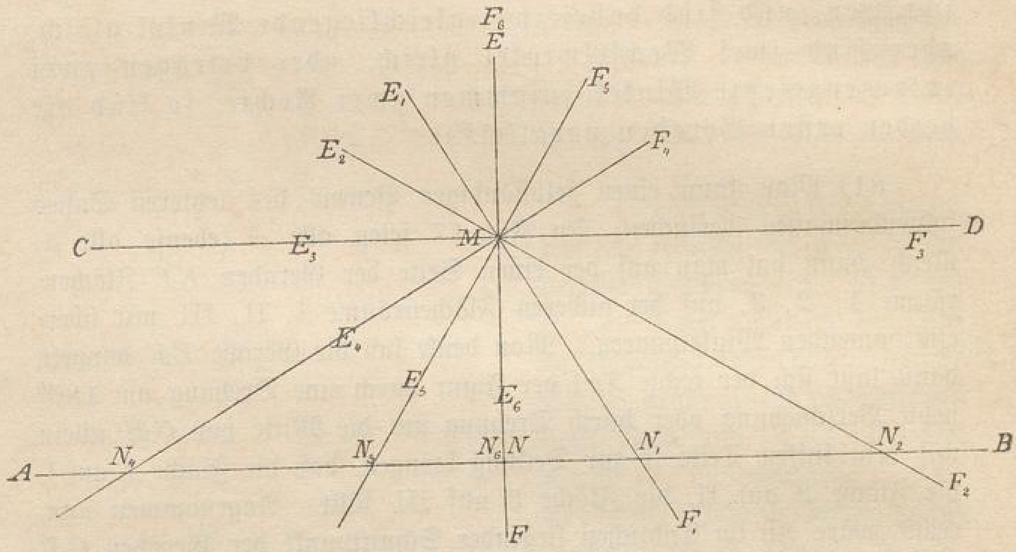
81) Man kann einen selbständigen Beweis des letzteren Satzes folgendermaßen versuchen: In Fig. 17 seien alle α (ebenso alle β) gleich, dann hat man auf der einen Seite der Geraden EF Flächenräume 1, 2, 3, auf der anderen Flächenräume I, II, III mit übereinstimmenden Winkelpaaren. Man denke sich die Gerade EF doppelt, dann läßt sich der rechte Teil der Figur durch eine Drehung um 180^0 nebst Verschiebung oder durch Drehung um die Mitte von GH allein mit dem linken Teile so zur Deckung bringen, daß die Fläche 1 auf I, die Fläche 2 auf II, die Fläche 3 auf III fällt. Angenommen nun, rechts wäre ein im Endlichen liegender Schnittpunkt der Geraden GB und HD vorhanden, so müßte er bei der Deckung mit einem dann notwendig vorhandenen Schnittpunkte der Geraden HC und GA zusammenfallen. Dann aber hätte man zwischen zwei endlichen Punkten zwei getrennte Geraden, was unmöglich ist. Demnach kann weder rechts noch links von der schneidenden Geraden ein im Endlichen liegender Schnittpunkt möglich sein, folglich sind AB und CD parallel.

82) Das gegenseitige Verhalten zweier Parallelen läßt sich noch auf folgendem Wege verdeutlichen. In Fig. 18 ist eine feste Gerade AB und eine um M drehbare Gerade dargestellt. Die Anfangslage der letzteren sei EF. Bewegt sich EF linksdrehend um M, so nimmt die Gerade z. B. die Lagen E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, ... E_6F_6 an, wobei sie eine halbe Umdrehung gemacht hat und sich entgegengesetzt zur Anfangslage befindet. Dabei ist der Durchschnittspunkt N mit der festen Geraden auf dieser über N_1 und N_2 nach unendlicher Entfernung gewandert, die der Lage E_3F_3 entspricht. Dann ist er plötzlich nach einem in entgegengesetzter Richtung liegenden unendlich fernen Punkte übergesprungen und von dort her über N_4, N_5 nach N_6, d. h.

*) Es ist gerechtfertigt, auch dann von gleichliegenden Winkeln usw. zu sprechen, wenn die beiden Geraden nur nahezu parallel sind. Die Behauptung des Parallelismus rechtfertigt die Benennung.

in die Anfangslage N zurückgelangt. Macht von jetzt ab die Linie noch eine Drehung von 180^0, so wiederholt sich der Vorgang und EF kommt in die eigentliche Anfangslage und Anfangsrichtung zurück.

Fig. 18.



Überall also ist die Bewegung von N eine ununterbrochene, nur beim Passieren der parallelen Lage macht der Schnittpunkt auch bei der geringsten Drehung einen unendlich großen Sprung.

[83)*) Dies führt auf die Frage, wie man sich das Verhalten der Parallelen im Unendlichen selbst denken soll. Der Satz, daß die beiden Geraden AB und EF für jede Lage einen und nur diesen einen Schnittpunkt haben, wird plötzlich zweifelhaft für den Fall des Parallelismus. Oben wurde absichtlich stets nur gesagt, dabei wäre im Endlichen kein Schnittpunkt vorhanden. Man kann ihn auch für das Unendliche ableugnen; man kann aber auch sagen, er befinde sich im Unendlichen, nur bleibe es zweifelhaft, ob er nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung zu denken sei; man kann aber auf Grund der besprochenen Symmetrie auch behaupten, es seien in unendlichen entgegengesetzten Entfernungen zwei Schnittpunkte vorhanden.

*) Dieser Abschnitt kann vorläufig übergangen werden, muß aber jedenfalls irgendwann zur Sprache kommen. Für den Zeitpunkt ist die Qualität der Schüler entscheidend.

Im Grunde genommen sind alle diese Redewendungen gleichberechtigt, und dies kann man folgendermaßen aufklären. Weil in Fig. 17 $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ ist, sagt man, die beiden Parallelen GB und HD hätten gegen die Gerade EF denselben Richtungsunterschied. Daher ist die Behauptung berechtigt, sie hätten dieselbe Richtung.

Denkt man sich einmal, die beiden Geraden hätten im Unendlichen denselben Abstand wie im Endlichen, so bedeutet dies den Richtungsunterschied Null; denkt man sich, sie hätten dort einen Schnittpunkt, so bedeutet dies einen unendlich kleinen Richtungsunterschied, dessen Folgen im Endlichen durchaus nicht wahrnehmbar sein können. Beide Annahmen bedeuten also für die nur im Endlichen arbeitende Mathematik ganz dasselbe. Ob das eine, ob das andere der Fall ist, ein Richtungsunterschied oder eine Änderung des Abstandes ist im Endlichen nicht wahrnehmbar.

Für die nur im Endlichen arbeitende Mathematik gilt daher auch der Satz, daß durch einen endlichen Punkt nur eine einzige Parallele gelegt werden könne, mit voller Bestimmtheit. Für die mit dem Unendlichen arbeitende Mathematik wird aber der Satz zweifelhaft, denn es können für das Unendliche die Fälle des Schneidens und des Nichtschneidens nicht auseinander gehalten werden. Man kann sogar für das Unendliche den Fall eines Auseinandergehens annehmen, ohne daß die Geltung jenes Satzes im Endlichen gestört wird. Daraus ergibt sich, daß dem Satze eine Geltung für das Unendliche sowohl zugesprochen, als auch abgesprochen werden kann; streng beweisen läßt er sich dafür nicht.

Euklid hat dies erkannt. Trotzdem sprach er ihn mit Bestimmtheit aus, jedoch ohne Beweis. Er sprach ihn aus als ein Axiom, d. h. als eine selbstverständliche aber unbeweisbare Annahme. Er dachte sich eben seinen mathematischen Raum so, daß der Satz Geltung haben sollte.*) Wir gehen sicher, wenn wir ihn vorläufig als für das Endliche geltend annehmen.]

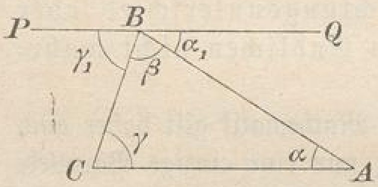
*) Zahlreiche, auch bedeutende Mathematiker haben versucht, diesen Satz und die obigen Parallelensätze in ihrer vollen Geltung zu beweisen. Stets aber wurde von anderen nachgewiesen, daß der angebliche Beweis Trugschlüsse enthielt. Im allgemeinen verwechselte man den wirklichen Weltraum mit dem mathematischen Raume, den man sich willkürlich als den des Euklid, aber auch anders denken kann, ohne daß für die Mathematik des Endlichen Unterschiede entstehen. So kann man sich z. B. die endliche Ebene als ein Stück einer unendlich großen Kugelfläche denken, dann aber läuft die so gedachte Ebene im Unendlichen in sich zurück. Zwei Parallelen verhalten sich dann wie zwei Meridiane, die einander in den beiden unendlich fernen Polen schneiden. Man

β) Die Winkelsumme des Dreiecks.

84) Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten. Im Vorkursus wurde dieser Satz zunächst für rechtwinklige Dreiecke abgeleitet, die sich stets als eine diagonale Hälfte gewisser Rechtecke betrachten lassen; dann für gleichschenklige Dreiecke, dann für allgemeine Dreiecke. Mit Hilfe der Parallelenlehre läßt er sich für Dreiecke von endlicher Größe folgendermaßen beweisen:

Man denke sich beim Dreieck ABC durch den Punkt B eine Parallele PQ zur Seite CA gelegt. Bezeichnet man die Winkel bei A, B und C (Fig. 19) als α, β und γ, die beiden durch die Parallele entstandenen Winkel mit α_1 und γ_1, so sind die Wechselwinkel α und α_1 einander gleich, ebenso die Wechselwinkel γ und γ_1, also stimmen die Winkelsummen $(\alpha + \beta + \gamma)$ und $(\alpha_1 + \beta + \gamma_1)$ überein. Die letztere Summe ist aber gleich dem gestreckten Winkel PBQ, also gleich zwei Rechten, daher ist auch die Summe $(\alpha + \beta + \gamma)$ gleich zwei Rechten.

Fig. 19.



[Auch dieser Satz gilt, streng genommen, nur für endliche Dreiecke. Gauß hat es für nötig gehalten, ihn für ein großes Dreieck, dessen Eckpunkte (trigonometrische Punkte) der Hohagen bei Göttingen, der Brocken und der Inselsberg sind, zu prüfen. Innerhalb der Fehlergrenzen der Instrumente bewährte sich der Satz als richtig. Absolute Gewißheit war damit nicht gewonnen.]

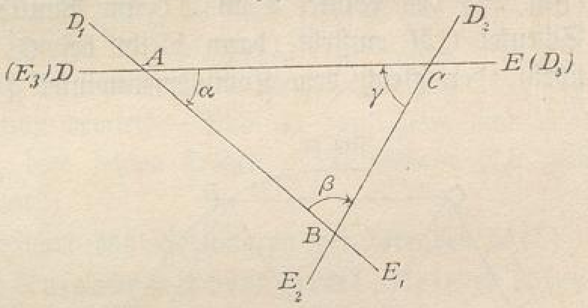
Bemerkungen. 1) Veranschaulichen läßt sich der Satz folgendermaßen: In Fig. 20 ist eine bewegliche Gerade DE auf die Seite AC des gezeichneten Dreiecks gelegt. Diese Gerade soll um den Punkt A gedreht werden, bis sie in die Lage von AB gelangt und als D_1E_1 erscheint. Dabei ist die kleinere der beiden möglichen Drehungen gemeint, die dem Winkel α entspricht. Darauf soll die Gerade ebenso um den Punkt B gedreht werden, bis sie in die Lage von BC gelangt und als D_2E_2 erscheint. Die neue Drehung entspricht dem Winkel β.

---

kann sich aber die endliche Ebene auch als einen Teil einer unendlich großen Drehungsfläche denken, auf der die „Meridiane" im Unendlichen auseinanderlaufen. Daraus ergibt sich die Unbeweisbarkeit des Euklidschen Axioms (für das unendlich ferne Gebiet), das der alte griechische Meister in seinem Scharfsinn richtig als ein solches bezeichnet hat. Eine interessante Frage ist dabei die folgende: Welche geometrischen Sätze sind unabhängig von diesen oder jenen Axiomen des Euklid?

Darauf ist sie ebenso um C zu drehen, bis sie in die Lage von CA gelangt und als D_3E_3 erscheint. Diese Schlußdrehung entspricht dem Winkel γ. Jetzt aber liegt die Gerade auf DE, jedoch hat sie zum ersten Male die der ursprünglichen entgegengesetzte Richtung erhalten. Demnach hat sie sich um 180^0 gedreht, und daher muß $\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 180^0$ sein.*)

Fig. 20.



2) Errichtet man auf einer Geraden AB in den Endpunkten unendlich lange Lote nach derselben Seite, so kann man das Gebilde als ein gleichschenkliges Dreieck mit unendlich langen Schenkeln betrachten. Die beiden Basiswinkel sind dabei Rechte, der dritte Winkel ist nach Euklid gleich Null.

3) Legt man durch die Endpunkte einer Geraden AB unendlich lange parallele Strahlen, die auf der einen Seite der Geraden liegen, so kann man das Gebilde als ein ungleichschenkliges Dreieck betrachten, dessen eine Seite AB ist, während die beiden anderen unendlich lang sind. Die Summe der Winkel A und B ist dabei gleich zwei Rechten, der dritte Winkel ist nach Euklid gleich Null.

γ) Einige Folgerungen der Parallelensätze.

85) Das gleichseitige Dreieck läßt sich auf drei Arten als gleichschenklig betrachten. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich. Folglich sind die sämtlichen Winkel des gleichseitigen Dreiecks einander gleich, und jeder ist gleich $\frac{180^0}{3} = 60^0$.

Nun läßt sich aber der Winkel $60^0 = \frac{360^0}{6}$ genau sechsmal um einen Punkt legen. Folglich lassen sich sechs gleichseitige Dreiecke von derselben Größe so aneinanderlegen, daß sie ein regelmäßiges Sechseck bilden (Fig. 21). Diesem läßt sich ein Kreis umbeschreiben, wobei der Radius gleich den Seiten der gleichseitigen Dreiecke ist. Folglich:

Trägt man in einen Kreis den Radius mehrfach als Sehne ein, so schließt sich die Reihe mit der sechsten Sehne.

---

*) Man veranschauliche den Satz mittels eines einseitig bezeichneten Lineals oder mit der Reißschiene an der Wandtafel, wobei sich die entgegengesetzte Schlußlage sehr deutlich zeigt.

Jeder Winkel des regelmäßigen Sechsecks beträgt 120^0, jeder seiner Zentriwinkel 60^0. Es besitzt sechs Symmetrielinien.

86) Die Summe der beiden spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck ist gleich einem Rechten. (Sie sind Komplementwinkel.) Warum?

Daraus ergibt sich folgendes: Man denke sich im Dreieck ABC (Fig. 22) den Winkel α an AC im Punkte C angelegt, wodurch der Schenkel CM entsteht, dann bleibt bei C der Komplementwinkel β_1 übrig, der gleich dem Komplementwinkel β sein muß. Aus $\alpha = \alpha_1$

Fig. 21.

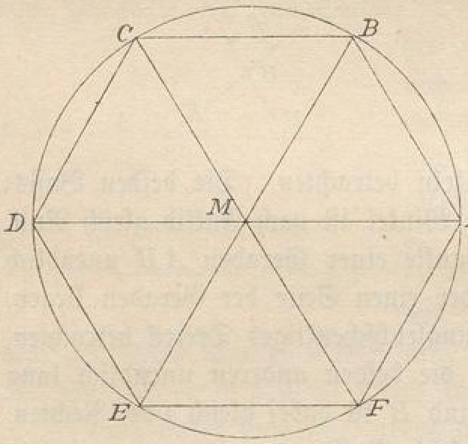
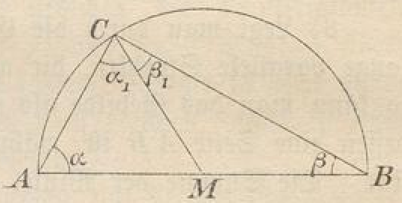


Fig. 22.



folgt, daß AMC ein gleichschenkliges Dreieck ist. Aus $\beta = \beta_1$ folgt, daß BCM ein gleichschenkliges Dreieck ist. Daraus folgt $AM = CM = BM$. Demnach ist AB durch M halbiert, und schlägt man mit dem Radius MA um M einen Kreis, so geht dieser durch A, B und C.

Man bezeichnet allgemein die Schenkel des rechten Winkels am rechtwinkligen Dreieck als Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als Hypotenuse des Dreiecks. Der gefundene Satz läßt sich daher folgendermaßen aussprechen:

Beim rechtwinkligen Dreieck hat der umbeschriebene Kreis seinen Mittelpunkt in der Mitte der Hypotenuse. Oder:

Der umbeschriebene Kreis des rechtwinkligen Dreiecks hat die Hypotenuse zum Durchmesser.

Umgekehrt: Zeichnet man über dem Durchmesser eines Kreises ein Dreieck, welches den dritten Eckpunkt in der Kreislinie hat, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges.

Beweis. In Fig. 22 ist $MA = MC$, folglich $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$. Außerdem ist $MB = MC$, folglich $\sphericalangle \beta = \beta_1$. Demnach ist $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$. Die Summe der vier Winkel ist aber gleich 180^0, folglich ist $\alpha_1 + \beta_1 = 90^0$, d. h $\sphericalangle ACB$ ein Rechter.

Der Satz wird gewöhnlich abgekürzt folgendermaßen ausgesprochen: Der Winkel im Halbkreise ist ein Rechter. (Sehr einfach ergibt sich daraus, daß sich um den Schnittpunkt M der Diagonalen eines Rechtecks ein Kreis legen läßt, der durch die Ecken des Rechtecks geht.)

Aufgabe. Auf einer Geraden AC im Endpunkte (oder in einem beliebigen Punkte) ein Lot zu errichten.

Auflösung. Man schlage um A und C Kreisbogen von demselben (beliebigen) Radius, die einen Punkt M geben (Fig. 22), und um M einen Kreisbogen von demselben Radius; dann ziehe man AM bis zum Schnitte B mit dem letzten Bogen. Die Gerade CB gibt das gesuchte Lot. (Warum?)

(Die Konstruktion erspart das Verlängern der Geraden AC.)

Aufgabe. Dieselbe Aufgabe mit dem Zirkel allein zu lösen.

Auflösung. Man schlage mit CA um C einen Kreisbogen, trage auf diesem zweimal hintereinander dieselbe Zirkelöffnung ab und schlage mit ihr um die beiden Teilpunkte D und E Kreisbogen, die einander in einem Punkte B schneiden. Durch C und B ist das gesuchte Lot vollständig bestimmt. (Warum? Vgl. das regelmäßige Sechseck.)

87) Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks sei gleich γ. Wie groß ist jeder Basiswinkel α? Antwort: $\alpha = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$.

Beweis. $\alpha + \alpha + \gamma = 180^0$ oder $2\alpha + \gamma = 180^0$, also $2\alpha = 180^0 - \gamma$, also $\alpha = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$. — (Daraus folgt ferner $\frac{\gamma}{2} = 90^0 - \alpha$, also $\gamma = 180^0 - 2\alpha$ als Winkel an der Spitze, wenn α der Basiswinkel ist.)

Aufgabe. Wie groß ist jeder Winkel des regelmäßigen Fünfecks?

Auflösung. Der Zentriwinkel des Fünfecks ist gleich $\frac{360^0}{5} = 72^0$, der Basiswinkel des zugehörigen gleichschenkligen Dreiecks ist also gleich $90^0 - \frac{72^0}{2} = 90^0 - 36^0 = 54^0$. Jeder Winkel des regelmäßigen Fünfecks besteht aus zwei solchen Winkeln, ist also gleich 108^0.

[Für das regelmäßige n-Eck folgt: Zentriwinkel $= \frac{360^0}{n}$, Basiswinkel des zugehörigen gleichschenkligen Dreiecks $= 90^0 - \frac{180^0}{n}$, folglich der doppelt so große n-Eckswinkel $= 180^0 - \frac{360^0}{n}$, wobei $n > 2$ zu denken ist.]

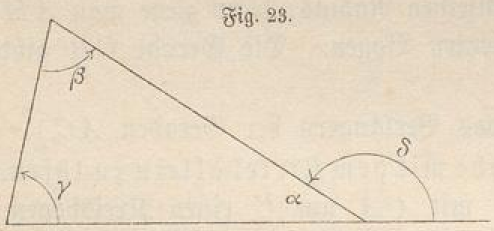
88) Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so stimmen sie auch im dritten überein. Sind nämlich α, β, γ die Winkel des einen Dreiecks, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die des anderen, und ist

$\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$, so ist in dem einen Dreiecke $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, im anderen $\gamma_1 = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1)$, also muß $\gamma = \gamma_1$ sein. (Warum?)

89) Unter einem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man einen Winkel, der durch Verlängerung einer der Seiten des Dreiecks entsteht. Von ihm gilt der Satz:

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der an den beiden anderen Ecken liegenden Dreieckswinkel.

Fig. 23.



Beweis. In Fig. 23 ist δ ein Außenwinkel, α, β, γ sind die Dreieckswinkel. Dabei ist $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$, auch $\delta = 180^0 - \alpha$, also $\delta = \beta + \gamma$.

Bemerkung. Eine durch den Scheitel von α gelegte Parallele zur Gegenseite zerlegt δ in die beiden Bestandteile β und γ. Die Summe aller sechs Außenwinkel des Dreiecks ist gleich vier Rechten.

90) Wie groß ist die Summe der Winkel im unregelmäßigen n-Eck?*) Antwort: Denkt man sich einen Punkt P im Innern des n-Ecks mit dessen Ecken verbunden, so entstehen n Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke hat als Winkelsumme zwei Rechte, alle Dreiecke zusammen haben also die Winkelsumme $2n$ Rechte. Davon sind vier Rechte abzuziehen als Summe der Winkel, die um P herumliegen, für das n-Eck bleibt daher als Winkelsumme $(2n - 4)$ Rechte.

Beispiele. Winkelsumme des Vierecks $(2 \cdot 4 - 4) = 4$ Rechte. Winkelsumme des Fünfecks $(2 \cdot 5 - 4) = 6$ Rechte. Winkelsumme des Sechsecks $(2 \cdot 6 - 4) = 8$ Rechte. Winkelsumme des Siebenecks $(2 \cdot 7 - 4) = 10$ Rechte. Jedes folgende hat zwei Rechte mehr.

Bemerkung. Die Summe aller 8 Außenwinkel des Vierecks beträgt 8 Rechte. Wie ist es bei dem konvexen n-Eck?

91) Halbiert man bei zwei Parallelen, die von einer Geraden geschnitten werden, gleichliegende Winkel oder Wechselwinkel, so werden die Halbierenden parallel; halbiert man entgegengesetzte Winkel, so stehen die Halbierenden aufeinander senkrecht. (Beweis dem Schüler zu überlassen.)

92) Winkel, deren Schenkel gleichgerichtet parallel sind, sind einander gleich. Winkel, deren Schenkel entgegengesetzt gerichtet parallel

*) Es sei zunächst vorausgesetzt, daß das n-Eck überall konvex ist, daß also jeder seiner Winkel kleiner als 180^0 ist.

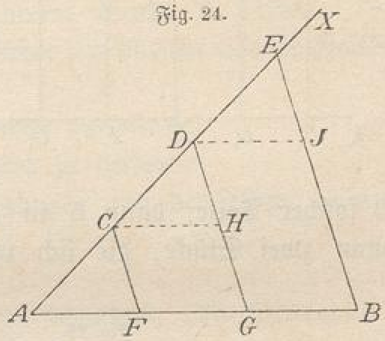
sind, sind einander gleich. Winkel mit parallelen Schenkeln, von denen ein Paar gleichgerichtet, ein Paar entgegengesetzt gerichtet ist, betragen zusammen zwei Rechte. (Beweis dem Schüler zu überlassen. Der Satz gilt auch von Nebenwinkeln.)

Fällt man von einem Punkte aus, der außerhalb eines Winkels und seines Scheitelwinkels liegt, Lote auf dessen Schenkel, so bilden diese Lote einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist. Fällt man sie von einem Punkte aus, der innerhalb des gegebenen Winkels oder seines Scheitelwinkels liegt, so bilden sie den Supplementwinkel des gegebenen Winkels.

93) **Aufgabe.** Eine gegebene Gerade in 3, 5 oder in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu zerlegen.*)

Auflösung. In Fig. 24 sei AB die in drei gleiche Teile zu zerlegende Gerade, dann ziehe man eine beliebig gerichtete Gerade AX und trage auf dieser mit beliebiger Zirkelöffnung gleiche Stücke AC, CD und DE ab. Jetzt verbinde man E mit B und lege durch D und C Parallelen zu EB, die auf AB Teilpunkte G und F geben. Dann ist $AF = FG = GB$.

Fig. 24.



Beweis. Um die letzte Behauptung zu beweisen, lege man durch D und E Parallelen zu AB, sodaß Dreiecke DEJ und CDH entstehen. Für diese Dreiecke ist $CD = DE$, auch stimmen ihre Winkel bei C und D, bei H und J, bei D und E überein. (Weshalb?) Es wird behauptet, daß die beiden Dreiecke sich zur Deckung bringen lassen. Man kann nämlich DE so auf CD legen, daß dabei die gleichen Winkel EDJ und DCH einander decken, daß ferner die gleichen Winkel DEJ und CDH einander decken. Weil dies der Fall ist, so müssen dabei auch die Punkte J und H zusammenfallen, denn zwei einander deckende Paare von Geraden müssen denselben Schnittpunkt haben. Demnach muß $DJ = CH$ sein.

Weil aber Parallele zwischen Parallelen gleichlang sind, ist $GB = DJ$ und ebenso $FG = CH$. Demnach muß auch $FG = GB$ sein. (Warum?)

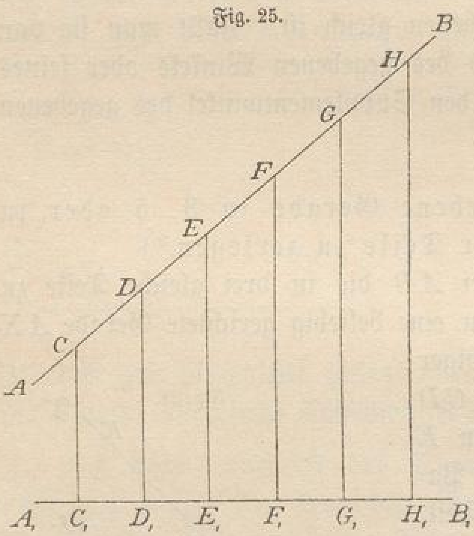
---

*) Diese Aufgabe, bei der es sich um kongruente Dreiecke handelt, wird vorausgeschickt, um eine Reihe von Konstruktionen zu ermöglichen.

Ebenso ist zu beweisen, daß sich Dreieck DEJ mit dem Dreieck ACF zur Deckung bringen läßt, und daß daher auch $AF = DJ$ und folglich auch $AF = GB$ ist. Es ist also, wie behauptet wurde, $AF = FG = GB$.

Folgerung. Ist eine Gerade in gleiche Teile geteilt, und zieht man von den Teilpunkten aus Parallelen bis zu einer anderen Geraden, so wird auch diese in gleiche Teile zerlegt.

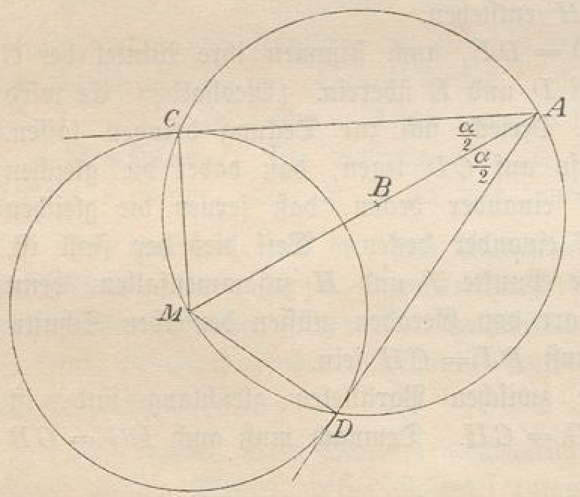
Fig. 25.



Der Beweis wird mit Hilfe ebensolcher Dreiecke geführt wie vorher. —

Sind die Parallelen Lote auf der zweiten Geraden, so sagt man, die Teilpunkte der ersten seien auf die zweite Gerade pro= jiziert. Dies ist in Fig. 25 dargestellt. Also gilt der Satz: Die Projektion gleicher Teile einer Geraden auf eine andere Gerade gibt auf dieser gleiche Teile. Zählt man bei der einen Geraden erst 3 solcher Teile, dann 5 in aufeinander folgender Reihe ab, so hat man zwei Stücke, die sich verhalten wie 3 zu 5. Legt man durch die Endpunkte Parallelen bis zur zweiten Geraden, so erhält man auch dort zwei Stücke, die aus 3 bezw. 5 gleichen Teilen bestehen. Auch von diesen Stücken sagt man, sie verhielten sich wie 3 zu 5. Daher sagt man allgemein: Alle Geraden, die durch drei Parallelen gezogen werden, sind in demselben Verhältnis geteilt, nämlich im Verhältnis der Abstände der Parallelen.

Fig. 26.



94) **Aufgabe.** Von einem außerhalb eines (gegebenen) Kreises gegebenen Punkte an den Kreis Tangenten zu legen.

Auflösung. In Fig. 26 sei M der gegebene Kreis*), A der gegebene Punkt. Man ziehe die Gerade AM, halbiere sie, was B gibt und lege um B mit der Zirkelöffnung BM einen Kreis, der den ersten Kreis in C und D schneidet. Die Geraden AC und AD geben die gesuchten Tangenten.

Beweis. Der Winkel ACM ist als Winkel im Halbkreise ein Rechter, also ist CA das im Endpunkte des Radius MC auf diesem errichtete Lot, d. h. CA ist Tangente des Kreises M. Das Entsprechende findet bei D statt.

d) Konstruktionsübungen.**)

α) Addition und Subtraktion von Geraden, von Winkeln, von Kreisbogen mit demselben Radius.

96) Die Summe dreier oder mehrerer gegebener***) Geraden zu bilden.

97) Die Summe dreier oder mehrerer Winkel zu bilden.

98) Die Summe dreier oder mehrerer Kreisbogen von demselben Radius zu bilden.

99) Den Unterschied zweier Geraden zu bilden.

100) Den Unterschied zweier Winkel zu bilden.

101) Den Unterschied zweier Kreisbogen von demselben Radius zu bilden.

β) Vervielfachung und Teilung von Geraden, von Winkeln und von Kreisbogen.

102) Eine Gerade auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Länge zu bringen.

103) Einen Winkel auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Größe zu bringen.

104) Einen Kreisbogen auf das Doppelte, Dreifache, Vierfache usw. zu bringen.

105) Eine Gerade in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen. (Zwei Lösungsarten sind anzugeben.)

106) Eine Gerade in beliebig viele gleiche Teile zu zerlegen.

107) Beliebige Bruchteile einer Geraden zu bilden, z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ usw.

---

*) Man bezeichnet den gegebenen Kreis häufig nur mit seinem Mittelpunkte.

**) Einige der schon gelösten Aufgaben werden der leichteren Übersicht wegen noch einmal genannt.

***) Das Wort „gegeben" soll von jetzt ab weggelassen werden.

108) Einen Winkel in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen.*)

109) Einen Kreisbogen in 2, 4, 8, 16, 32 usw. gleiche Teile zu zerlegen.

110) Eine Gerade im Verhältnis 2 : 3 (zwei zu drei) zu teilen. (Man teile sie in 5 gleiche Teile. Zählt man 2 davon ab, so hat man den gesuchten Teilpunkt.)

111) Eine Gerade in einem beliebigen ganzzahligen Verhältnis zu teilen.

112) Eine Gerade so zu verlängern, daß sie sich zum Zusatzstück verhält wie 3 : 5. (Man teile sie in 3 Teile und verlängere sie um 5 solcher Teile.)

113) Einen Winkel so zu vergrößern, daß er sich zum Zusatzwinkel verhält wie 2 : 3. (Man halbiere den Winkel und addiere zu ihm das Dreifache einer Hälfte.)

114) So kann man einen Winkel derart vergrößern, daß er zum Zusatzteile im Verhältnis $2:n$, $4:n$, $8:n$, $16:n$ usw. steht, wobei n eine ganze Zahl ist.

115) Die Aufgaben 113) und 114) lassen sich auch für Kreisbogen ausführen.

γ) Konstruktion für gewisse Reihen von Winkeln.

116) Die Winkelreihe $\cdots 360^0, 180^0, 90^0, 45^0, \frac{45^0}{2}, \frac{45^0}{4}, \frac{45^0}{8}, \cdots$ zu konstruieren.

117) Die Winkelreihe $\cdots 240^0, 120^0, 60^0, 30^0, 15^0, \frac{15^0}{2}, \frac{15^0}{4}, \cdots$ zu konstruieren.

118) Die dreifachen, fünffachen, siebenfachen usw. Winkel der Reihen 116) und 117) zu konstruieren.

119) Durch Addition und Subtraktion das Anfangsglied für andere Reihen konstruierbarer Winkel aufzufinden, z. B.

$$330^0,\ 165^0,\ \frac{165^0}{2},\ \frac{165^0}{4},\ \cdots$$

$$300^0,\ 150^0,\ 75^0,\ \frac{75^0}{2},\ \frac{75^0}{4},\ \cdots$$

$$210^0,\ 105^0,\ \frac{105^0}{2},\ \frac{105^0}{4},\ \cdots$$

*) Andere Teilungen beliebiger Winkel sind mit Lineal und Zirkel aus später darzulegenden Gründen nicht durchführbar. Für gewisse Winkel ist aber die Dreiteilung möglich, z. B. für die Winkel 360°, 180°, 90°, für gewisse wird später die Fünfteilung gelehrt usw. Von den Teilungen beliebiger Kreisbogen gilt dasselbe.

δ) Konstruktion gewisser Kreisteilungen und regelmäßiger Vielecke.

120) Einen Kreis in 2, 4, 8, 16, 32, ... gleiche Teile zu zerlegen.

121) Einen Kreis in 3, 6, 12, 24, 48, ... gleiche Teile zu zerlegen

122) Einem Kreise ein regelmäßiges 4-Eck, 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck, ... einzubeschreiben.

123) Einem Kreise ein regelmäßiges 3-Eck, 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, ... einzubeschreiben. (ACE in Fig. 21 ist ein gleichs. Dreieck.)

124) Einem Kreise ein regelmäßiges 4-Eck, 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck, ... umzubeschreiben.

125) Einem Kreise ein regelmäßiges 3-Eck, 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, ... umzubeschreiben.

126) Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 4-Eck, 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck, ... zu konstruieren.*)

127) Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 3-Eck, 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, ... zu konstruieren.*)

128) Die Aufgaben 122) und 124) bezw. 123) und 125) so zu vereinigen, daß die Seiten des umbeschriebenen Vielecks denen des einbeschriebenen parallel werden.

129) Dieselben Aufgaben so zu vereinigen, daß die Seiten des umbeschriebenen Vielecks durch die Ecken des einbeschriebenen gehen.

130) Den Mittelpunkt eines gegebenen regelmäßigen Vielecks zu finden und dessen ein- und dessen umbeschriebenen Kreis zu konstruieren.

ε) Übungen mit regelmäßigen Vielecken.

131) Die Ebene lückenlos mit gleichseitigen Dreiecken von derselben Größe zu belegen.

132) Die Ebene lückenlos mit Quadraten von derselben Größe zu belegen.

133) Die Ebene lückenlos mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe zu belegen.

---

*) Quadrat, gleichseitiges Dreieck, regelmäßiges Sechseck über einer gegebenen Geraden sind leicht zu konstruieren. Bei größerer Anzahl der Seiten konstruiere man zunächst das gleichschenklige Dreieck mit dem zugehörigen Zentriwinkel. Beim Achteck z. B. ist der Zentriwinkel gleich $\frac{360^0}{8} = 45^0$, der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks also gleich $90^0 - \frac{45^0}{2} = 67\frac{1}{2}^0$, was leicht zu konstruieren ist. Dann lege man um die Spitze des Dreiecks einen durch die Endpunkte der gegebenen Geraden gehenden Kreis, in den sich die Gerade achtmal als Sehne eintragen läßt, wenn man richtig gezeichnet hat.

134) Die Ebene mit regelmäßigen Achtecken von derselben Größe so zu belegen, daß Quadrate von derselben Seitenlänge übrig bleiben.

135) Die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe so zu belegen, daß gleichseitige Dreiecke von derselben Seitenlänge übrig bleiben. (Auf jeder Sechsecksseite steht ein solches Dreieck.)

136) Die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken von derselben Größe so zu belegen, daß Rhomben von derselben Seitenlänge und von den Winkeln 60^0 und 120^0 übrig bleiben.

137) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein kleineres von gegebener Größe so einzuzeichnen, daß die Ecken des kleineren auf die Seiten des größeren fallen.*) Wann hat die Aufgabe zwei Lösungen, wann nur eine, wann keine?

138) Um ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein größeres von gegebener Seite so zu legen, daß die Seiten des letzteren durch die Eckpunkte des ersteren gehen.**) Wann hat die Aufgabe zwei Lösungen, wann nur eine, wann keine?

139) Die Aufgabe 137) für zwei Quadrate zu lösen.

140) Die Aufgabe 138) für zwei Quadrate zu lösen.

141) Die Aufgabe 137) für zwei regelmäßige Sechsecke oder Achtecke usw. zu lösen.

142) Die Aufgabe 138) für zwei regelmäßige Sechsecke oder Achtecke usw. zu lösen.

ξ) Zwei Hindernisaufgaben.

143) **Eine gerade Linie über ein gegebenes Hindernis hinaus zu verlängern.**

[Es kommt vor, daß auf dem Fußboden einer Werkstätte eine Gerade gezogen werden soll, die über eine im Wege stehende Maschine hinaus zu verlängern ist; oder daß eine geplante Straße abgesteckt werden soll, obwohl ein wegzureißendes Gebäude noch steht. Man begnüge sich mit folgender vorläufiger Lösung: Man umgehe das

*) Die Mitten beider Dreiecke müssen aufeinander fallen. Man zeichne das kleinere Dreieck irgendwo für sich, bilde den Radius seines umbeschriebenen Kreises, und lege mit diesem einen Kreis um den Mittelpunkt des gegebenen (größeren) Dreiecks. Ist der Radius groß genug, so erhält man sechs Schnittpunkte mit den Seiten des letzteren, welche zwei gleichseitige Dreiecke geben.

**) Man zeichne das größere Dreieck irgendwo für sich, bilde die Radien der ihm ein- und umbeschriebenen Kreise und lege mit diesen Kreise um den Mittelpunkt des gegebenen (kleineren) Dreiecks. Ragen die Spitzen des letzteren über den kleineren hinaus, so lassen sich von ihnen aus an diesen Kreis sechs Tangenten legen, von den je drei einem der zu zeichnenden Dreiecke angehören. Die Tangenten enden auf dem größeren Kreise.

Hindernis durch drei Seiten eines Rechtecks, die sich um das Hindernis herumlegen lassen und konstruiere statt der vierten Seite ihre Verlängerung als Lot auf der dritten.

Statt der drei Rechtecksseiten kann man auch zwei Seiten eines gleichseitigen oder gleichschenkligen Dreiecks benutzen, die das Hindernis umgehen.

Später wird eine von Winkeln unabhängige Konstruktion gelehrt.]

144) Den jenseits eines Hindernisses liegenden Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen.

[Die Geraden sind (zunächst nach der vorigen Methode) über das Hindernis hinaus zu verlängern. Dann ist der Schnittpunkt leicht zu bestimmen.]

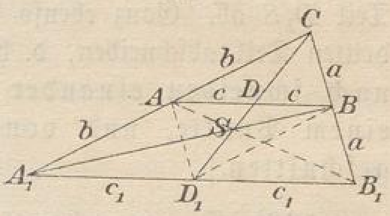
Bemerkung. Ist das Hindernis z. B. ein Fluß, der nicht umgangen werden kann, so benutzt der Landmesser Stäbe, von denen zwei auf der zu verlängernden Geraden senkrecht in die Erde gestoßen werden, während ein dritter Stab jenseits des Flusses so eingestellt wird, daß er dem über den ersten Stab hinblickenden Beobachter durch den zweiten Stab verdeckt wird. So findet man einen ersten Punkt für die Verlängerung der Geraden, einen zweiten kann man in derselben Weise bestimmen. In ähnlicher Weise kann mit der zweiten Aufgabe verfahren werden.

η) Einfache Vergrößerungs- und Verkleinerungsaufgaben.*)

145) Ein gegebenes Dreieck im doppelten Maßstabe zu zeichnen.

Auflösung. Ist in Fig. 27 ABC das gegebene Dreieck, so verlängere man CA über A hinaus um sich selbst, was A_1 gibt. Dann lege man durch A_1 eine Parallele zu AB, welche die Verlängerung von CB in einem Punkte B_1 schneidet. Dann ist A_1B_1C das verlangte Dreieck.

Fig. 27.



Beweis. Weil CA_1 in A halbiert und $A_1B_1 \parallel AB$ ist, so ist auch CB_1 in B halbiert, d. h. CB_1 ist doppelt so groß als CB. Zieht man ferner die Gerade $BD_1 \parallel AA_1$, so ist AB gleich A_1D_1, denn Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich. Weil aber CB_1 in B hal-

*) Eigentlich gehören solche Aufgaben in die Ähnlichkeitslehre. Um jedoch die Konstruktionsübungen mannigfaltiger zu machen, sind sie schon hier eingeschaltet worden.

biert und $BD_1 \parallel CA_1$ ist, so ist auch A_1B_1 in D_1 halbiert, also ist $AB_1 = 2 \cdot A_1D_1 = 2 \cdot AB$. Alle Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind also doppelt so groß als die Dreiecks ABC. Zugleich sind alle Winkel des Dreiecks A_1B_1C gleich den entsprechend liegenden Winkel des Dreiecks ABC. (Warum?)

Bemerkungen. Die Auflösung kann folgendermaßen umgestaltet werden. Man verlängere CA über A hinaus um sich selbst, ebenso CB über B hinaus um sich selbst und verbinde die neuen Endpunkte A_1 und B_1 durch eine Gerade. Diese muß von selbst parallel zu AB und doppelt so lang wie AB werden. —

Zum Beweise konnte man auch $AD_1 \parallel CB_1$ ziehen.

Dann hat man vier übereinstimmende Dreiecke und sieht daraus, daß der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C viermal so groß ist als der von ABC.

Sind also die Seiten eines Dreiecks doppelt so groß wie die eines anderen, so haben beide Dreiecke dieselben Winkel und der Inhalt des größeren Dreiecks ist das Vierfache von dem des kleineren.

[In der Figur ist ganz ebenso Dreieck A_1SC die Vergrößerung des Dreiecks BSD_1 auf den doppelten Maßstab; also ist SC das Doppelte von SD_1, und SA_1 das Doppelte von SB. (Die Geraden SB und SD_1 sind jetzt über die Ecke S hinaus verdoppelt gezeichnet worden.) Demnach ist D_1S der dritte Teil von D_1C und BS der dritte Teil von BA_1. (Dies bestätigt sich auch, wenn man durch A und B Parallelen zu CD_1 legt, welche die halbierte Linie A_1B_1 in vier gleiche Teile zerlegen, von denen drei Teile durch Parallelen auf A_1B übertragen werden, sodaß diese Linie in drei gleiche Teile geteilt ist.)

Man nennt die Geraden, die von der Ecke des Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten gehen, Mittellinien des Dreiecks. Die Mittellinie A_1B schneidet also von der Mittellinie CD_1 den dritten Teil D_1S ab. Ganz ebenso muß die Mittellinie B_1A von CD_1 den dritten Teil abschneiden, d. h. sie muß auch durch S gehen. Demnach schneiden einander die Mittellinien des Dreiecks in einem Punkte, und von jeder wird der dritte Teil abgeschnitten.]

146) Ein gegebenes Dreieck im halben Maßstabe zu zeichnen.

Die Auflösung ergibt sich aus Fig. 27 und ist dem Schüler zu überlassen.

147) Ein gegebenes Dreieck im dreifachen Maßstabe zu zeichnen.

Die Auflösung geschieht ähnlich wie bei Aufgabe 145. Sie ist dem Schüler zu überlassen. Dieser soll die Richtigkeit der Konstruktion beweisen und durch Zeichnen geeigneter Parallelen das große Dreieck in neun mit dem gegebenen übereinstimmende Dreiecke zerlegen um so zu zeigen, daß der Flächeninhalt der neunfache des ursprünglichen ist.

148) [Ein gegebenes Dreieck im $n$fachen Maßstabe (wo n eine beliebige ganze Zahl ist) oder im $\frac{3}{2}$fachen Maßstabe, oder im $\frac{3}{4}$fachen Maßstabe, oder im $\frac{m}{n}$fachen Maßstabe (m und n ganze Zahlen) zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt des neuen Dreiecks der n^2fache bezw. $\frac{9}{4}$fache, bezw. $\frac{9}{16}$fache, bezw. der $\left(\frac{m}{n}\right)^2$fache geworden ist.]

149) Ein gegebenes Quadrat im doppelten, dreifachen, vierfachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt der vierfache, bezw. neunfache, bezw. 16fache ist. [Das Quadrat ferner im $\frac{2}{3}$fachen, $\frac{5}{4}$fachen, $\frac{m}{n}$fachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt das $\frac{4}{9}$fache, $\frac{25}{16}$fache, $\left(\frac{m}{n}\right)^2$fache geworden ist.]

150) Ein gegebenes regelmäßiges 6=Eck, oder 8=Eck, oder 12=Eck, oder 16=Eck im doppelten, oder dreifachen, oder vierfachen Maßstabe zu zeichnen und nachzuweisen, daß der Inhalt das 4fache, bezw. 9fache, bezw. 16fache geworden ist.

(Die Auflösung geschieht am einfachsten, indem man um den Mittelpunkt des Vielecks einen Kreis mit dem doppelten, dreifachen, vierfachen Radius des umbeschriebenen Kreises schlägt und die nach den Ecken des ursprünglichen Vielflachs gezogenen Radien bis zum Kreise verlängert, worauf die Sehnen einzutragen sind.

Weil jedes der gleichschenkligen Dreiecke auf das Vierfache, Neunfache, Sechzehnfache des ursprünglichen Inhalts gelangt, so gilt dasselbe auch vom Gesamtinhalte des Vielecks.)

151a) Ein gegebenes Rechteck im doppelten, dreifachen, vierfachen usw. Maßstabe zu zeichnen.

(**Auflösung.** Man zeichne eine Diagonale und bringe sie nach derselben Richtung hin auf die doppelte, dreifache, vierfache usw. Länge. Von den gefundenen Endpunkten fälle man Lote auf die vom Anfangspunkte der Diagonale ausgehenden Rechtecksseiten. Es entstehen so Rechtecke von den Seiten $2a$ und $2b$, $3a$ und $3b$, $4a$ und $4b$ usw. oder, wie man auch sagt, von demselben Seitenverhältnis $a:b$. In allen diesen Rechtecken bildet die Diagonale mit den Rechtecksseiten dieselben beiden Winkel.)

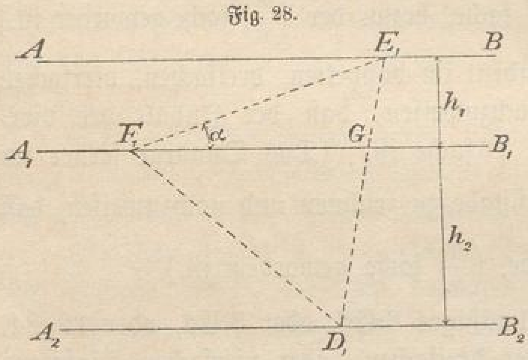
151b) **Ein beliebiges gegebenes Viereck im doppelten Maßstabe zu zeichnen.**

(Die Auflösung ist dem Schüler zu überlassen, der mehrere Wege aufzusuchen hat, z. B. auch den Weg, die Abschnitte der Diagonalen vom Schnittpunkte aus zu verdoppeln, wobei jedes Dreieck auf den vierfachen Inhalt kommt, also auch der Gesamtinhalt vervierfacht wird.)

Auch der dreifache, vierfache usw. Maßstab macht keine Schwierigkeiten.

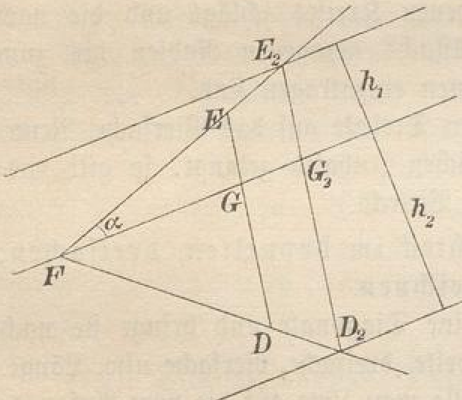
152) [Eine schwierigere Vergrößerungsaufgabe: Gegeben seien drei Parallelen, von denen die beiden letzten den doppelten gegenseitigen Abstand haben wie die beiden ersten. Es soll ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet werden, welches seine Ecken auf den Parallelen hat. Eine seiner Ecken soll vorgeschrieben sein.

Fig. 28.



Auflösung. In Fig. 28 seien AB, A_1B_1, A_2B_2 die Parallelen mit den Abständen h_1 und $h_2 = 2h_1$; F_1 soll der gegebene Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks sein. Man zeichne zunächst irgendwo ein gleichseitiges Dreieck DEF von beliebiger, z. B. kleiner Größe und mache in diesem $EG = \frac{1}{3}ED$ (Fig. 29). Dann verlängere man FE und FD und die zu ziehende Gerade FG über E, D, G hinaus. Zu FG ziehe man Parallele in den entgegengesetzten Abständen h_1 und h_2, welche die verlängerten Dreiecksseiten in E_2 und D_2 schneiden. Zieht man D_2E_2, so hat man ein gleichseitiges Dreieck FD_2E_2, welches den Forderungen genügt und nur noch in die

Fig 29.



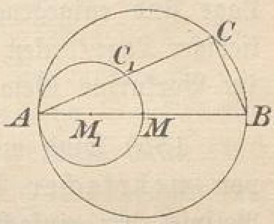
richtige Lage zu bringen ist. Man lege den Winkel $EFG = \alpha$ an A_1B_1 im Punkte F_1 nach der Seite des kleineren Abstandes an, was den Schnittpunkt E_1 gibt und schlage um F_1 mit F_1E_1 einen Kreisbogen, der $A_2 B_2$ in D_2 schneidet. Dann sind $D_1 E_1 F_1$ die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks. (Letzteres kann noch auf eine zweite Art, links von F_1 liegend, gezeichnet werden, wozu nur die Vervollständigung des letzten Kreisbogens nötig ist.)

Der Beweis der Richtigkeit soll dem Schüler überlassen bleiben. Dieser wird dann auch imstande sein, die Aufgabe für beliebige Abstandsverhältnisse zu lösen. — Die Konstruktion kann erheblich abgekürzt werden, denn eigentlich ist die Aufgabe gelöst, sobald man im Hilfsdreieck FG gezogen und den Winkel α in die Hauptfigur übertragen hat.]*)

153) Zeichnet man in einen Kreis einen ihn berührenden vom halben Radius, so ist jede durch den Berührungspunkt gelegte Sehne durch den kleineren Kreis halbiert.

Beweis. Der kleinere Kreis geht durch den Mittelpunkt M des größeren. Ist A Berührungspunkt, so ist AMB ein Durchmesser, der durch die Mitten beider Kreise geht. Wird eine beliebige Sehne AC in C_1 vom kleineren Kreise geschnitten und zieht man CB und C_1M, so sind die Winkel AC_1M und ACB Rechte als Winkel im Halbkreis, also ist $C_1M \parallel CB$; da ferner AB in M halbiert ist, muß auch AC in C_1 halbiert sein.

Fig. 30.



Entsprechendes findet statt mit einem inneren Berührungskreise, dessen Radius der dritte, vierte, n^{te} Teil vom Radius des größeren ist.

Was geschieht, wenn der Berührungskreis außerhalb des gegebenen liegt?

(Der angegebene Satz läßt sich bei vielen Konstruktionsaufgaben anwenden.)

e) Begriff der Symmetrie in der Ebene.

α) Erklärung und Grundgesetze der einfachen und mehrfachen Symmetrie.

154) Bei den grundlegenden Konstruktionen drängte sich der Begriff der Symmetrie auf, bei dessen Beachtung viele Sätze und Konstruktionen sich als selbstverständlich ergeben.

Man bezeichnet ein planimetrisches Gebilde als einfach

*) Die Aufgabe kann natürlich überschlagen werden. Der Beweis der Richtigkeit soll nur eine Scharfsinnsprobe für begabtere Schüler sein.

symmetrisch, wenn es durch eine und nur eine Gerade so in zwei Hälften zerlegt wird, daß die eine Hälfte durch Umklappung um diese Gerade mit der anderen Hälfte zur Deckung gebracht werden kann.

Jede Hälfte bezeichnet man als das Spiegelbild der anderen. Die Gerade heißt die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Gebildes, oder auch die spiegelnde Gerade, die als unbegrenzt zu denken ist. Jeder Punkt dieser Geraden ist sein eigenes Spiegelbild. Das Spiegelbild jedes anderen Punktes wird gefunden, indem man von ihm auf die Gerade ein Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Die spiegelnde Gerade ist ihr eigenes Spiegelbild. Jede Parallele zur spiegelnden Geraden wird eine Parallele entgegengesetzten Abstandes. Jede die spiegelnde Gerade schneidende Gerade wird eine sie in demselben Punkte unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneidende Gerade. Jedes Lot zur spiegelnden Geraden gibt seine eigene Verlängerung. Symmetrische Stücke von Geraden sind dabei gleich lang; symmetrische Winkel von beliebiger Lage sind entgegengesetzt gleich. Symmetrische Kreisbogen von beliebiger Lage decken einander. (Vgl. zu diesem Abschnitte das unter V im Vorkursus Gesagte.)

155) Sind mehrere Symmetrieachsen vorhanden, so spricht man von mehrfacher Symmetrie. Das gleichschenklige Dreieck ist ein Beispiel der einfachen Symmetrie; die Halbierende des Winkels an der Spitze ist die Symmetrieachse. Das Rechteck ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Mittellinien sind seine Symmetrieachsen. Auch der Rhombus ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Diagonalen sind seine Symmetrieachsen. Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen, die Halbierenden der Winkel. Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen, die Diagonalen und die Mittellinien. Das regelmäßige Fünfeck hat fünf Symmetrieachsen, die Winkelhalbierenden. Das regelmäßige Sechseck hat sechs Symmetrieachsen, die drei Hauptdiagonalen und die drei Mittellinien usw. Der Kreis hat unendlich viele Symmetrieachsen, nämlich sämtliche Durchmesser.

156) Beim Rechteck und Rhombus schneiden die Symmetrieachsen einander rechtwinklig in einem Punkte, den man als den Mittelpunkt der Figur bezeichnet. Beim Rechteck ist dieser Punkt der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, beim Rhombus ist er der des einbeschriebenen Kreises. Bei allen genannten regelmäßigen Vielecken schneiden einander die Symmetrieachsen in einem Punkte, dem Mittel-

punkte des Vielecks, der zugleich Mittelpunkt des um- und des einbeschriebenen Kreises ist. Dort folgen sie unter gleichen Winkeln aufeinander, beim gleichseitigen Dreieck bilden sie Winkel von $\frac{180^0}{3} = 60^0$, beim Quadrat solche von $\frac{180^0}{4} = 45^0$, beim Fünfeck solche von $\frac{180^0}{5} = 36^0$, beim Sechseck solche von $\frac{180^0}{6} = 30^0$ usw.

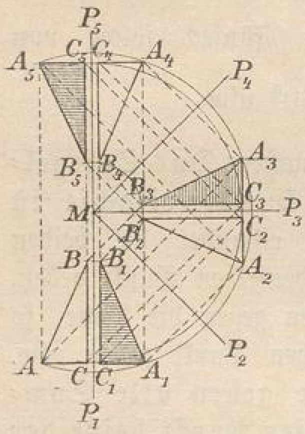
157) Diese Einfachheit erklärt sich folgendermaßen: Das Spiegelbild einer Symmetrieachse gegen eine Symmetrieachse ist wieder eine Symmetrieachse. Schneiden einander die beiden ersten im Endlichen, so muß die dritte durch denselben Punkt gehen. Spiegelt man die beiden ersten Symmetrieachsen gegen die dritte, so müssen die Spiegelbilder wieder durch denselben Punkt gehen usw. Daraus folgt: Bei mehrfacher Symmetrie gehen alle Symmetrieachsen durch denselben Punkt. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Gebildes.

158) Sollen nur zwei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen diese aufeinander senkrecht stehen, denn sonst würde durch die Spiegelung gegen die eine eine dritte Symmetrieachse entstehen usw. Sollen nur drei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen sie einander unter 60^0 schneiden, denn sonst würden durch Spiegelung gegen eine davon neue Symmetrieachsen entstehen. Das Entsprechende gilt von vier, fünf, sechs usw. Symmetrieachsen. Eine Symmetrieachse teilt die Ebene in zwei übereinstimmende Hälften, zwei geben vier übereinstimmende „Quadranten", drei geben sechs übereinstimmende Sextanten der Ebene, n Symmetrieachsen geben $2n$ Zentriwinkel von der Größe $\frac{360^0}{2n}$ oder $\frac{180^0}{n}$. Das regelmäßige n-Eck hat n Symmetrieebenen. Ist n eine gerade Zahl, so sind die Symmetrieebenen zur Hälfte Hauptdiagonalen, zur Hälfte winkelhalbierende Mittellinien. Ist n ungerade, so sind sämtliche Winkelhalbierenden Mittellinien. Eine eigentümliche Stellung nehmen die unbegrenzten Parallelen ein. Jedes gemeinschaftliche Lot ist für sie eine Symmetrieachse. Es sind also unendlich viele Symmetrieachsen vorhanden, die einander im Endlichen nicht schneiden. Der Streif zwischen zwei Parallelen hat außerdem noch eine vereinzelte parallele Symmetrieachse.

159) Von der Zeichnung eines kunstgewerblichen ebenen Musters (Flachornament) von mehrfacher Symmetrie braucht nur der einem solchen Zentriwinkel entsprechende Teil gegeben zu sein. Der Rest ist

leicht zu konstruieren, sei es Punkt für Punkt oder Linie für Linie. (Hat man statt des Flachornaments ein mehrfach symmetrisches Relief auf ebener Grundlage, so braucht man auch nur den entsprechenden Teil zu geben, jedoch sind benachbarte symmetrische Teile nicht mehr kongruent, sondern räumlich symmetrisch. Vgl. Vorkursus V, 112 und 113.)

Fig. 31.



160) Die Umklappung eines mehrfach symmetrischen (planimetrischen) Gebildes gibt dessen Teilen entgegengesetzten Drehungssinn; die Umklappung des Bildes um die zweite Achse stellt den ursprünglichen Drehungssinn wieder her; die Umklappung des neuen Bildes um die dritte Achse gibt wieder den entgegengesetzten Drehungssinn usw. Eine gerade Anzahl von Spiegelungen läßt den Drehungssinn ungeändert, eine ungerade Anzahl gibt den entgegengesetzten Drehungssinn.

Fig. 32.

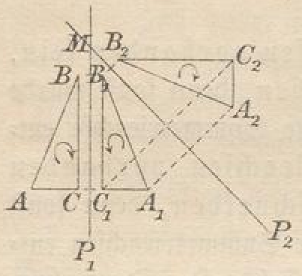


Fig. 31 und 32 veranschaulichen dies an einem mehrfach gespiegelten rechtwinkligen Dreieck. Die schraffierten Dreiecke sind nicht symmetrisch zu einander. Man könnte sie als verkehrtsymmetrisch bezeichnen.

β) Ableitung einfacher Sätze und Konstruktionen mit Hilfe der Symmetrie.

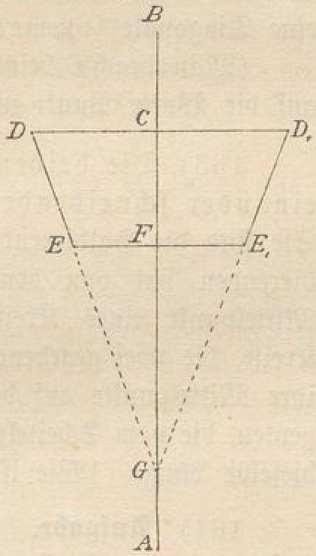
161) Das Spiegelbild zweier Punkte. In Fig. 33 sind zwei Punkte D und E gegen die Gerade AB gespiegelt, was D_1 und E_1 gegeben hat. Dadurch ist zugleich die Gerade DE gespiegelt und ihr Spiegelbild D_1E_1 entstanden. Schneidet nun DE die spiegelnde Gerade in einem im Endlichen liegenden Punkte G, so muß auch D_1E_1 durch den Punkt G gehen und AB unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneiden.

Man kann aber auch D und E_1 als die gespiegelten Punkte, D_1 und E als die Spiegelbilder betrachten. Demnach müssen auch DE_1 und D_1E einander auf der Geraden AB schneiden.

Zwei Geraden, die gegen eine dritte Gerade symmetrisch sind, bezeichnet man bisweilen als antiparallel in bezug auf die spiegelnde

Gerade. Deshalb wird das in bezug auf die Mittellinie CF symmetrische Viereck DEE_1D_1, von dem zwei Seiten DD_1 und EE_1 parallel sind, während die anderen DE und D_1E_1 antiparallel sind, als ein **Antiparallelogramm** bezeichnet. (Es heißt jedoch auch ein **symmetrisches Paralleltrapez**.)

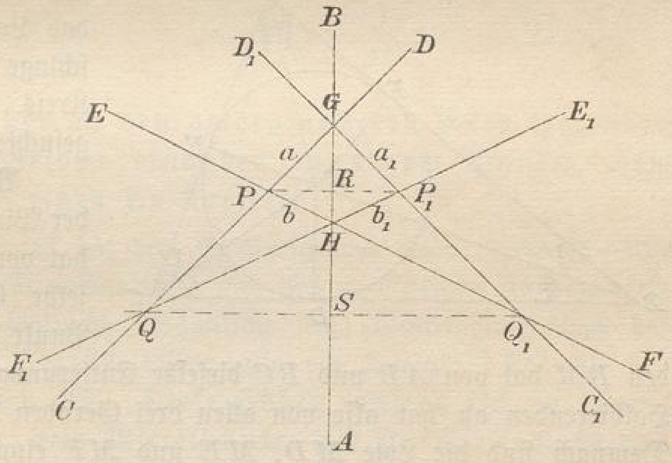
Fig. 33.



Die Diagonalen und die antiparallelen Gegenseiten eines solchen Vierecks schneiden also einander auf dessen Symmetrielinie. Die symmetrisch liegenden Geraden und Winkel stimmen überein.

162) **Das Spiegelbild zweier unbegrenzter Geraden.** In Fig. 34 sind zwei Geraden CD und EF gegen eine dritte Gerade AB gespiegelt, was die Bilder C_1D_1 und E_1F_1 gegeben hat, von denen das eine mit CD durch den Schnittpunkt G, das andere mit EF durch den Schnittpunkt H auf der Geraden AB gehen muß. Die Punkte P und P_1 sind ein symmetrisches Punktepaar. Betrachtet man aber CD und E_1F_1 als die gespiegelten Geraden, so folgt, daß auch die Punkte Q und Q_1 ein symmetrisches Punktepaar sind.

Fig. 34.



Das Viereck PHP_1G ist ein gegen die Diagonale GH symmetrisches. Es besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, welche die Grundlinie PP_1 gemein haben. Es wird als **Deltoid** bezeichnet. Zu diesem Viereck gehören sechs Verbindungslinien PP_1, GH, GP, GP_1, P_1H, PH. Die Gegenseiten geben drei Schnittpunkte Q, Q_1 und R. Ein Viereck mit seinen sämtlichen sechs Geraden bezeichnet man als ein **vollständiges Viereck**. Das hier vorliegende ist ein gegen eine Diagonale **symmetrisches vollständiges Viereck**.

Die Geraden a, b, a_1, b_1, bilden ein Vierseit mit sechs Schnittpunkten P, P_1, Q, Q_1, G, H. Das Vierseit mit seinen sechs Schnittpunkten besitzt also drei Diagonalen, PP_1, QQ_1, GH. Man nennt es ein vollständiges Vierseit. Hier handelt es sich um ein gegen eine Diagonale symmetrisches vollständiges Vierseit.

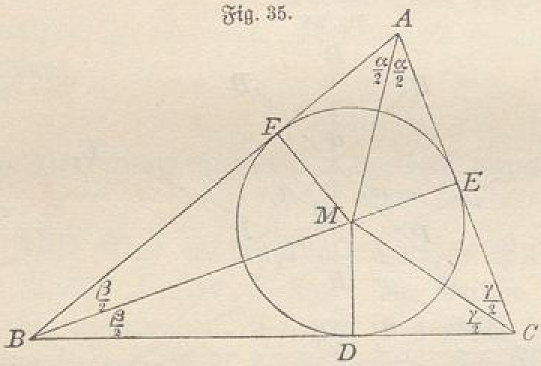
(Man beachte beim Viereck und Vierseit die Reziprozität in bezug auf die Worte Punkt und Gerade.)

163) Die beiden Symmetrielinien zweier unbegrenzten einander schneidenden Geraden stehen aufeinander senkrecht. Sie sind die Halbierenden der vier Winkel. Jeder Punkt jeder Halbierenden hat von den beiden Geraden denselben Abstand, ist also Mittelpunkt eines Kreises, der die beiden Geraden berührt. Alle Kreise, die zwei gegebene einander schneidende Geraden berühren, haben ihre Mittelpunkte auf den beiden Symmetrieachsen. Die beiden Tangenten, die vom Scheitelpunkte an jeden dieser Kreise gezogen sind, haben dieselbe Länge. [Wie ist es, wenn die beiden Geraden parallel sind?]

164) **Aufgabe.** In ein gegebenes Dreieck den einbeschriebenen Kreis (In-Kreis) einzuzeichnen (der die drei Seiten berührt).

Auflösung. In Fig. 35 sei ABC das gegebene Dreieck. Man halbiere die Winkel bei A und B. Die Halbierenden geben den Schnittpunkt M. Von M aus fälle man auf BC das Lot MD. Mit MD schlage man um M einen Kreis. Dieser Kreis ist der gesuchte Berührungskreis.

Fig. 35.



Beweis. Jeder Punkt der Winkehalbierenden AM hat von AB und AC dieselbe Entfernung. Jeder Punkt der Winkelhalbierenden BM hat von AB und BC dieselbe Entfernung. M gehört beiden Halbierenden an, hat also von allen drei Geraden dieselbe Entfernung. Demnach sind die Lote MD, ME und MF einander gleich.

Folgerung. Weil die Abstände MD und ME einander gleich sind, muß M auch auf der Halbierenden des Winkels C liegen. Also ist auch MC eine Winkelhalbierende. Folglich:

Die Halbierenden der Dreieckswinkel schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des In-Kreises.

165) **Aufgabe.** An ein gegebenes Dreieck ABC einen Kreis zu legen, der die Seite BC von außen her, die beiden anderen Seiten von innen her berührt.

Auflösung. In Fig. 36 halbiere man den Winkel bei A und den Außenwinkel CBF. Das gibt, wie vorher, einen Schnittpunkt M_1 als Mittelpunkt eines Kreises, der sowohl die Verlängerungen der Dreiecksseiten AB und AC, als auch die Seite BC berührt. Das von M_1 auf eine der Seiten gefällte Lot, z. B. M_1D, ist der Radius des nun leicht zu zeichnenden Kreises, eines äußeren Berührungskreises oder An-Kreises.

Folgerung. Weil der Kreis M_1 die Seiten AB und BC berührt, muß der Punkt M_1 auch auf der Halbierenden des Außenwinkels BCE liegen. Folglich: Die Halbierenden eines Drei-

Fig. 36.

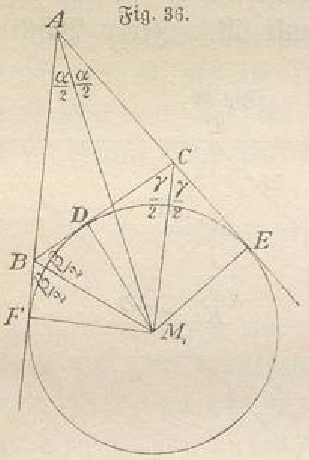
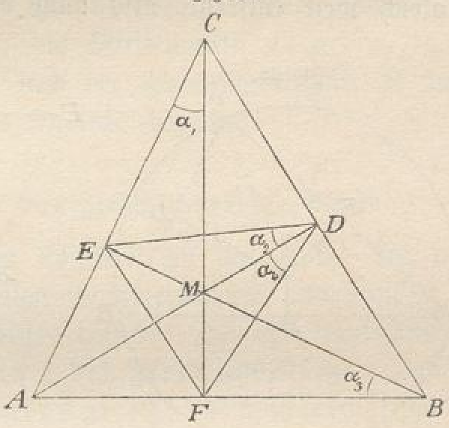


Fig. 37.



eckswinkels und der an den beiden anderen Ecken liegenden Außenwinkel schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des einen An-Kreises.

166) Das Dreieck hat drei An-Kreise und einen In-Kreis. Die Halbierenden jedes Dreieckswinkels und des zugehörigen Außenwinkels stehen aufeinander senkrecht. Sämtliche sechs Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF in Fig. 37 bilden also ein Dreieck ABC mit den Höhen AD, BE und CF. Diese Höhen müssen sich in **einem** Punkte schneiden, dem Mittelpunkte des In-Kreises für das Höhenfußpunktdreieck DEF, während A, B und C die Mittelpunkte der An-Kreise dieses Dreiecks sind.

Dieser Satz kommt später noch einmal zur Sprache.

167) Das Mittellot einer Geraden AB ist eine ihrer Symmetrielinien. (Als zweite kann man die Gerade selbst be-

trachten.) Jeder Punkt der Mittelsenkrechten ist von den Endpunkten A und B der Geraden gleich weit entfernt. Er ist also Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte A und B geht. Folglich:

Alle Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, haben ihre Mittelpunkte auf der zugehörigen Mittelsenkrechten.

168) **Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geht, die nicht auf einer Geraden liegen.

Auflösung. In Fig. 38 seien A, B und C die drei gegebenen Punkte. Man bilde die Mittelsenkrechte zu AB und die Mittelsenkrechte zu BC, diese schneiden einander in einem Punkte M, der von den drei Eckpunkten gleiche Entfernungen hat und daher Mittelpunkt des nun leicht zu zeichnenden Kreises ist.

Beweis. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten FM ist von A und B gleich weit entfernt, also auch der Punkt M. Jeder Punkt der

Fig. 38.

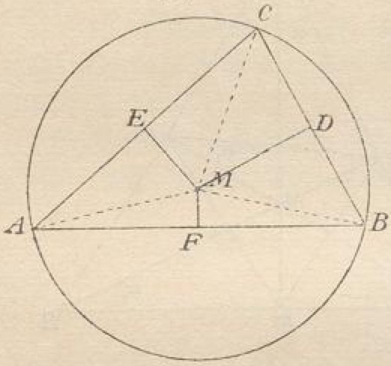
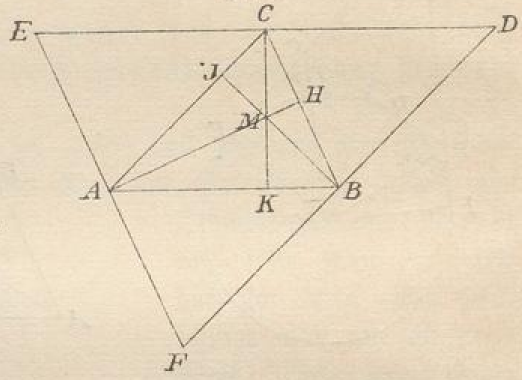


Fig. 39.



Mittelsenkrechten DM ist von B und C gleich weit entfernt, also auch M. Folglich ist M von A, B und C gleich weit entfernt. — Die Aufgabe ist nur auf eine Art lösbar. Haben zwei Kreise drei Punkte gemein, so fallen sie vollständig zusammen.

Folgerung. Weil M von A und C gleich weit entfernt ist, muß M auch auf der Mittelsenkrechten von AC liegen. Also:

Die Mittellote der Seiten eines Dreiecks schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Dieser Kreis soll kurz als der Um-Kreis des Dreiecks bezeichnet werden.

169) Denkt man sich auf den Höhen des Dreiecks ABC (Fig. 39) in den Eckpunkten Lote errichtet, so geben diese ein Dreieck DEF, dessen Seiten den Seiten von ABC parallel sind. (Warum?)

Dabei sind also $ABCE$ und $ACBF$ Parallelogramme, sodaß $CB = EA = AF$ ist. Demnach ist das Lot AH die Mittelsenkrechte von EF. Ebenso zeigt sich, daß BJ die Mittelsenkrechte von FD und CK die Mittelsenkrechte von DE ist. Diese Mittelsenkrechten müssen sich aber in einem Punkte schneiden. Demnach schneiden einander die Höhen des Dreiecks DEF und überhaupt jedes Dreiecks in **einem** Punkte. Der bereits ausgesprochene Satz über die Dreieckshöhen ist damit bestätigt. — Der Höhenschnittpunkt M hat also noch zweierlei Bedeutung. Er ist Mittelpunkt des Um-Kreises vom Dreieck DEF und zugleich Mittelpunkt des In-Kreises vom Dreieck HJK.

Bildet man jedoch ein stumpfwinkliges Dreieck ABC und dazu die Figur, so fällt M außerhalb der Dreiecke ABC, DEF und HJK und ist nicht In-Kreis, sondern An-Kreis des letzteren.

Der Durchschnittspunkt S der Mittellinien des Dreiecks, der Mittelpunkt M des Um-Kreises, die Mittelpunkte μ, μ_1, μ_2, μ_3 des In-Kreises und der An-Kreise und der Höhenschnittpunkt H werden als merkwürdige Punkte des Dreiecks bezeichnet

γ) Symmetrisches über das gleichschenklige Dreieck.

170) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks war als dessen Symmetrielinie nachgewiesen, sodaß es aus zwei kongruenten Hälften besteht. Zunächst folgte der Satz: Die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks (die Basiswinkel) sind einander gleich; oder: Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

171) Umgekehrt folgt: Sind zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Oder: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. (Sind nämlich die Winkel bei A und B einander gleich, so sind sie symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte, müssen also einander in demselben Punkte C der Mittelsenkrechten schneiden, sodaß auch $AC = BC$ ist.)

172) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks halbiert die Grundlinie und steht auf dieser senkrecht; die Mittelsenkrechte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze und halbiert den dortigen Winkel. Die Verbindungslinie der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie steht auf dieser senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

Alle diese Sätze sind nur Ausdrucksweisen dafür, daß das gleichschenklige Dreieck aus zwei kongruenten Teilen besteht.

Jedes Lot auf der Symmetrielinie des gleichschenkligen Dreiecks schneidet von den Schenkeln gleiche Stücke ab, von der Fläche ein Antiparallelogramm. Legt man an eine Gerade AB in A und B nach derselben Seite gleiche Winkel so an, daß die Schenkel einander in einem Punkte C schneiden, gibt man den Schenkeln dieselbe Länge $AD = BE$ und verbindet man A mit E und B mit D, so geben die Verbindungslinien gleichschenklige Dreiecke ABF und DEF. Warum?

173) Der Mittelpunkt des Um-Kreises, des In-Kreises, des An-Kreises für die Grundlinie, der Höhendurchschnitt, der Durchschnitt der Mittellinien liegen beim gleichschenkligen Dreieck auf dessen Symmetrielinie. Die Mittelpunkte der beiden anderen An-Kreise sind symmetrisch gegen die Symmetrielinie. Ihre Verbindungslinie geht durch die Spitze des Dreiecks.

174) Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht stets durch die Mitte des Kreises. Daraus folgt wieder der Satz: Das durch zwei Punkte gehende Büschel von Kreisen hat die Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten. Man konstruiere die betreffenden Linien und einige der Kreise. (Vgl. Nr. 167.)

175) Stehen, wie in Fig. 34, zwei ungleiche gleichschenklige Dreiecke über derselben Grundlinie, so haben sie eine gemeinschaftliche Symmetrielinie, denn die Symmetrielinien beider fallen mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen. Dabei können die beiden gleichschenkligen Dreiecke ihre Spitze auf verschiedenen Seiten der Grundlinie oder auf derselben Seite haben. Stimmen dagegen die beiden gleichschenkligen Dreiecke überein, so hat das Gebilde zwei Symmetrieachsen und ist eine Raute (oder Rhombus).

176) **Aufgaben.** Die mehrfache Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks, des Quadrates, des regelmäßigen Fünfecks, des regelmäßigen Sechsecks usw. eingehender zu untersuchen.

(Es soll z. B. untersucht werden, ob parallele Seiten vorhanden sind, ob Diagonalen vorhanden sind, die zu einer Seite parallel sind, wie sich beliebige Diagonalen paarweise verhalten, ob sich kongruente Flächenteile vorfinden. Die Zerlegung jedes regelmäßigen Vielecks in gleichschenklige Dreiecke, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammenfallen, ist gleichfalls zu untersuchen. Die Winkel dieser Dreiecke sind zu bestimmen. Die ein- und umbeschriebenen Kreise sind zu untersuchen, besonders hinsichtlich ihrer Sektoren, Segmente und Bogen.

δ) Symmetrisches über Kreise.*)

177) Daß jeder Kreis in bezug auf jeden Durchmesser symmetrisch ist, war schon gezeigt. Zwei oder mehrere konzentrische Kreise haben jeden gemeinschaftlichen Durchmesser zur Symmetrielinie.

178) Errichtet man auf dem Durchmesser eines Kreises einen zweiten rechtwinklig schneidenden Durchmesser, so hat das Gesamtgebilde vier Symmetrieachsen, die den Kreis in gleiche Oktanten zerlegen. Errichtet man auf dem Durchmesser an beliebiger anderer Stelle ein unbegrenztes Lot, so ist das Gesamtgebilde nur gegen den Durchmesser symmetrisch. (Man unterscheide die Fälle, daß das Lot außerhalb des Kreises liegt, daß es den Kreis nur in einem Punkte trifft, daß es innerhalb des Kreises liegt. Man zeige, daß es im letzteren Falle zwei Schnittpunkte mit dem Kreise haben muß und nicht mehr haben kann. Die Folgen der Symmetrie sind anzugeben.)

179) Hat ein Kreis zwei einander schneidende unbegrenzte Tangenten, so ist nur die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Mittelpunkte Symmetrielinie des Gesamtgebildes. Was folgt daraus für gewisse Stücke der Tangenten, für gewisse Winkel, für gewisse Kreisbogen, für gewisse Flächenstücke? Verbindet man die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreismittelpunkte, was folgt dann weiter hinsichtlich der Symmetrie?

Sind aber die beiden Tangenten parallel, so gibt es für das Gesamtgebilde zwei aufeinander senkrechte Symmetrielinien.

180) Zwei nicht konzentrische ungleiche Kreise haben nur eine Symmetrielinie, die Zentrale, d. h. die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte. Folgende Fälle sind möglich: Die Kreise liegen ganz auseinander; sie berühren einander äußerlich; sie schneiden einander. (Dies geschieht dann in zwei symmetrischen Punkten, aber nicht in mehr Punkten; denn Kreise, die in mehr als zwei Punkten übereinstimmen, stimmen vollständig überein); sie berühren einander innerlich, wobei der größere den kleineren umschließt; der kleinere wird vom größeren ganz umschlossen, ohne daß sie einen gemeinschaftlichen Punkt haben. [$c > (r + r_1)$; $c = (r + r_1)$; $(r + r_1) > c > (r - r_1)$; $c = (r - r_1)$; $c < (r - r_1)$; $c = 0$ gibt konzentrische Kreise.]

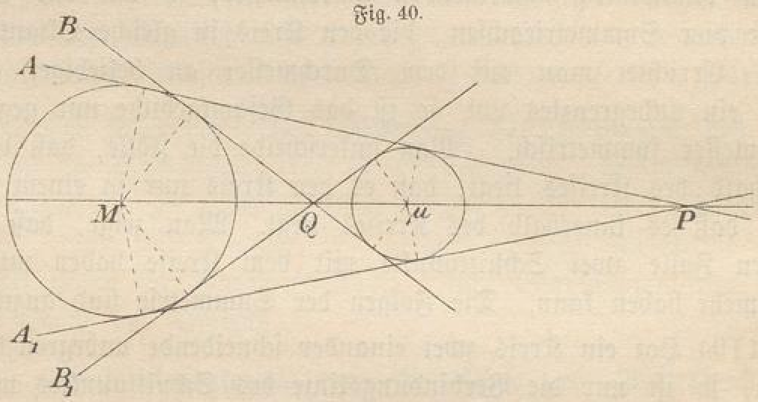
Im Falle des Schneidens haben die Kreise eine gemeinschaftliche Sehne. Welche Symmetrieverhältnisse finden dabei hinsichtlich gewisser Längen, Winkel, Kreisbogen, Flächen statt?

*) Dieser Abschnitt gibt Veranlassung zu zahlreichen Beispielen für das technische Zirkelzeichnen.

181) Im Falle des Auseinanderliegens haben die beiden Kreise vier gemeinschaftliche Tangenten. Aus Gründen der Symmetrie schneiden sich diese paarweise in Punkten P und Q der Symmetrieachse (der Zentrale).

AP und A_1P nennt man die äußeren gemeinschaftlichen Tangenten, BQ und B_1Q die inneren. (Fig. 40.)

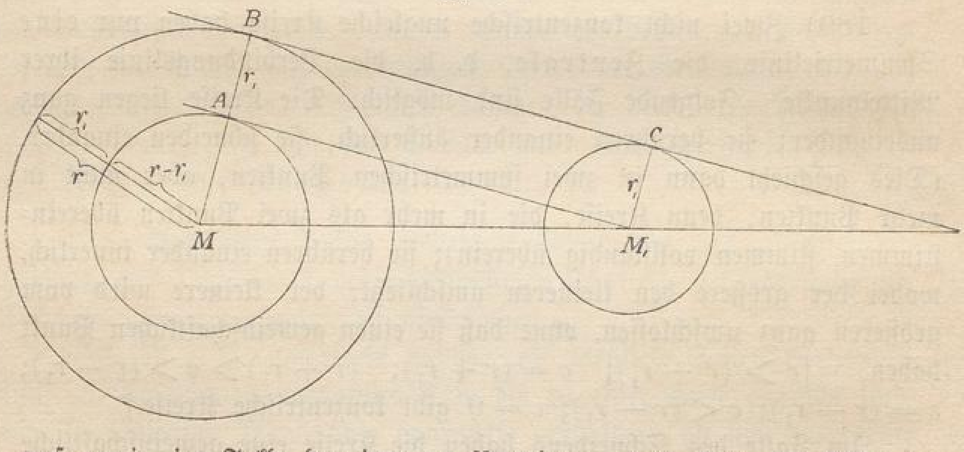
Fig. 40.



Was folgt für die Punkte der Figur, für die einzelnen Tangentenstücke, für die Winkel, Bogen, Flächenstücke der Figur; für die Radien der Berührungspunkte usw.?

Im Falle der äußerlichen Berührung beschränkt sich die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten auf drei; im Falle des Schneidens

Fig. 40 b.



auf zwei; im Falle der inneren Berührung auf eine; im Falle der vollständigen Umschließung des kleineren durch den größeren (ohne Berührung) gibt es keine Tangente.

[Will man die gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise konstruieren, so verfahre man vorläufig folgendermaßen: In Fig. 40b seien die Kreise M und M_1 mit den Radien r und r_1 gegeben. Man schlage um M, den Mittelpunkt des größeren Kreises, einen Hilfskreis mit dem Radius $(r - r_1)$, lege an diesen von M_1 aus eine Tangente, die in A berühre, ziehe MA bis zum Schnittpunkte B und errichte auf MB in B ein Lot. Dieses gibt die Tangente BC. Die gegen MM_1 dazu symmetrische Linie ist leicht zu zeichnen. —

Der Beweis der Richtigkeit ergibt sich aus dem Rechteck $ABCM_1$ und ist dem Schüler zu überlassen.

Für die gemeinsamen inneren Tangenten zweier auseinander liegenden Kreise benutze man einen Hilfskreis mit dem Radius $(r + r_1)$.]

182) Sind zwei nicht konzentrische Kreise gleich groß, so hat das Gesamtgebilde stets zwei Symmetrieachsen. Die zweifache Symmetrie soll für die verschiedenen Lagen untersucht werden.

183) Haben drei oder mehr ungleiche Kreise ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, so ist diese die einzige Symmetrieachse. Gehen drei oder mehr ungleiche Kreise durch zwei Punkte, so liegen alle Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte, die demnach die einzige Symmetrielinie ist. Gehen drei oder mehr ungleiche Kreise durch einen Punkt, und liegen dabei ihre Mittelpunkte auf einer durch diesen Punkt gehenden Geraden, so ist diese Symmetrielinie des Gesamtgebildes, alle Kreise berühren einander in den gegebenen Punkten und haben dort eine gemeinschaftliche Tangente.

184) **Aufgabe.** Die Kreisreihe zu konstruieren, die innerhalb eines (z. B. spitzen) Winkels liegt und dessen Schenkel berührt, wobei aber jeder Kreis die beiden benachbarten Kreise äußerlich berühren soll.

(Man gehe von einem beliebigen Lote auf der Winkelhalbierenden aus, welches ein gleichschenkliges Dreieck gibt, dessen In-Kreis und dessen An-Kreis leicht zu zeichnen sind. Dann errichte man Lote in den neuen Schnittpunkten der Winkelhalbierenden, was neue gleichschenklige Dreiecke gibt, für die nun entweder In-Kreise oder Außenkreise zu zeichnen sind. Statt die neuen Winkel stets zu halbieren, ziehe man gewisse Parallelen mit Hilfe des Lineals und Winkelhakens, errichte auch die Lote mit deren Hilfe.)

Sind die beiden Berührungsgeraden parallel, so werden alle Kreise gleich, und die Aufgabe vereinfacht sich.

185) **Aufgabe.** Um einen gegebenen Kreis lassen sich Berührungskreise, die mit ihm denselben Radius haben, so legen, daß jeder seine beiden Nachbarn berührt. Wie groß ist ihre Anzahl, und

konstruiert man diese Kreise? Die Symmetrieverhältnisse des Gesamtgebildes sollen untersucht werden.

(Sowohl die Mittelpunkte als auch die gegenseitigen Berührungspunkte der Kreisreihe liegen auf gewissen Kreisen, auch hat die Reihe einen umbeschriebenen Kreis.)

186a) **Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, um den drei, vier, acht, zwölf, sechzehn solcher Berührungskreise von gegebenem Radius gelegt sind, wobei die Reihe jedesmal geschlossen sein soll.

186b) Um einen gegebenen Kreis drei, vier, acht, zwölf, sechzehn solcher Berührungskreise zu zeichnen, wobei die Reihe jedesmal geschlossen sein soll.

(Im ersteren Falle zeichne man zwei Durchmesser, die einander unter 60^0 schneiden. Im Schnittpunkte des ersten Durchmessers mit dem Kreise zeichne man eine Tangente. Man halbiere den Winkel von 150^0, den die Tangente mit dem zweiten Durchmesser bildet. Wo die Winkelhalbierende den ersten Durchmesser schneidet, liegt das Zentrum des gesuchten Kreises. Mit den übrigen Fällen verfahre man in entsprechender Weise.)

187) **Aufgabe.** Einen Kreis in sechs gleiche Sektoren einzuteilen und in jeden Sektor einen Berührungskreis zu zeichnen.

(Man bilde die Symmetrielinie eines der Sektoren, errichte auf ihr im Schnittpunkte mit dem Kreise ein Lot und zeichne den In-Kreis des entstehenden (gleichseitigen) Dreiecks.)

188) **Aufgabe.** Um einen Punkt eines gegebenen Kreises mit dem Radius einen Kreisbogen zu schlagen, der ganz innerhalb des Kreises liegt und zwei Teilpunkte der Kreislinie gibt. Mit den beiden Teilpunkten soll dasselbe geschehen und die Konstruktion so oft wiederholt werden, bis das Ganze schließt.

Das Gesamtgebilde soll beschrieben werden.*)

189) **Aufgabe.** In die Bogendreiecke, welche vom gegebenen Kreise und je zwei aufeinander folgenden der vorher konstruierten Kreisbogen gebildet sind, Berührungskreise einzuzeichnen.*)

---

*) Zahlreiche Beispiele mehrfach symmetrischer Figuren findet man in den Lehrbüchern für gebundenes Zeichnen. Auf gotische Maßwerke, besonders auf Rosetten, sei aufmerksam gemacht, weil sie vortreffliche Zeichenübungen geben und das Verständnis für die gotische Baukunst vermitteln. Man vgl. G. Müller: Übungsstoff für das geometrische Zeichnen (Stuttgart bei P. Neff); Weishaupt-Richter: Das Ganze des Linearzeichnens; Bd. I (Leipzig bei H. Zieger).

(Das Lot, welches auf dem Symmetrieradius eines Bogendreiecks im Endpunkte errichtet ist, berührt die beiden vollendeten Kreisbogen des Dreiecks. Diese Tangente ist bereits halbiert. Man zeichne über der einen Hälfte einen Halbkreis. Dieser gibt auf dem einen Grenzbogen den Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreise, denn die drei betreffenden Tangenten müssen gleich lang sein.)

II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.

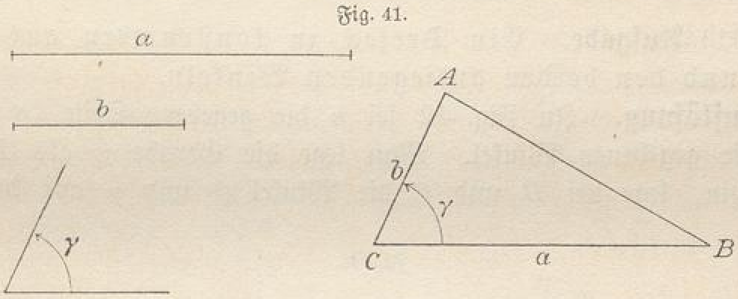
a) Die Lehre von der Kongruenz.

α) Die grundlegenden Kongruenzsätze für das Dreieck.

190) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Auflösung. In Fig. 41 seien a, b und $\sphericalangle \gamma$ die gegebenen Stücke. Man lege die Gerade a als CB beliebig hin, trage bei C

Fig. 41.



an sie den Winkel γ an, mache den neuen Schenkel $CA = b$ und verbinde A mit B. Dann ist Dreieck ABC das gesuchte, denn es enthält die gegebenen Stücke.

Bemerkungen. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald nur γ ein konkaver Winkel ist, was vorausgesetzt werden soll. (Ist der $\sphericalangle \gamma = 0$, so fällt Seite b auf a. Ist $\sphericalangle \gamma = 180^0$, so fällt b in die zu a entgegengesetzte Richtung. Im ersteren Grenzfalle wird Seite $c = a - b$, falls a die größere ist, im zweiten wird $c = a + b$. In beiden Fällen wird die Dreiecksfläche gleich Null; im allgemeinen wird die Fläche verschieden von Null.)

Die Aufgabe führt stets zu einer einzigen Lösung. So oft man ein Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruiert, sei es im einen oder im entgegengesetzten Sinne (Umklappung), stets erhält man Dreiecke, die sich mit dem zuerst konstruierten decken.

Legt man nämlich das zweite so konstruierte Dreieck so auf das erste, daß die Winkel γ aufeinander fallen und zwar mit den gleichlangen Schenkeln, so müssen auch die Endpunkte B einander decken, ebenso die Endpunkte A und demnach auch die Verbindungslinien AB. Daher stimmen die Verbindungslinien in der Länge überein und die Winkel bei B, ebenso die bei C in der Größe. Auch die Flächeninhalte beider Dreiecke stimmen überein.

Daraus folgt

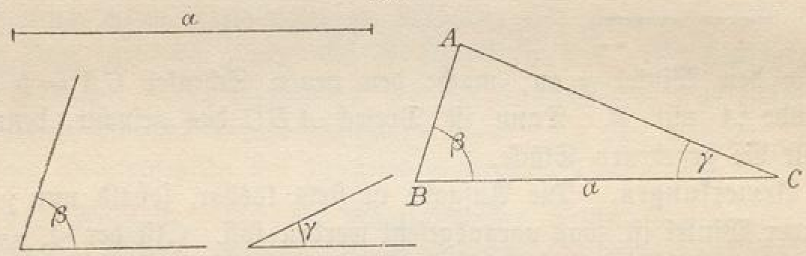
der erste Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent.

Die genannten drei Stücke a, b, γ genügen zur Konstruktion und zugleich zum Nachweise der Kongruenz, d. h. der Übereinstimmung der übrigen Stücke c, α, β und F (Fläche). Damit ist nachgewiesen, daß die Dreiecke auch in sonstigen Stücken übereinstimmen müssen, z. B. in gleichliegenden (homologen) Höhen, in gleichliegenden Mittellinien, in gleichliegenden Winkelhalbierenden, in den einbeschriebenen Kreisen, in den gleichliegenden An-Kreisen, in den Um-Kreisen usw.

191) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Auflösung. In Fig. 42 sei a die gegebene Seite, β und γ seien die gegebenen Winkel. Man lege die Gerade a als BC beliebig hin, lege bei B und C die Winkel β und γ auf derselben

Fig. 42.



Seite an die Gerade an und verlängere die freien Schenkel bis zum Durchschnitt A, dann ist ABC das gesuchte Dreieck, denn es hat die gegebenen Stücke.

Bemerkungen. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald $\beta + \gamma < 180^0$ ist. (Grenzfälle sind $\beta + \gamma = 0$, wobei die beiden Schenkel auf a fallen, $\alpha = 180^0$ und $F = 0$ wird, und $\beta + \gamma = 180^0$, wobei die Schenkel parallel werden und, wenn sie nicht zusammenfallen, ein unendliches Dreieck geben.)

Die Aufgabe hat stets nur eine einzige Lösung, denn alle anderen Dreiecke, die aus denselben Stücken konstruiert werden, lassen sich mit dem ersten zur Deckung bringen. Man kann sie nämlich mit den gleichen Seiten so aufeinander legen, daß die gleichen Winkelpaare aufeinander fallen. Weil dabei die freien Schenkelpaare einander decken, müssen auch die Durchschnittspunkte einander decken. Dadurch ist das Übereinstimmen in den übrigen Stücken b, c, α, F nachgewiesen. (Die Übereinstimmung im Winkel α war dabei selbstverständlich. Warum?)

Daraus folgt

der zweite Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie kongruent.

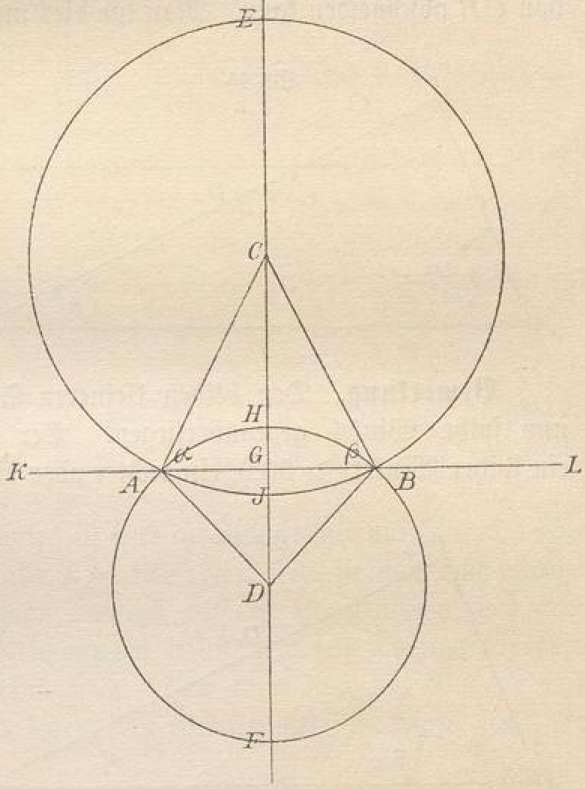
Man kann aber allgemeiner sagen:

Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und zwei homologen Winkeln überein, so sind sie kongruent.

192) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten.

Auflösung. Sind a, b und c die gegebenen Seiten, so lege man z. B. a als BC beliebig hin und schlage mit den Zirkelöffnungen b und c Kreisbogen um C und B. Schneiden diese einander in A, so verbinde man A mit B und C. Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck, denn es hat die gegebenen Stücke.

Fig. 43.



Bemerkung. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Seiten größer ist als die dritte. (Im Grenzfalle $a = b + c$ fallen b und c auf a und der Flächeninhalt des Dreiecks ist Null.) Die Aufgabe hat aber nur eine einzige Lösung. Denkt man sich nämlich die Dreiecke mit der größten Seite so aneinander gelegt, daß ein aus zwei gleichschenkligen Dreiecken bestehendes Viereck $ABDC$ entsteht, so ist dieses symmetrisch gegen die Diagonale BC, also ist $\triangle BCA \cong BCD$. (Vgl. Fig. 43, die aber andere Buchstaben enthält.)

Man kann auch sagen, daß die zu ganzen Kreisen vervollständigten Konstruktionsbogen einander decken, daher auch ihre Durchschnitte. Aus der Übereinstimmung zweier Dreiecke in den drei Seiten folgt also die Übereinstimmung in den drei Winkeln und im Flächeninhalt.

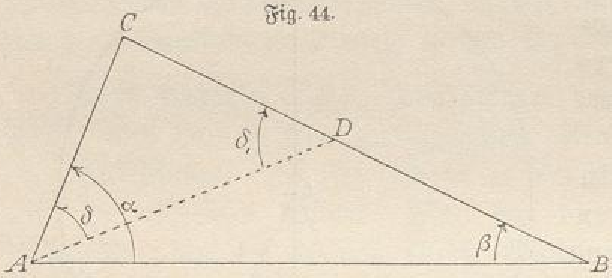
So ergibt sich

der dritte Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent.

193) Ein Hilfssatz und seine Umkehrung. Der größeren von zwei Dreiecksseiten liegt stets der größere Winkel gegenüber.

Beweis. In Fig. 44 sei $BC > AC$, sodaß man CA als CD von CB abschneiden kann. Man tue dies und verbinde A mit D. Dann ist $\triangle ACD$ gleichschenklig und $\sphericalangle \delta = \delta_1$. Dabei ist $\sphericalangle \delta_1$ als Außenwinkel des $\triangle ABD > \sphericalangle \beta$, also auch $\sphericalangle \delta > \sphericalangle \beta$, folglich ist α, welches größer als δ ist, erst recht größer als β.

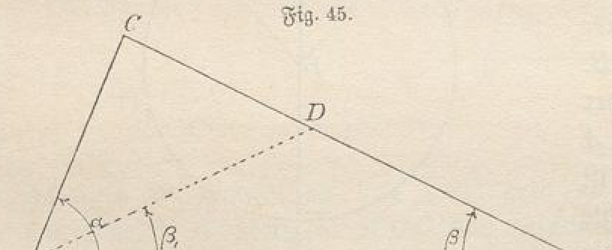
Fig. 44.



Bemerkung. Den beiden kleineren Seiten eines Dreiecks können nur spitze Winkel gegenüberliegen. Der größten Dreiecksseite kann ein spitzer Winkel ($> 60^0$), ein rechter oder ein stumpfer gegenüberliegen.

Umgekehrt folgt: Dem größeren von zwei Dreieckswinkeln liegt stets die größere Seite gegenüber.

Fig. 45.



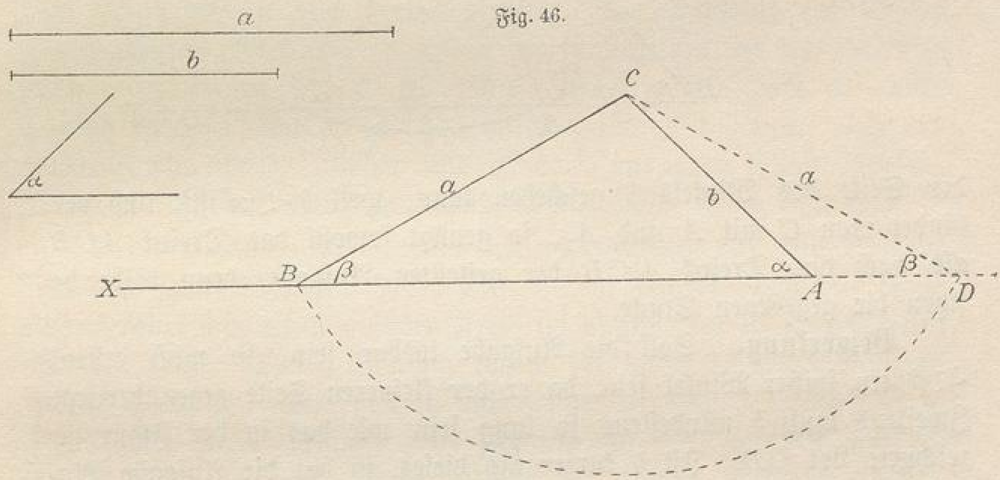
Beweis. In Fig. 45 sei $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$, sodaß man $\sphericalangle \beta$ als $\sphericalangle BAD = \beta_1$ vom Winkel α abziehen kann. Tut man dies nach Art der Fig. 45, so ist $\triangle ADB$ gleichschenklig, d. h. $BD = DA$. Im $\triangle ACD$ ist aber $AC < CD + DA$, also, da man für DA auch DB setzen kann, $AC < CD + DB$, d. h. $AC < CB$.

Bemerkung. Die einem rechten oder einem stumpfen Dreieckswinkel gegenüberliegende Seite ist stets die größte des Dreiecks. (Daher war das von einem Punkte auf eine Gerade gefällte Lot die kürzeste Linie, die vom Punkte nach der Geraden gezogen werden kann.)

194) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel.

Auflösung. In Fig. 46 seien a und b die gegebenen Seiten, a die größere davon; α sei der a gegenüberliegende Winkel. Man lege b als AC beliebig hin und lege bei A den Winkel α als $\sphericalangle CAX$ daran. Jetzt schlage man mit a um C einen Kreis, der die Gerade CX an zwei Stellen B und D schneiden muß (weil $a > b$ ist). Von

Fig. 46.



diesen Punkten ist nur der auf der Seite von α liegende Punkt B brauchbar. Verbindet man B mit C, so hat man das verlangte Dreieck, denn es besitzt die gegebenen Stücke.

Bemerkung. Das Dreieck ist stets möglich, sobald nur $\sphericalangle \alpha < 180^0$. (Was geschieht im Grenzfalle $\alpha = 180^0$?) Stets ist nur eine einzige Lösung möglich. Macht man nämlich dieselbe Konstruktion noch einmal, so lassen sich beide Zeichnungen vollständig zur Deckung bringen. Der Schüler weise dies selbst nach. (Er kann auch die Dreiecke mit den Seiten a so aneinander legen, daß eine symmetrische Figur entsteht.)

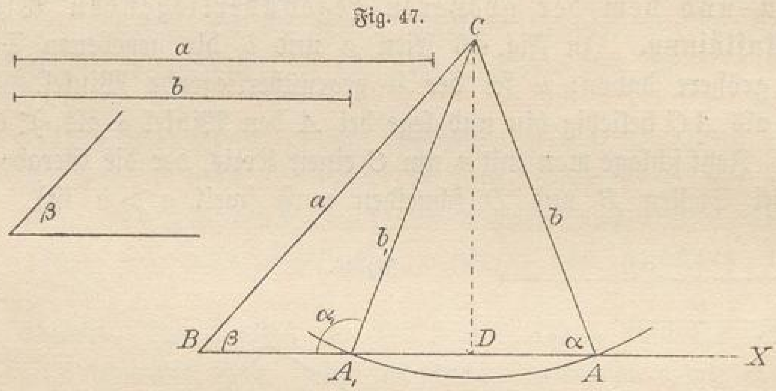
Daraus folgt

der vierte Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie kongruent.

195) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel.

Auflösung. In Fig. 47 seien a und b die gegebenen Seiten, b die kleinere davon, β der ihr gegenüberliegende Winkel. Man lege a als BC beliebig hin und lege bei B den Winkel β als $\sphericalangle CBX$ an. Darauf schlage man um C mit b einen Kreisbogen. Schneidet dieser die Gerade BX in zwei Punkten A und A_1, (was nur auf

Fig. 47.



der Seite des Winkels β geschehen kann, weil $b < a$ ist), und verbindet man C mit A und A_1, so genügt sowohl das Dreieck ACB, als auch das Dreieck A_1CB der gestellten Aufgabe, denn beide besitzen die gegebenen Stücke.

Bemerkung. Soll die Aufgabe lösbar sein, so muß erstens $\sphericalangle \beta$ ein spitzer Winkel sein, da er der kleineren Seite gegenüberliegt. Zweitens muß b mindestens so lang sein wie das in der Figur gezeichnete Lot CD. Ist b kürzer als dieses, so hat die Aufgabe keine Lösung. Ist b gleich diesem Lote, so hat die Aufgabe eine Lösung, und dabei ist das Dreieck ein rechtwinkliges. Ist b länger als dieses Lot, aber kleiner als a, so hat die Aufgabe zwei Lösungen, eine mit einem spitzen Winkel α und eine andere mit einem stumpfen Winkel α_1, der der Supplementwinkel von α ist. (Warum?)

Man kann die beiden Dreiecke, wie auch Fig. 46 zeigt, mit den Seiten b so aneinander legen, daß sie zusammen ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Sämtliche Dreiecke, die man aus denselben Stücken konstruiert, sind entweder dem Dreieck ABC oder dem Dreieck A_1BC kongruent. Zwei solche decken also einander, wenn die Winkel α in beiden „gleichartig" sind, d. h. beide spitz oder beide stumpf, oder beide rechte Winkel sind. Der Beweis der Deckung kann wie vorher dem Schüler überlassen werden.

Daraus folgt

der fünfte Kongruenzsatz. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel übereın, und sind die der größeren gegenüberliegenden Winkel gleichartig, so sind die Dreiecke kongruent.

β) Allgemeines über Konstruktionen und Kongruenzsätze.

196) Alle sonstigen Konstruktionen von Dreiecken aus drei voneinander unabhängigen gegebenen Stücken lassen sich auf die fünf hier angegebenen grundlegenden Dreieckskonstruktionen zurückführen. Dasselbe gilt von den sonstigen Kongruenzsätzen, die ebenso auf die hier angegebenen fünf zurückzuführen sind.

Daß die gegebenen Stücke unabhängig voneinander sein müssen, zeigt sich z. B. an den Dreieckswinkeln. Die Aufgabe, ein Dreieck aus gegebenen Winkeln α, β und γ zu konstruieren, ist nur denkbar, wenn $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist. Der Winkel γ also darf gar nicht gegeben werden, denn er ist schon durch α und β bestimmt, nicht unabhängig von ihnen. Daher sind zunächst nur zwei Stücke gegeben, α und β, und das dritte zur Konstruktion nötige Stück fehlt noch.

Bei der fünften Konstruktion hat man gesehen, daß eine Aufgabe bisweilen zwei Lösungen hat. Dies beruht darauf, daß ein Kreis eine Gerade oder einen anderen Kreis im allgemeinen in zwei Punkten schneiden kann. Dieser Umstand führte bei dieser Aufgabe auf zwei Punkte A und A_1. Aber dies ist nicht immer der Fall. So hat z. B. in Fig. 30 der Kreis ebenfalls zwei Schnitte mit der Geraden, aber es war trotzdem nur eine einzige Lösung der vierten Aufgabe möglich. Jeder eindeutig lösbaren Konstruktionsaufgabe entspricht ein Kongruenzsatz.

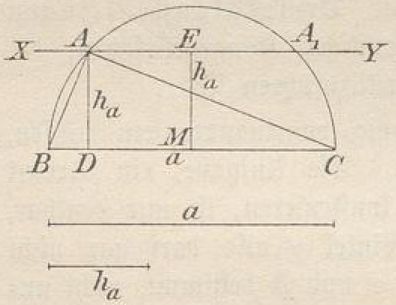
197) Die Konstruktionsaufgaben verlangen in der Regel eine Voruntersuchung darüber, wie die Aufgabe etwa angegriffen werden kann. Diese Untersuchung bezeichnet man als die Analysis der Aufgabe. An diese schließt sich die Konstruktion an. Nach Vollendung der letzteren ist der Beweis dafür zu geben, daß das konstruierte Gebilde die gegebenen Stücke hat. Die Analysis kann verschiedenartig ausfallen, sodaß bisweilen ganz verschiedene Konstruktionswege möglich werden. Je weniger Grundoperationen man dabei zur Ausführung nötig hat, für um so besser gilt die Lösung. — In der Regel wird noch eine Untersuchung darüber verlangt, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist, wann sie eine oder mehrere Lösungen hat, und welche Sonderfälle eintreten können. Diese Untersuchung heißt Determination.

198) Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck soll konstruiert werden aus der Hypotenuse a und der zu dieser gehörigen Höhe h_a.

2. **Analysis.** Man denke sich das Dreieck ABC gezeichnet. $\sphericalangle BAC$ sei der rechte Winkel, ihm gegenüber liege die Hypotenuse a, DA sei die zu dieser gehörige Höhe h_a. Man erinnere sich des Satzes, daß der Winkel im Halbkreis ein Rechter ist. Demnach muß die Spitze A des Dreiecks auf einem Halbkreise liegen, der über $BC = a$ als Durchmesser zu zeichnen ist. (Man sagt: Der geometrische Ort der Spitze A ist der zum Durchmesser a gehörige Halbkreis.) Ferner muß die Spitze A von der Hypotenuse den Abstand h_a haben, d. h. sie muß in einer Parallelen zu a liegen, die von dieser Geraden den Abstand h_a hat. (Dies ist ein zweiter geometrischer Ort für die Spitze.) Durch die Kenntnis der beiden geometrischen Orte wird die Konstruktion ermöglicht.

Fig. 48.



3. **Konstruktion.** a und h_a seien die nebst dem rechten Winkel gegebenen Stücke. Man lege a als BC beliebig hin und konstruiere die zugehörige Mittelsenkrechte, der man die Länge $ME = h_a$ gebe. Auf dieser errichte man im Punkte E ein Lot EX. Um M lege man mit MB einen Kreis, der das Lot EX in A schneide. Verbindet man A mit B und C, so hat man in ABC das verlangte Dreieck.

4. **Beweis.** Nach der Konstruktion ist $MB = MC$, also geht der geschlagene Kreisbogen durch B und C und ist ein Halbkreis vom Durchmesser $BC = a$. Da $\sphericalangle BAC$ ein Winkel im Halbkreise ist, muß er ein Rechter sein. ME steht senkrecht auf BC und hat die Länge h_a, also hat das zugehörige Lot EX überall, auch bei A, von der Hypotenuse a den Abstand h_a, d. h. die Höhe DA hat die gegebene Länge. Das Dreieck hat demnach die verlangten Stücke.

5. **Determination.** Ist h_a kleiner als der Radius $\frac{a}{2}$ des Kreises, so sind zwei Schnittpunkte A und A_1 möglich. Diese geben aber zwei kongruente Dreiecke, denn $\triangle ABC$ und $\triangle A_1CB$ sind symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte. Ist $h_a = \frac{a}{2}$, so wird das Lot EX Tangente des Kreises, dann ist also nur ein Dreieck möglich

und dieses ist rechtwinklig gleichschenklig. Ist $h_a > \frac{a}{2}$, so schneiden einander die beiden geometrischen Orte nicht, d. h. es ist keine Lösung möglich. (Für den Grenzfall $h_a = 0$ fällt A mit B oder mit C zusammen. Die Fläche des Dreiecks wird dann gleich Null.)

Bemerkung. Folgern kann man daraus den Satz: Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse und der zugehörigen Höhe überein, so sind sie kongruent. —

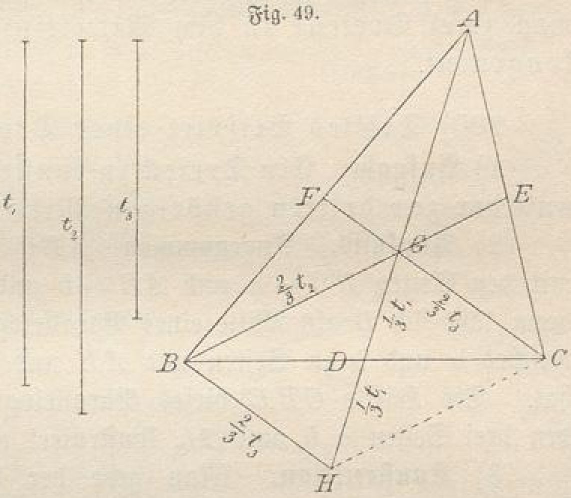
Bisweilen liegt aber die Lösung der Aufgabe weit versteckter, sodaß sie fast auf einen Kunstgriff hinausführt. Auch dazu sollen Beispiele gegeben werden.

199) Beispiel einer anderen Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Mittellinien zu konstruieren.

2) **Analysis.** Man denke sich das Dreieck ABC mit den drei Mittellinien AD, BE und CF oder t_1, t_2, t_3 gezeichnet und erinnere sich des Satzes, daß diese Geraden durch denselben Punkt G gehen, durch den von jeder der dritte Teil abgeschnitten wird. Danach ist $DG = \frac{1}{3}t_1$, $BG = \frac{2}{3}t_2$, $CG = \frac{2}{3}t_3$. Außerdem ist $DB = DC$. Macht man also noch $DH = DG$, so ist $BGCH$ ein Parallelogramm (denn die Diagonalen halbieren einander). Die Hälfte BGH dieses Parallelogramms ist ein Dreieck mit den Seiten $\frac{2}{3}t_1$, $\frac{2}{3}t_2$, $\frac{2}{3}t_3$, kann also leicht konstruiert werden, und auch der Rest der Konstruktion ist leicht zu übersehen.

Fig. 49.



3) **Konstruktion.** Sind in Fig. 49 t_1, t_2, t_3 die gegebenen Mittellinien, so schneide man von jeder den dritten Teil ab und konstruiere aus den Resten das Dreieck BGH. Man mache HD gleich $\frac{1}{3}t_1$, ziehe BD und verlängere es um sich selbst über D hinaus, was C gibt. HG verlängere man über G hinaus um sich selbst, was A gibt. Verbindet man A mit B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

4) **Beweis.** Nach der Konstruktion ist D der Halbierungspunkt von BC, also ist AD die eine Mittellinie des Dreiecks. Nach der Konstruktion ist $HA = \frac{4}{3}t_1$, $HD = \frac{1}{3}t_1$, also $AD = t_1$, d. h. die Mittellinie AD hat die richtige Länge. Da aber der Punkt G von ihr den dritten Teil abschneidet, so sind BG und CG Teile der beiden anderen Mittellinien. Dabei ist $BG = \frac{2}{3}t_2$ und auch gleich $\frac{2}{3}BE$, folglich ist $BE = t_2$. Da nach der Konstruktion GH und BC durch D halbiert sind, so ist das Viereck $BGCH$ ein Parallelogramm. Folglich ist $GC = BH = \frac{2}{3}t_3$. Da aber zugleich $GC = \frac{2}{3}CF$ ist, so ist $CF = t_3$. Das Dreieck hat also die verlangten Mittellinien.

5) **Determination.** Die Aufgabe ist lösbar, sobald die Summe der beiden kleineren Mittellinien größer ist als die dritte, denn dann kann $\triangle BGH$ konstruiert und die Figur vollendet werden. Im Grenzfalle $t_1 + t_3 = t_2$ wird die Fläche des Dreiecks ABC gleich Null. Warum? Sind zwei Mittellinien gleich, so wird das Dreieck gleichschenklig, sind alle drei gleich, so wird es gleichseitig.

Bemerkung. Daraus ergibt sich folgender Kongruenzsatz: Stimmen zwei Dreiecke in den Mittellinien überein, so sind sie kongruent.

200) Drittes Beispiel einer Dreieckskonstruktion.

1) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der zur dritten gehörigen Mittellinie.

2) **Analysis.** Angenommen, ABC wäre das gesuchte Dreieck mit den Seiten $BC = a$ und $AC = b$ und der Mittellinie $CD = t_3$, dann läßt sich D als Mitte eines Parallelogramms $ACBE$ betrachten, welches a und b zu Seiten und AB und $CE = 2t_3$ zu Diagonalen hat. Die Hälfte CBE dieses Parallelogramms kann demnach aus den drei Seiten a b, und $2t_3$ konstruiert werden.

3) **Konstruktion.** Man gebe der beliebig hinzulegenden Geraden CE die Länge $2t_3$, schlage um C und E Bogen vom Radius a bezw. b, die einander in B schneiden, ziehe BD und verlängere es über D hinaus um sich selbst, und verbinde den neuen Endpunkt A mit C und C mit B, dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

4) Beweis und 5) Determination sind einfach.

Bemerkung. Damit sind zugleich folgende Aufgaben gelöst: a) Zwischen zwei konzentrischen Kreisen sei ein Punkt P gegeben; durch ihn soll von Kreis zu Kreis eine Gerade so gelegt werden, daß sie in P halbiert ist. b) Gegeben seien zwei konzentrische Kreise und ein zwischen ihnen liegender Punkt P. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, welches seine Ecken zu je zweien auf den beiden Kreisen und P zum Mittelpunkte hat.

201) Lassen sich zwei Vielecke auf dieselbe Art in homologe Dreiecke zerlegen, so sind die Vielecke kongruent.

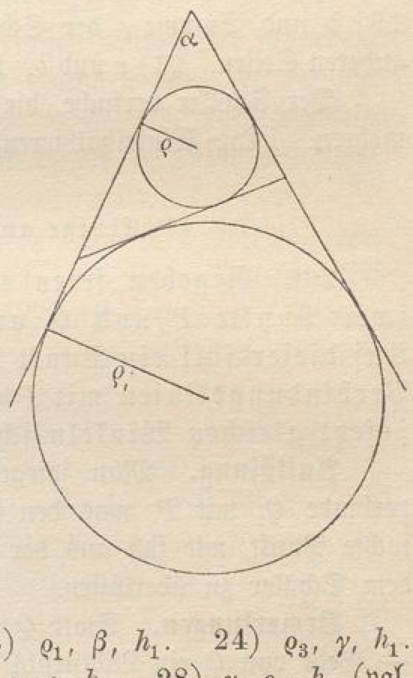
Der Beweis ist so einfach, daß er den Schülern überlassen werden kann.

In kongruenten Figuren stimmen homologe Geraden, homologe Winkel, homologe Kreise, homologe Flächenstücke überein.

γ) Dreieckskonstruktionen.*)

202) **Bezeichnungen.** Die den Punkten A, B, C gegenüberliegenden Dreiecksseiten sollen in der Regel mit a, b, c bezeichnet werden, die zu A, B, C gehörigen Winkel mit α, β, γ. Die Mittellinien des Dreiecks sollen t_1, t_2, t_3 heißen, die Winkelhalbierenden, bis zur Gegenseite gerechnet, w_1, w_2, w_3; die Höhen h_1, h_2, h_3; der Radius des Umkreises r, die Radien der vier Berührungskreise ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Dabei entsprechen die Marken 1, 2, 3 den Buchstaben A, B, C bezw. a, b, c. Der Umfang eines Dreiecks heiße u. Bei rechtwinkligen Dreiecken soll die Hypotenuse c heißen. Bei gleichschenkligen Dreiecken soll b die Basis sein.

Fig. 50.



203) Dreiecke zu konstruieren aus: 1) a, b, h_1. 2) a, b, h_3. 3) a, h_1, h_2. 4) a, h_2, h_3. 5) a, b, t_1. 6) a, t_1, t_2. 7) a, t_2, t_3. 8) a, b, t_3. 9) r, a, β. 10) r, a, h_1. 11) r, a, h_2. 12) r, a, t_1. 13) r, a, t_2.**) 14) ϱ, a, β. 15) ϱ, α, β. 16) ϱ, a_1, a_2 (a_1 und a_2 sollen die durch den Berührungspunkt entstehenden Teile von a sein). 17) ϱ, w_1, α. 18) ϱ_1, a, β. 19) ϱ_1, α, β. 20) ϱ_1, a_1, a_2. 21) ϱ_1, w_1, α. 22) ϱ, β, h_1. 23) ϱ_1, β, h_1. 24) ϱ_3, γ, h_1. 25) $\alpha, \varrho, \varrho_1$. 26) $\alpha, \varrho_1, \varrho_2$. 27) α, ϱ, h_1. 28) α, ϱ_2, h_1 (vgl.

*) Einige der Aufgaben sind schon vorher besprochen.

**) Der Ort der Mitten aller Sehnen, die von einem Punkte der Kreislinie ausgehen, ist ein Berührungskreis vom halben Radius. (Vgl. § 153.)

Fig. 50). 29) Aus den Seiten a_1, b_1, c_1 des Höhenfußpunktdreiecks. 30) Aus α, β und der Summe s der beiden anderen Seiten. 31) Aus α, β und der Differenz d der beiden anderen Seiten. (Bei diesen beiden Aufgaben kommen Sätze vom Außenwinkel beim gleichschenkligen Dreiecke zur Anwendung.)

204) Rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Hypotenuse c und Kathete a. 2) Hypotenuse c und α. 3) Hypotenuse c und Höhe h_3. 4) Hypotenuse c und t_1.*) 5) ϱ und spitzem Winkel α 6) ϱ und Kathete a. 7) ϱ_1 (an Kathete a) und α. 8) ϱ_1 und β. 9) ϱ_1 und a. 10) ϱ und ϱ_1. 11) ϱ und ϱ_3. 12) ϱ_1 und ϱ_3. 13) ϱ_3 und a. 14) ϱ_3 und β. 15) Hypotenuse c und Summe s der beiden Katheten. 16) Hypotenuse c und Unterschied d der beiden Katheten.

205) Gleichschenklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Basis b und Höhe h_2 (oder ϱ_1). 2) Basis b und ϱ. 3) Basis b und ϱ_2. 4) Basis b und $\sphericalangle \beta$. 5) Basis b und t_1. 6) Basis b und h_1. 7) ϱ und ϱ_2. 8) ϱ und h_2 (oder ϱ_1). 9) ϱ und β. 10) ϱ und α. 11) a und h_1. 12) α und w_1. 13) β und w_1. 14) ϱ_2 und β. 15) ϱ_2 und α. 16) ϱ_1 und α. 17) ϱ_1 und β. 18) a und t_2. 19) b und Summe s der Schenkel. 20) a und Summe der beiden anderen Seiten. 21) r und b. 22) r und a. 23) r und β. 24) r und α.

Der Schüler versuche, die Beispiele dieses Abschnitts selbst zu vermehren. (Die Winkelhalbierenden pflegen Schwierigkeiten zu machen.)

δ) Einige andere Konstruktionen.

206) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade KL und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß dessen Verbindungslinien mit P und Q die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.**)

Auflösung. Man spiegele Q gegen die Gerade, was Q_1 gibt, verbinde Q_1 mit P, was den Schnittpunkt X gibt. Dies ist der gesuchte Punkt, wie sich aus der Geraden XQ leicht ergibt. — Beweis dem Schüler zu überlassen.

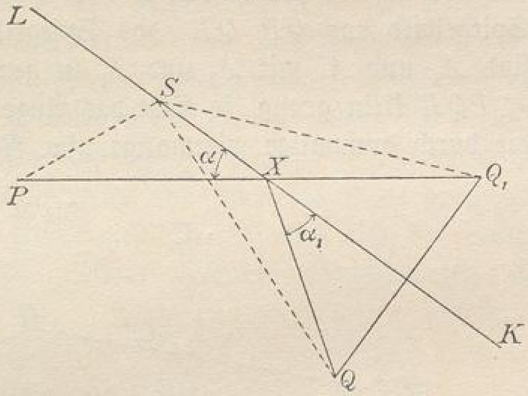
Bemerkungen. Statt Q zu spiegeln, kann man auch P spiegeln. — Geht von Q ein Lichtstrahl an die spiegelnde Gerade KL, so wird er so zurückgeworfen, daß $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$ ist. Er hat also, um von Q

*) Vgl. Anm. 2) auf Seite 77.

**) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.

aus ins Auge, welches sich in P befinden möge, zu gelangen, den konstruierten Weg QXP zurückzulegen. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von PX das Spiegelbild Q_1 von Q.

Fig. 51.



Die Gerade $Q_1P = XQ_1 + PX$ ist der kürzeste Weg zwischen Q_1 und P. Folglich ist auch $QX + XP$ der kürzeste Weg, der von Q aus zum Spiegel und dann nach P führt. Der Lichtstrahl, der von Q zum Spiegel und nach dem Auge geht, hat demnach den kürzesten unter den möglichen Wegen eingeschlagen.

207) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade KL und zwei beliebige Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt X so konstruiert werden, daß dessen Verbindungslinien mit P und Q die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.*)

(Die Auflösung soll dem Schüler überlassen bleiben, der wiederum mit der Spiegelung des einen Punktes zu beginnen hat. Er versuche auch zu zeigen, daß der Unterschied der Wege PX und XQ ein Höchstwert für alle möglichen Wege von P zur Geraden und vom Schnittpunkte nach Q ist.)

208) Innerhalb eines gegebenen Winkels PQR seien zwei Punkte A und B gegeben; auf den Schenkeln sollen Punkte C und D so bestimmt werden, daß AC und CD mit dem einen Schenkel entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, CD und DB mit dem anderen. (Fig. 52.)

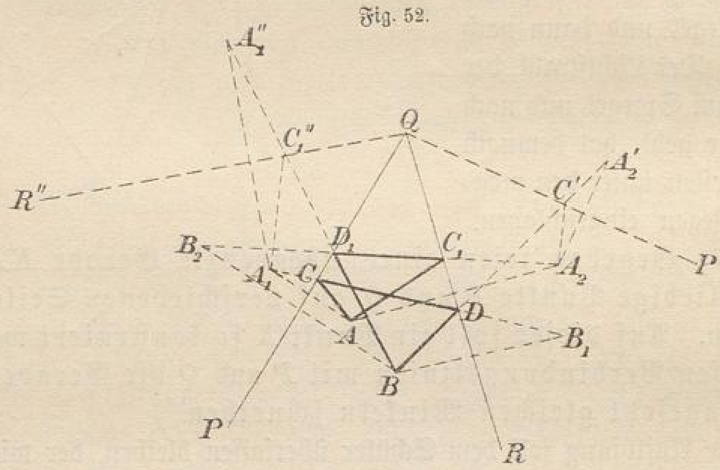
(Man bilde die Spiegelbilder A_1 und B_1 von A und B in bezug auf die Schenkel PQ und QR, dann gibt die Gerade A_1B_1 die gesuchten Punkte C und D. Bildet man die Spiegelbilder A_2 und B_2 in bezug auf die vertauschten Schenkel, so erhält man ein zweites Punktpaar C_1 und D_1. Die Beweise führe der Schüler.)

Bemerkungen. Denkt man sich in A ein Kerzenlicht, in B das Auge der Beobachters, und sind PQ und QR Spiegel, so ist $AC + CD + DB$ der Weg eines zum Auge gelangenden Lichtstrahls, der von jedem Spiegel unter demselben Winkel zurückgeworfen (re-

*) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.

flektiert) wird, unter dem er auf ihn fällt. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von BD ein Spiegelbild A_2' von A, und zwar ist $A_2'B = AC + CD + DB$. Auch in A_1'' sieht das Auge ein Spiegelbild von A, und dabei ist $A_1''B = AC_1 + C_1D_1 + D_1B$. — QP' ist das Spiegelbild von QP, QR'' das Spiegelbild von QR. In der Figur sind A_2' und A_1'' mit A_2 und A_1 in gewisse Beziehung gesetzt. — Ist $\sphericalangle PQR$ klein genug, so sieht das Auge B noch weitere Bilder von A, die durch dreimalige, viermalige usw. Reflexion an den Spiegeln her-

Fig. 52.



vorgebracht werden. Auch für diese Spiegelungen versuche man die Wege der Lichtstrahlen zu konstruieren. Man untersuche, ob der Weg $AC + CD + DB$ ein kleinster Weg (Minimalweg) für den Gang von A nach dem ersten, dann zum zweiten Spiegel, dann nach B ist, ebenso ob $AC' + C'D' + D'B$ ein Minimalweg ist usw. — A und B können ihre Rollen vertauschen. Je nach ihrer Lage können gewisse Sonderfälle eintreten.

208a) Man versuche dieselbe Aufgabe für eine von drei spiegelnden Geraden begrenzte Fläche zu lösen.

209) Eine Gerade von gegebener Länge a so in einen festen rechten Winkel PQR einzulegen, daß ihre Endpunkte auf den Schenkeln liegen und sie den einen Schenkel unter gegebenem spitzen Winkel α schneidet.

(Nach dem Satze über den Um-Kreis des rechtwinkligen Dreiecks hat die Mitte der Geraden zum geometrischen Ort einen um Q mit dem Radius $\frac{a}{2}$ beschriebenen Kreisbogen. Man zeichne einen Radius

*) Einiges aus den obigen Übungen wird wiederholt.

$QC = \frac{a}{2}$ so, daß $\sphericalangle CQP$ gleich α ist, und schlage um C einen Kreisbogen mit demselben Radius $\frac{a}{2}$, der QP in A schneidet. AC ist dann die Hälfte der Geraden in der geforderten Lage, die Verlängerung CB bis zum anderen Schenkel vollendet die Konstruktion.)

Bemerkung. Gleitet eine Gerade von gegebener Länge mit den Endpunkten auf den Schenkeln eines festen rechten rechten Winkels, so bewegt sich ihre Mitte auf dem besprochenen Kreise. Gleitet also der eine Endpunkt auf dem einen Schenkel und wird die Mitte durch eine Kurbel auf dem genannten Kreise geführt, so muß sich der andere Endpunkt geradlinig bewegen. (Eine wichtige Geradführung der Maschinenkunde.)

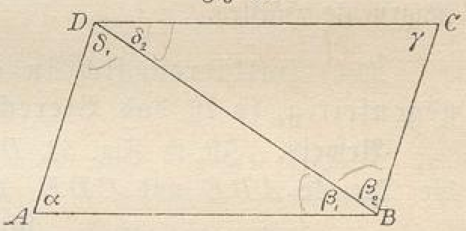
b) Lehre von den Parallelogrammen.

α) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung.

210) Die Gegenseiten und ebenso die Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich.

Beweis. Durch die Diagonale BD wird das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 53) in zwei kongruente Dreiecke geteilt, denn beide Dreiecke stimmen überein in der Seite BD, in den Winkeln δ_1 und β_2 (die als Wechselwinkel bei Parallelen gleich sind) und in den Winkeln β_1 und δ_2 (aus demselben Grunde), also nach dem zweiten Kongruenzsatze. Folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AB = CD$ und $AD = CB$; ferner ist $\alpha = \gamma$, außerdem aber $\delta_1 + \delta_2 = \beta_2 + \beta_1$, d. h. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$.

Fig. 53.



211) Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Die Kongruenz der Dreiecke in Fig. 53 folgt jetzt nach dem dritten Kongruenzsatze. Aus ihr folgt $\delta_1 = \beta_2$, sodaß $AD \parallel BC$ ist; außerdem folgt $\delta_2 = \beta_1$, sodaß auch $CD \parallel AB$ ist.

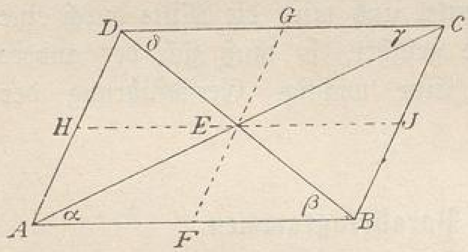
212) Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Fig. 53 $AB \# CD$, so folgt aus dem Parallelismus, daß $\delta_2 = \beta_1$ ist. Die Dreiecke stimmen jetzt in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem ersten Kongruenzsatze. Folglich ist auch $\delta_1 = \beta_2$ und daher auch $AD \parallel CB$, also $ABCD$ ein Parallelogramm.

213) Die Diagonalen jedes Parallelogramms halbieren einander.

Beweis. In Fig. 54 sind die Dreiecke ABE und CDE nach dem zweiten Kongruenzsatze kongruent, denn $DC = AB$, $\delta = \beta$ und $\gamma = \alpha$, folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AE = EC$ und $DE = EB$.

Fig. 54.

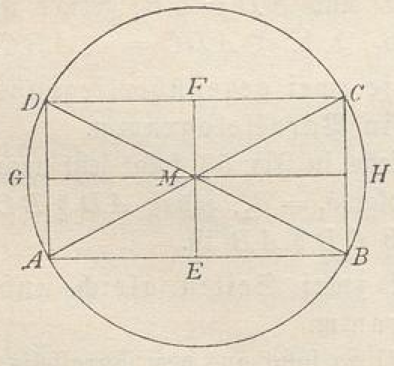


Bemerkung. Jedes Parallelogramm hat zwei Mittellinien (FG und HJ), die zu den Seiten parallel sind und durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gehen. Sie zerlegen das Parallelogramm in vier kongruente Parellelogramme, denn diese lassen sich mit den gleichliegenden Diagonalen so aufeinander decken, daß kongruente Dreiecke (zweiter Kongruenzsatz) aufeinander fallen. Die Mittellinien halbieren also die Seiten und sind ihnen bezüglich gleich. Jede durch den Mittelpunkt des Parallelogramms gelegte Gerade zerlegt das Parallelogramm in kongruente Hälften.

214) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Fig. 54 $DE = BE$ und $AE = CE$, so sind die Dreiecke ABE und CDE da auch die Scheitelwinkel übereinstimmen, kongruent (nach dem ersten Kongruenzsatze). Folglich ist $AB = CD$, und da auch die Wechselwinkel übereinstimmen, $AB \parallel CD$, also ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Fig. 55.



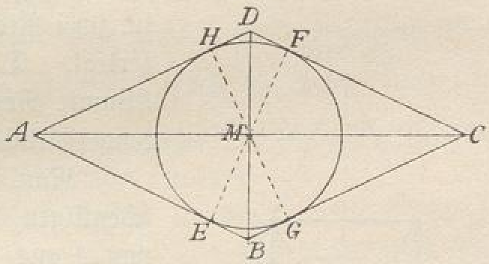
215) Ist im Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind sämtliche Winkel rechte (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rechteck. Im Rechteck sind beide Diagonalen gleich. Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen gleichlang, so ist es ein Rechteck. (Warum?) Durch die Ecken des Rechtecks läßt sich ein Kreis legen. Das Rechteck

hat zwei Symmetrieachsen, die Mittellinien des Rechtecks. (Vgl. Fig. 55.) Der dem Rechteck umbeschriebene Kreis ist gleichzeitig der den rechtwinkligen Dreiecken ABC, ABD usw. umbeschriebene. (Vgl. Winkel im Halbkreis.)

216) Sind in einem Parallelogramm zwei zusammenstoßende Seiten gleich, so sind alle Seiten gleich (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rhombus.

Der Rhombus wird durch die beiden Diagonalen in vier kongruente Dreiecke zerlegt. (Warum?) Folglich: Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Beide sind Symmetrieachsen des Rhombus. Die Winkel des Rhombus werden durch die Diagonalen halbiert. Die vom Schnittpunkte der Diagonalen auf die Seiten des Rhombus gefällten Lote sind gleich lang, in den Rhombus läßt sich also ein Kreis beschreiben (Beweise dies an Fig. 56.)

Fig. 56.



Stehen in einem Viereck die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren sie sich gegenseitig, so ist das Viereck ein Rhombus. (Warum?) Werden in einem Parallelogramm die Winkel durch die Diagonalen halbiert, so ist es ein Rhombus. (Warum?)

217) Das Quadrat ist Rhombus und Rechteck zugleich, seine Diagonalen sind also gleich, halbieren sich gegenseitig und stehen aufeinander senkrecht. Die Winkel des Quadrates werden durch die Diagonalen halbiert. In das Quadrat und um dasselbe läßt sich ein Kreis beschreiben.

β) Quadratkonstruktionen.

218) Folgende Konstruktionen sind schon durchgeführt worden: Über einer gegebenen Geraden ein Quadrat zu errichten. Ein Quadrat von gegebener Diagonale zu zeichnen; oder, was dasselbe ist, einem gegebenen Kreise ein Quadrat einzuzeichnen. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu zeichnen. Einem gegebenen Quadrate ein gegebenes kleineres einzuzeichnen (sodaß dessen Ecken auf seinen Seiten liegen). Um ein gegebenes Quadrat ein gegebenes größeres zu legen (sodaß dessen Seiten durch seine Ecken gehen).

219) **Folgende Konstruktionen sollen durchgeführt werden:**

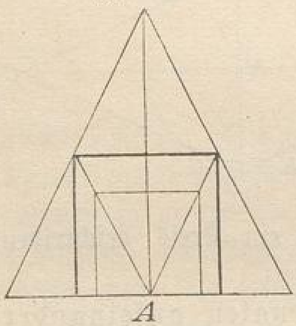
1) Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Umfang gleich einer gegebenen Geraden ist.

2) In ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck ein auf der Grundlinie stehendes Quadrat so einzuzeichnen, daß dessen obere Ecken in die Schenkel fallen.

[Denkt man sich die Figur gezeichnet, so erkennt man, daß sie einfach symmetrisch ist.

Ist BC die Grundlinie des Dreiecks, AD die Höhe, $EFGH$ das Quadrat mit der Grundlinie EF, die auf BC liegt, so ist dieses in zwei Rechtecke vom Seitenverhältnis $1:2$ zerlegt. Die Diagonale AG hat eine bestimmte Neigung gegen AC, die dem Kathetenverhältnis $1:2$ entspricht.

Fig. 56 b.



Man hat also in dem gegebenen gleichschenkligen Dreieck das Lot DA zu fällen, von A aus von der Grundlinie ein beliebiges Stück AF_1 abzuschneiden und im Endpunkte ein Lot F_1G_1 von doppelter Länge zu errichten, AG_1 zu ziehen und so weit zu verlängern, bis es den Schenkel in G trifft, durch G die Parallele GH zur Grundlinie zu legen und das Quadrat zu vollenden.]

3) In einen gegebenen Halbkreis ein auf dem Durchmesser stehendes Quadrat einzuzeichnen, von dem zwei Ecken in die Kreislinie fallen.

4) In ein gegebenes Kreissegment ein Quadrat in entsprechender Weise einzuzeichnen.

5) In einen gegebenen Sektor ein Quadrat so einzuzeichnen, daß zwei Ecken auf den Kreisbogen, zwei in die Grenzradien fallen.

(Man zeichne in den Winkel des Sektors zunächst ein kleineres Quadrat symmetrisch ein und lege durch dessen Grundecken den zugehörigen konzentrischen Kreisbogen. Dann verbinde man die Spitze mit den Grundecken des Hilfsquadrates und verlängere die Geraden bis zum gegebenen Kreisbogen. Dies gibt die Grundecken des gesuchten Quadrates.)

6) In einen gegebenen Rhombus ein Quadrat einzuzeichnen.

7) Einem gegebenen Doppelsegmente*) ein Quadrat einzubeschreiben.

---

*) Es ist die Figur gemeint, die durch Aneinanderlegen zweier kongruenter Kreissegmente längs der Sehnen entsteht.

8) Durch den Mittelpunkt eines gegebenen Quadrates sei eine beliebige Gerade gelegt. Um das Quadrat soll ein anderes beschrieben werden, von dem zwei Gegenecken auf der Geraden liegen. (Man bilde von einer der gegebenen Quadratecken das Spiegelbild.)

γ) Rechteckskonstruktionen.

220) **Aufgaben ohne Kreise.**

1) Ein Rechteck von gegebenem Umfange zu konstruieren, bei dem das eine Seitenpaar doppelt so lang ist als das andere.

2) Dieselbe Aufgabe für das Seitenverhältnis 3 : 1 oder 4 : 1, oder 3 : 2, oder 4 : 3 usw. zu lösen.

3) Ein Rechteck von gegebenem Umfange u und gegebener Diagonale d zu zeichnen. (Man konstruiere zunächst ein Dreieck aus $\frac{u}{2}$, dem anliegenden Winkel 45^0 und der diesem gegenüber liegenden Seite d. — Unten wird sich noch ein anderer Weg ergeben.)

4) Ein Rechteck von gegebener Höhe in ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck so einzuzeichnen, daß es auf dessen Grundlinie steht und zwei seiner Ecken auf den Schenkeln hat.

5) Dieselbe Aufgabe für ein Rechteck mit gegebener Grundlinie zu lösen.

6) Dieselbe Aufgabe für ein Rechteck mit gegebenem Seitenverhältnis 2 : 1 oder 1 : 2 zu lösen. (Die Hälfte des Rechtecks, die durch die Dreieckshöhe begrenzt wird, hat eine Diagonale von bestimmter Neigung. Vgl. 151 a.)

7) Dieselbe Aufgabe mit Rechtecken von beliebigen Seitenverhältnissen, z. B. 3 : 1 oder 1 : 3; 3 : 2 oder 2 : 3; 4 : 1 oder 1 : 4; 4 : 3 oder 3 : 4 usw. zu lösen.

8) Folgenden Hilfssatz zu beweisen: Sämtliche Rechtecke, die einem Quadrate einbeschrieben sind (wobei ihre Seiten paarweise parallel zu dessen Diagonalen sein müssen), haben denselben Umfang, nämlich die doppelte Diagonale. $\left(d = \frac{u}{2} \cdot\right)$

9) **Folgerung:** Denkt man sich diese Rechtecke so auf die eine Diagonale des Quadrates gestellt, daß die andere Diagonale gemeinschaftliche Symmetrieachse bleibt, so liegen die freien Ecken auf den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie ebenso wie die Höhe gleich der Quadratdiagonale ist. Daraus folgt: Hat ein gleichschenkliges Dreieck eine Höhe, die gleich der Grundlinie ist, so haben alle auf dem letzteren stehenden einbeschriebenen Rechtecke denselben Umfang, nämlich die

doppelte Höhe. (Beide Sätze lassen sich zu Konstruktionen benutzen, bei denen es sich um Rechtecke von gegebenem Umfang handelt.)

10) Die Aufgabe 3) mit Hilfe des unter 8) besprochenen Quadrates zu lösen.

11) Ein Rechteck von gegebenem Umfange und gegebenem Schnittwinkel der Diagonalen zu zeichnen. (Vgl. das unter 8) besprochene Quadrat; zwei Lösungen sind möglich.)

12) Die Aufgaben 1) und 2) mit Hilfe des unter 8) besprochenen Quadrates zu lösen.

13) Ein Rechteck von gegebenem Umfange in ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck so einzuzeichnen, daß es auf der Grundlinie steht und zwei Ecken auf den Schenkeln hat. (Man benutze das unter 9) genannte gleichschenklige Dreieck mit $b = h = \frac{u}{2}$. Wo die zusammengehörigen Schenkel beider Dreiecke einander schneiden, liegen zwei Ecken des gesuchten Rechtecks. Schneiden sich diese Schenkel nicht, so ist die Aufgabe unlösbar. Die Determination mit den Grenzfällen ist ausführlich zu bearbeiten.)

14) Ein Rechteck von gegebenem Umfange in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen. (Man ziehe das unter 8) besprochene Quadrat zu Hilfe. Die Determination ist ausführlich zu geben.)

15) Ein Rechteck von gegebenem Seitenverhältnis in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen. (Das Verhältnis sei z. B. 1 : 2 oder 2 : 1; 2 : 3 oder 3 : 2; 1 : 4 oder 4 : 1; 3 : 4 oder 4 : 3.)

16) Ein Rechteck von gegebener Diagonale in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen.

17) Ein Rechteck von gegebenem Schnittwinkel der Diagonalen in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen.

18) Ein Rechteck von gegebener Seite in einen gegebenen Rhombus einzuzeichnen. (Zwei Lösungen.)

19) Um einen Rhombus ein Rechteck zu beschreiben, von dem eine Seite der Richtung nach gegeben ist.

20) Um ein gegebenes Rechteck ein anderes zu legen, von dem eine Seite der Richtung nach gegeben ist.

21) In ein gegebenes Rechteck ein anderes von gegebener Diagonale einzuzeichnen. (Die Diagonale ist in enge Grenzen eingeschlossen.)

22) Folgenden Hilfssatz zu beweisen: Die einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke einbeschriebenen Rechtecke, die Stücke der Katheten zur Seite haben und deren eine Ecke in

die Hypotenuse fällt, haben sämtlich denselben Umfang. (Einfache Folgerung von 8.)

23) Einem beliebigen rechtwinkligen Dreiecke ein Rechteck gegebenen Umfangs einzuzeichnen. (Die Lösung beruht auf dem vorigen Hilfssatze. Man nehme ein gewisses rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck zur Hilfe.)

221) **Aufgaben mit Kreisen.**

1) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck einzubeschreiben, von dem eine Seite gegeben ist, die horizontal sein soll.

2) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck einzubeschreiben, für welches der Schnittwinkel der Diagonalen gegeben ist und dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll.

3) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck vom Seitenverhältnis 1 : 2 einzubeschreiben, dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll. (Man zeichne zunächst ein beliebiges Rechteck dieses Seitenverhältnisses mit einer Diagonale und benutze den dabei auftretenden Winkel.)

4) Dieselbe Aufgabe für beliebiges Seitenverhältnis zu lösen.

5) Einem gegebenen Kreise ein Rechteck von gegebenem Umfang einzubeschreiben, dessen größere Seite entweder wagerecht oder senkrecht sein soll. (Man kann z. B. das in Nr. 220) unter 8) besprochene Quadrat benutzen, welches den Kreis schneiden wird, wenn die Aufgabe lösbar ist.)

6) bis 10) Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem Halbkreise so einbeschrieben werden soll, daß es auf dessen Durchmesser steht und zwei Ecken in den Kreisbogen fallen. (Die geänderte Aufgabe 1) gibt zwei Fälle, entweder ist die Grundlinie oder die Höhe des Rechtecks gegeben. Die geänderte Aufgabe 2) kann man so lösen, daß man zunächst ein beliebiges Rechteck mit dem gegebenen Schnittwinkel der Diagonalen zeichnet, dieses durch die eine Mittellinie halbiert und die eine Diagonale der Rechteckshälfte zeichnet. Die Neigung dieser Diagonale ist bei dem gegebenen Halbkreise zu benutzen. Ähnlich ist bei der geänderten dritten und vierten Aufgabe zu verfahren. Bei der geänderten fünften kann das in Nr. 220) unter 9) besprochene Dreieck benutzt werden.

11) bis 15). Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck in entsprechender Weise einem gegebenen Kreissegmente einbeschrieben werden soll.

16) bis 20) Die Aufgaben 1) bis 5) für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem Viertelkreise so einbeschrieben werden soll, daß

die Rechtecke Teile der beiden Grenzradien zur Seite haben und die freie Ecke in die Kreislinie fällt.

21) Man versuche einige dieser Aufgaben für den Fall zu lösen, daß das Rechteck einem gegebenen Kreissektor symmetrisch so einbeschrieben werden soll, daß das eine Eckenpaar in die Kreislinie, das andere in die Grenzradien fällt.

22) Einem gegebenen Doppelsegmente ein Rechteck nach Art der Aufgaben 1) bis 5) einzubeschreiben.

δ) Rhombuskonstruktionen.

222) **Aufgaben ohne Kreise.**

1) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem ein Winkel gegeben ist.

2) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem eine Diagonale gegeben ist.*)

3) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, dessen Diagonalenverhältnis gleich 1 : 2 ist. (Man zeichne die Mittellinien des Quadrates und zeichne einen beliebig großen Rhombus vom Diagonalenverhältnis 1 : 2, für die die Mittellinien die Symmetrieachsen sind. Zu seinen Seiten lege man Parallelen durch die Ecken des Quadrates. Die Konstruktion läßt sich erheblich abkürzen.)

4) Dieselbe Aufgabe für ein beliebiges Diagonalenverhältnis zu lösen.

5) bis 8) Die Aufgaben 1) bis 4) dahin abzuändern, daß der Rhombus einem gegebenen Rechteck umbeschrieben werden soll.

9) In einen gegebenen Rhombus einen anderen einzuzeichnen, von dem die Länge einer Diagonale gegeben ist.

10) In einen gegebenen Rhombus einen anderen einzuzeichnen, von dem die Richtung einer Diagonale gegeben ist.

11) Um ein gegebenes Quadrat einen Rhombus zu legen, bei dem der eine Winkel das Doppelte, oder das Dreifache, oder das Fünffache des anderen ist. (Der gestreckte Winkel ist bezw. in 3, 4, 6 gleiche Teile zu zerlegen.)

12) Dieselbe Aufgabe für den Fall des Rechtecks statt des Quadrates zu lösen.

13) Einen Rhombus zu konstruieren, von dem eine Seite und die Summe der Diagonalen gegeben ist. (Man konstruiere zunächst

---

*) Die Aufgabe, um ein Quadrat einen Rhombus zu zeichnen, von dem eine Seite gegeben ist, läßt sich erst auf einem höheren Standpunkte lösen.

ein Hilfsdreieck aus der halben Diagonalensumme $\frac{s}{2}$, dem anliegenden Winkel 45^0 und der diesem gegenüber liegenden Rhombusseite a. Durch Zeichnung der zu $\frac{s}{2}$ gehörigen Dreieckshöhe wird der Quadrant des gesuchten Rhombus vollendet.)

14) Durch den Mittelpunkt eines Rhombus sei eine Gerade gelegt. Um den Rhombus einen anderen zu zeichnen, der zwei Gegenecken auf der Geraden hat. (Man bilde das Spiegelbild einer der Rhombusecken.)

223) **Aufgaben mit Kreisen.**

1) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen eine Diagonale nach Länge und Richtung gegeben ist.

2) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem ein Winkel gegeben ist, und dessen eine Diagonale eine gegebene Richtung haben soll. (Verschiedene Fälle sind möglich.)

3) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem eine Seite a nach Länge und Richtung gegeben ist. (Man konstruiere zunächst ein rechtwinkliges Dreieck von der Hypotenuse a und der zugehörigen Höhe ϱ.)

4) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus von gegebenem Umfang zu legen, dessen eine Diagonale gegebene Richtung haben soll.

5) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, für dessen Seiten zwei verschiedene Richtungen vorgeschrieben sind.

6) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem zwei Seiten oder ihre Verlängerungen durch zwei gegebene Raumpunkte gehen sollen.

7) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen eine Diagonale der Richtung nach gegeben ist, während eine seiner Seiten einen zweiten gegebenen Kreis berühren soll. (An Stelle des zweiten Kreises kann auch ein Punkt treten.)

8) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, von dem zwei aneinander stoßende Seiten einen zweiten gegebenen Kreis berühren sollen. (Mehrere Fälle sind möglich.)

9) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen Diagonalen das Längenverhältnis $1:2$ haben. (An des letzteren Stelle kann auch ein beliebiges Längenverhältnis treten.)

10) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu legen, dessen Winkel im Verhältnis $1:2$ stehen, und dessen größere Diagonale eine vorgeschriebene Richtung hat. (An Stelle des Verhältnisses $1:2$

darf auch irgend ein anderes treten, welches mit den bisher bekannten Fällen der Kreisteilung erledigt werden kann, z. B. 1 : 3, 1 : 5, 1 : 7.)

11a) Um einen gegebenen Rhombus einen anderen zu legen, der einen um die Mitte des ersteren gelegten und dessen Seiten schneidenden Kreis berührt.

11b) Gegeben sei ein Rhombus und ein ganz in seinem Innern liegender konzentrischer Kreis. Um diesen Kreis soll ein Rhombus gelegt werden, dessen Seitenverlängerungen durch die Ecken des gegebenen Rhombus gehen.

Bemerkung. Nach diesen Aufgaben lassen sich durch die Ecken eines Rhombus die Seiten (bezw. Seitenverlängerungen) anderer Rhomben legen, deren Diagonalenrichtungen und Flächeninhalte ganz beliebige sein können, während die Radien der konzentrischen Berührungskreise zwischen Null und einem gewissen Höchstwerte liegen.

12) Einem gegebenen Doppelsegment einen Rhombus einzubeschreiben.

13) Einem gegebenen Doppelsegment einen Rhombus umzubeschreiben, von dem eine Diagonale (oder ein Winkel, oder eine Seitenrichtung, oder ein Diagonalenverhältnis, oder ein einfaches Winkelverhältnis) gegeben ist.

14) Um ein gegebenes Doppelsegment einen Rhombus zu legen, dessen eine Seite einen gegebenen Kreis berühren soll.

ε) Parallelogrammkonstruktionen.

224) **Einfache Aufgaben.**

1) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus zwei ungleichen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

2) Ein P. z. k. aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und einem Winkel.

3) Ein P. z. k. aus einer Seite und den beiden Diagonalen.

4) Ein P. z. k. aus zwei ungleichen Seiten und einer der Diagonalen.

5) Ein P. z. k. aus den Diagonalen und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

6) Ein P. z. k. aus den Diagonalen und dem Winkel, den die kleineren Diagonale mit der größeren Seite bildet.

7) Ein P. z. k. aus den Diagonalen und dem Winkel, den die größere Diagonale mit der größeren Seite bildet.

8) Ein P. z. k. aus einer Diagonale, dem dieser gegenüber liegenden Winkel und dem Umfange des Parallelogramms. (Man konstruiere zunächst ein Dreieck aus der Diagonale (d), dem halben

Umfange $\left(\frac{u}{2}\right)$ und der Hälfte des der Diagonale gegenüber liegenden Winkels $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

9) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus zwei ungleichen Seiten und der Vorschrift, daß der eine Winkel das Doppelte (oder das Dreifache, oder das Fünffache, oder das Siebenfache) des anderen sei.

10) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einem Winkel, dem Umfang und der Vorschrift, daß die eine Seite das Doppelte (oder das Dreifache, Vierfache usw.) des anderen sein soll.

225) **Aufgaben für um- und einzubeschreibende Parallelogramme.**

1) Einem gegebenen Viereck (beliebiger Art) ein Parallelogramm einzuschreiben, dessen Ecken drei von den Seiten des Vierecks halbieren. (Es ist zu zeigen, daß auch die vierte Seite halbiert wird und daß die Parallelogrammseiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind.)

2) Einem gegebenen Viereck ein Parallelogramm einzuzeichnen, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen des Vierecks sind, und von den Schenkeln des einen Viereckswinkels den dritten (oder den vierten, oder den fünften) Teil abschneiden. (Die Möglichkeit der Konstruktion ist nachzuweisen.)

3) Einem gegebenen Rhombus ein Parallelogramm einzubeschreiben, dessen Diagonalen gegeben sind. (Die Ecken des Parallelogramms sollen auf den vier Seiten des Rhombus liegen. Sind die Diagonalen des Parallelogramms zu groß, so können die Ecken des Parallelogramms auf die Verlängerungen der Rhombusseiten fallen. Der Rhombus kann auch ein Quadrat sein. An seine Stelle kann auch ein Rechteck oder ein Parallelogramm treten.)

Einem gegebenen Doppelsegment ein Parallelogramm einzubeschreiben, dessen Diagonalen gegeben sind.

5) Einem gegebenen Doppelsegment ein Parallelogramm einzuzeichnen, von dem eine Seite bereits eingezeichnet ist.

6) Um ein gegebenes Doppelsegment ein Parallelogramm von gegebenen Seitenrichtungen zu legen.

c) Anfangsgründe der Kreislehre.

α) Rückblick auf das schon Bekannte.

226) Bekannt sind bereits folgende Begriffe der Kreislehre: Kreislinie, Kreisfläche, Kreisumfang (Peripherie, die Zahl π), Sehne

(Chorde), Sekante, Durchmesser (Diameter), Halbmesser (Radius), Bogen, Zentriwinkel, Kreisausschnitt (Sektor), Kreisabschnitt (Segment), Berührende (Tangente), der umbeschriebene Kreis (Um-Kreis) des Dreiecks, der einbeschriebene Kreis (In-Kreis) des Dreiecks, die äußeren Berührungskreise (An-Kreise) des Dreiecks, die Kreisteilung, das regelmäßige Vieleck mit um- und einbeschriebenem Kreise. Der umbeschriebene Kreis des Rechtecks. Der einbeschriebene Kreis des Rhombus.

227) Bekannt sind bereits folgende Sätze der Kreislehre: Bei jedem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Mittelpunktsabstände, gleiche Bogen, gleiche Segmente, gleiche Sektoren, gleiche Zentriwinkel. Auch sämtliche Umkehrungen dieses Satzes sind bekannt. Der Satz vom rechten Winkel im Halbkreise. Die Sätze über das vom Kreismittelpunkte auf die Sehne gefällte Lot und die entsprechenden Umkehrungen. Die Sätze über die Gleichheit der von einem Punkte aus an den Kreis gelegten Tangenten und die Halbierende ihres Schnittwinkels. Der Satz vom umbeschriebenen Kreise des Dreiecks. (Durch drei Punkte ist im allgemeinen nur ein Kreis möglich.) Durch zwei Punkte sind unendlich viele Kreise möglich, die ihre Mittelpunkte auf dem Mittellote haben. Einfache Sätze über das Kreisbüschel. Der Satz vom einbeschriebenen Kreise des Dreiecks. Der Satz von den anbeschriebenen Kreisen des Dreiecks. (An drei nicht parallele Geraden lassen sich vier Kreise legen.) An zwei Gerade lassen sich unendlich viele Kreise legen, die ihre Mittelpunkte auf den beiden Winkelhalbierenden haben. Jedes regelmäßige Vieleck hat einen um- und einen einbeschriebenen Kreis. Zu jedem Kreise gehört ein ein- und ein umbeschriebenes regelmäßiges Vieleck von gegebener Seitenzahl. Sätze über den Zusammenhang zwischen Winkeln und Bogen, z. B. $\widehat{\alpha} = \pi \frac{\alpha^0}{180^0}$, $\alpha^0 = \frac{\widehat{\alpha}}{\pi} 180^0$. Dabei ist $\pi = 3{,}14159265 \ldots$

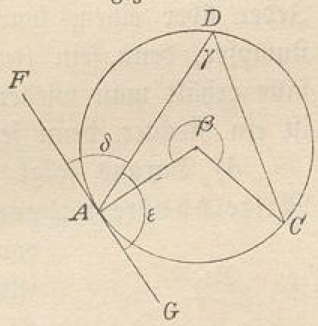
228) Bekannt sind bereits z. B. folgende Konstruktionen der Kreislehre: Vervielfachung des Kreisbogens, seine wiederholte Halbierung. Die Einteilung der Peripherie in 2, 4, 8, 16, 32, ... Teile, in 3, 6, 12, 24, 48, ... Teile. Die Konstruktion der entsprechenden Winkel. Die Konstruktion der entsprechenden regelmäßigen Vielecke, die dem Kreise ein- oder umbeschrieben sind. Die Konstruktion einiger regelmäßiger Vielecke über gegebenen Geraden (von gegebener Seite). Die Konstruktion des umbeschriebenen Kreises und der vier Berührungskreise für das Dreieck. Einige Dreiecks- und Viereckskonstruktionen, die mit der Kreislehre zusammenhängen. Konstruktionen einiger Reihen von Berührungskreisen. Konstruktion der von einem Punkte

aus an einen gegebenen Kreis gehenden Tangente. Konstruktion der äußeren und der inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise.

β) Die Peripherie- und Zentriwinkel, der Tangenten-Sehnenwinkel.

229) Liegt der Scheitel eines Winkels auf der Kreislinie, und sind seine Schenkel Sehnen, so heißt der Winkel ein **Peripheriewinkel**. (Ein solcher ist z. B. $\sphericalangle \gamma$ oder $\sphericalangle ADC$ in Fig. 57.) Von diesem Winkel sagt man, daß er auf dem konkaven Bogen AC steht. Verbindet man einen Punkt E dieses Bogens mit A und C, so erhält man einen Peripheriewinkel, der auf dem konvexen Bogen AC steht. [So steht auch der konkave Zentriwinkel AMC auf dem konkaven Bogen AC, der konvexe Zentriwinkel AMC oder β auf dem konvexen Bogen AC. Über einer Sehne AC kann sowohl ein konkaver, als auch ein konvexer Zentriwinkel stehen.]

Fig. 57.



230) Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Zentriwinkels.

Beweis. Erster Fall. Schenkel AM (Fig. 58a) liegt auf AB. Dann ist $\alpha = \beta + \gamma$ (Außenwinkel), da aber $\beta = \gamma$ ist, so folgt $\alpha = 2\beta$ und $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Zweiter Fall. M liegt zwischen AB und BC. (Fig. 58b.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha_1 = 2\beta_1$ (soeben be-

Fig. 58a.

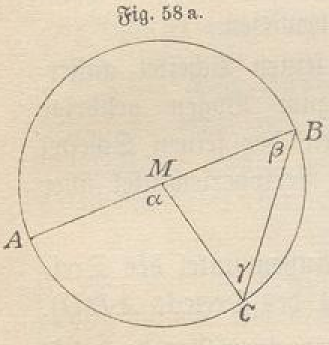


Fig. 58b.

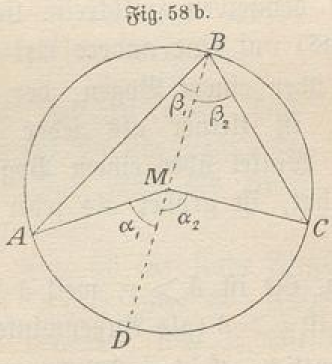
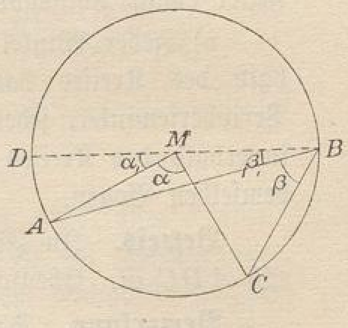


Fig. 58c.



wiesen) und $\alpha_2 = 2\beta_2$, folglich $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$, d. h. $\sphericalangle AMC = 2 \cdot (\sphericalangle ABC)$, also $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}(\sphericalangle AMC)$.

Dritter Fall. M liegt außerhalb ABC. (Fig. 58c.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$, aber $\alpha_1 = 2\beta_1$, folglich durch Subtraktion $\alpha = 2\beta$.

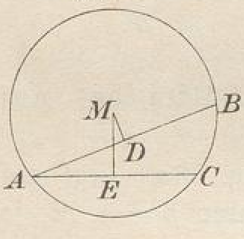
231) **Folgerungen.** a) Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen eines Kreises stehen, sind einander gleich. Denn sie sind Hälften desselben Zentriwinkels.

b) Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleicher Kreise sind einander gleich.

c) Jeder über einem konkaven Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein spitzer Winkel, denn sein Zentriwinkel ist kleiner als 180^0. Jeder über einem konvexen Bogen stehende Peripheriewinkel ist ein stumpfer, denn sein Zentriwinkel ist größer als 180^0. Im Zwischenfalle erhält man wieder den Satz: der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter, denn sein Zentriwinkel ist gleich 180^0.

d) Daraus folgt der Satz: Von zwei Sehnen ist die dem Mittelpunkte nähere die größere. Man denke sich beide Sehnen von einem Punkte A ausgehend und in demselben Halbkreise liegend (Fig. 59). Dann ist $\sphericalangle ACB$ ein stumpfer. Folglich ist AB größer als AC, denn dem größten Dreieckswinkel liegt die größte Seite gegenüber. Nun ist aber $ME > MD$, denn der mit Radius MD um M gelegte Kreis schließt die ganze Linie AB (mit Ausnahme des Punktes D) aus, also auch alle Punkte des durch AB begrenzten Segmentes ACB. (Vgl. Nr. 75.) Also ist die dem Mittelpunkte nähere Sehne die größere.

Fig. 59.



Nun gehören aber zu gleichen Sehnen gleiche Abstände, also gilt der Satz auch dann, wenn die Sehnen nicht von demselben Punkte ausgehen und nicht in demselben Halbkreise liegen. Der Satz wird später (nach Pythagoras) auf eine andere Art bewiesen.

e) Jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel außerhalb des Kreises hat, ist kleiner als jeder zum Bogen gehörige Peripheriewinkel; jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel innerhalb des Kreises hat, ist größer als jeder Peripheriewinkel über demselben Bogen.

Beweis. In Fig. 60 ist $\delta > \gamma$, weil δ Außenwinkel des Dreiecks ADC ist. Ebenso ist $\varepsilon > \delta$ (als Außenwinkel des Dreiecks AED).

Bemerkung. Sämtliche gleichen Winkel über einer Geraden AB haben ihre Scheitel auf einem durch A und B gehenden Kreisbogen; kleinere Winkel über AB haben den Scheitel außerhalb dieses Bogens, größere dagegen innerhalb.

232) Zu jeder Sehne AB gehören zwei Bogen, folglich auch zwei Arten von Peripheriewinkeln, spitze und stumpfe. Die entsprechenden Winkel sind Supplementwinkel. In Fig. 61 z. B. ist die

Fig. 60.

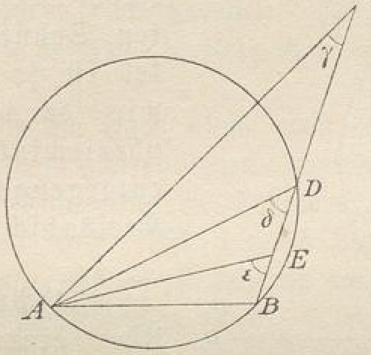
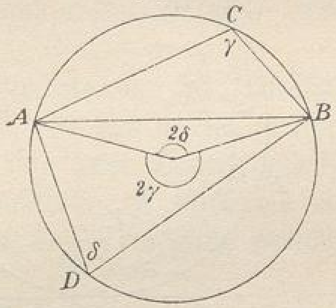


Fig. 61.



Summe des konkaven und des konvexen Zentriwinkels gleich 4 Rechten, folglich ist $\gamma + \delta = 2R$.

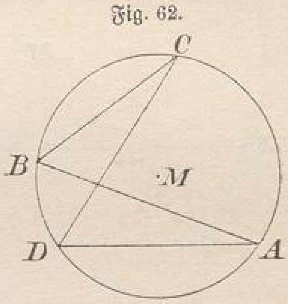
Jedes Viereck, dessen Ecken auf einem Kreise liegen, heißt ein Sehnenviereck. Demnach gilt für konvexe Sehnenvierecke der Satz:

Im Sehnenviereck ist die Summe gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten.

Umkehrung: Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten, so ist das Viereck ein Sehnenviereck; d. h. der durch drei seiner Eckpunkte gelegte Kreis geht auch durch den vierten. Warum? (Vgl. Nr. 231 e.)

Bemerkung. Ist das Sehnenviereck ein sog. überschlagenes, wie es durch Fig. 62 dargestellt ist, so sind die Gegenwinkel A und C gleich, ebenso B und D, an Stelle der Supplementwinkel treten also gleiche Winkel.

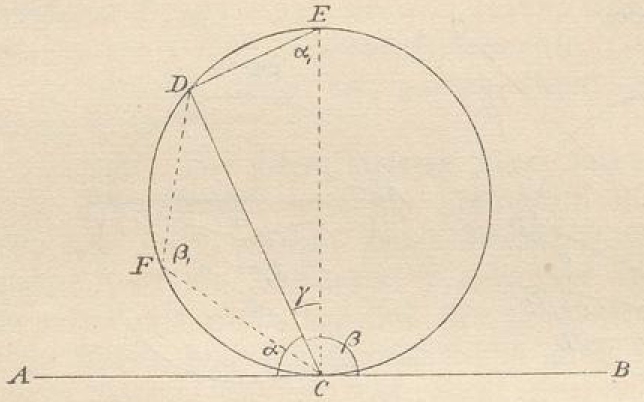
Fig. 62.



233) Den Winkel zwischen einer Tangente und einer von ihrem Berührungspunkte ausgehenden Sehne bezeichnet man als einen Tangenten-Sehnenwinkel.

Ein solcher ist in Fig. 63 der spitze Winkel ACD oder α, ebenso der stumpfe Winkel BCD oder β. Dort ist im Berührungspunkte C ein Lot CE errichtet, und E mit dem Endpunkte D der Sehne verbunden worden. Dadurch ist ein Peripheriewinkel α_1 entstanden, der als Komplementwinkel von γ ebenso groß sein muß, wie α, denn $\sphericalangle CDE = 90^0$, also $\alpha_1 = 90^0 - \gamma$. Demnach ist jeder Peripheriewinkel über CD, der auf derselben Seite von CD liegt, so groß wie α. Jeder auf der anderen Seite von CD liegende Peripheriewinkel über dieser Sehne ist aber gleich $180^0 - \alpha$, d. h. ebenso groß, wie β. Folglich gilt der Satz: Jeder Tangenten-Sehnenwinkel ist so groß, wie der Periepheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.

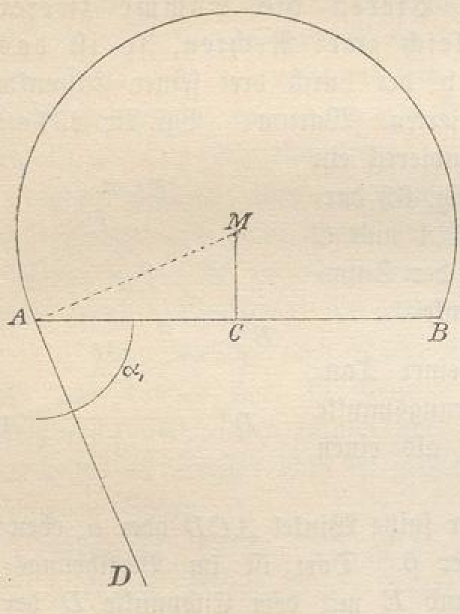
Fig. 63.



234) **Aufgabe.** Über einer Geraden AB einen Kreisbogen zu zeichnen, der einen gegebenen Winkel α als Peripheriewinkel über AB in sich faßt.

Auflösung. Ist AB die gegebene Gerade (Fig. 64) und α der gegebene Winkel, so trage man α als $\sphericalangle BAD$ an die Gerade AB an. In A errichte man ein Lot auf AD, ebenso auf AB im Halbierungspunkte C. Die Lote schneiden sich im Mittelpunkte des gesuchten Kreisbogens. (Warum?)

Fig. 64.



Bemerkungen. Ist α ein rechter Winkel, so hat man über AB als Durchmesser einen Halbkreis zu schlagen. — Der geometrische Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel, die sich über einer Geraden AB nach derselben zeichnen lassen, ist ein bestimmter Kreisbogen. Ein ebensolcher ist der Ort für die Scheitel aller gleichen Winkel, die sich unterhalb der Geraden zeichnen lassen.

235) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem ihr gegenüberliegenden Winkel und der zu ihr gehörigen Höhe.

Auflösung. Ist AB die gegebene Seite und α der gegebene ihr gegenüberliegende Winkel, so konstruiere man den über AB stehenden Kreisbogen, der α als Peripheriewinkel faßt. Ist h die gegebene Höhe, so ziehe man zu AB im Abstande h auf der Seite des Bogens eine Parallele. Ist C ein Schnittpunkt der Parallelen und des Bogens, so ziehe man CA und CB. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

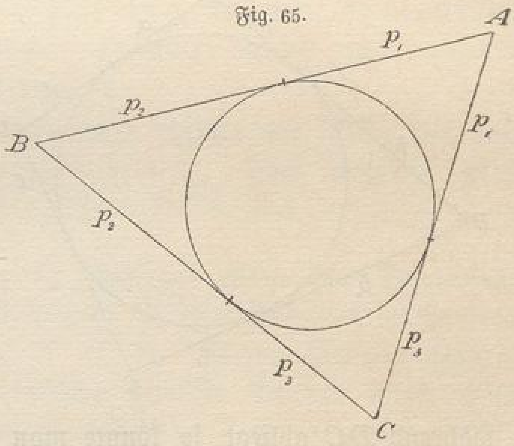
Ist die Höhe h zu groß (größer als die sog. Pfeilhöhe des Bogens), so gibt es keinen Schnittpunkt, und das Dreieck ist unmöglich. Ist h kleiner, als die Pfeilhöhe, so sind zwei Dreiecke möglich, die kongruent sind. Ist h gleich der Pfeilhöhe, so wird die Parallele Tangente, und es ist nur ein einziges Dreieck möglich, welches recht-winklig-gleichschenklig ist.

Bemerkung. Der Kreisbogen ist zugleich der dem Dreiecke umbeschriebene Kreis. Sind also a und α gegeben, so ist der Radius des umbeschriebenen Kreises schon bestimmt. Man kann also nicht zugleich a, α und r geben, denn r ist nicht mehr unabhängig, sobald a und α gegeben sind. Es ist gleichgültig, ob ein Dreieck aus a, α und einem dritten Stück konstruiert werden soll, oder aus a, r und dem betreffenden Stück, oder aus α und r und dem betreffenden Stück. Nur können bei a und r zwei Lösungen eintreten.

γ) Tangentendreiecke und Tangentenvierecke.

236) **Aufgabe.** Ein Dreieck habe die Seiten a, b und c. Wie groß sind die Abschnitte p_1, p_2, p_3, die durch die Berührungspunkte des In-Kreises entstehen?

Fig. 65.



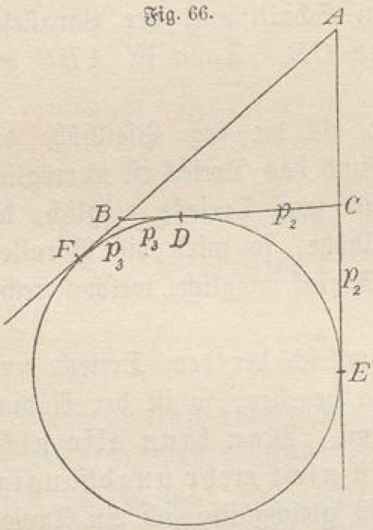
Auflösung. In Fig. 65 ist $2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = a + b + c$, zugleich ist $2p_2 + 2p_3 = 2a$, folglich durch Subtraktion: $2p_1 = a + b + c - 2a = b + c - a$, folglich $p_1 = \frac{-a+b+c}{2}$, ebenso $p_2 = \frac{a-b+c}{2}$ und $p_3 = \frac{a+b-c}{2}$.

Setzt man noch $\frac{a+b+c}{2} = p$, so ist $p_1 = p - a$, $p_2 = p - b$, $p_3 = p - c$.

237) Dieselbe Aufgabe für den An-Kreis mit Radius ϱ_1 zu lösen.

Auflösung. In Fig. 66 ist $AF = AB + BF = AB + BD$ und $AE = AC + CD$, folglich $AF + AE = AB + AC + BC = a + b + c$, also $AF = AE = \frac{a+b+c}{2} = p$. Jetzt ist $CE = AE - AC = p - b = p_2$ und ebenso $BF = AF - AB = p - c = p_3$.

Fig. 66.

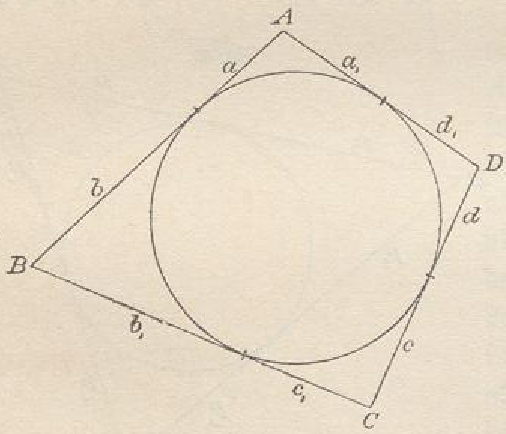


Folglich: Der An-Kreis teilt die unmittelbar berührte Dreiecksseite in dieselben Stücke, wie der In-Kreis, nur sind beide Stücke in der Lage vertauscht. Diese Beziehungen sind eine Quelle wichtiger Sätze.

238) **Satz.** Die Summe zweier Gegenseiten eines (gewöhnlichen) Tangentenvierecks ist gleich der Summe der beiden anderen Gegenseiten.

In Fig. 67 sind folgende Tangenten gleich: $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, $d = d_1$, folglich ist $a + b + c + d = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$, d. h. $AB + CD = BC + DA$.

Fig. 67.



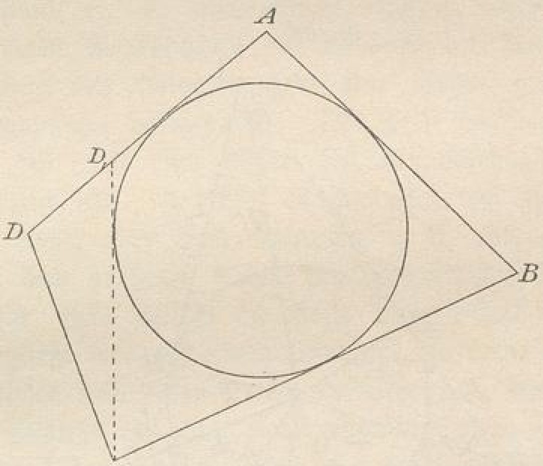
Umkehrung. Ist bei einem Viereck die Summe des einen Gegenseitenpaares gleich der des andern, so ist es ein Tangentenviereck.

Beweis. Angenommen, $ABCD$ in Fig. 68 hätte in dem angegebenen Sinne gleiche Seitensummen und würde von dem gezeichneten Kreise nur an drei Seiten berührt, während DC abliegt, so könnte man die vierte Tangente CD_1 ziehen. Dann würde sein $AB + CD_1 = AD_1 + BC$, und nach der Voraussetzung $AB + CD = (AD_1 + D_1D) + BC$, folglich durch Subtraktion $CD - CD_1 = D_1D$ oder $CD = CD_1 + D_1D$, d. h. die Summe zweier

Dreiecksseiten würde gleich der dritten sein. Dieser Widerspruch kann nur dadurch aufgehoben werden, daß D auf D_1 fällt. — Entsprechend wird der Beweis geführt, wenn man annimmt, CD schnitte den Kreis.

Bemerkungen. Man denke sich ein Tangentenviereck als Gelenkviereck, dann kann es beliebig viele verschiedene Gestalten annehmen. Solange es konvex bleibt, läßt sich ihm stets ein Kreis einbeschreiben. In zwei Sonderfällen geht es in ein Dreieck über. Dies geschieht, wenn zwei aneinanderstoßende Seiten einen Winkel von 180° bilden. — Jedes rechtwinklige Dreieck ist die Hälfte eines Tangenten-Sehnenvierecks. (Unter Tangenten-Sehnenviereck versteht man ein Viereck, welches sowohl einen umbeschriebenen, als auch einen einbeschriebenen Kreis hat. Man nennt solche Vierecke auch bizentrische Vierecke, womit auf die beiden Kreiszentra hingedeutet werden soll.)

Fig. 68.



239) **Aufgabe.** Folgender Satz soll bewiesen werden:

Verbindet man die Ecken eines Tangentenvierecks mit dem Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises, so entstehen vier Zentriwinkel, von denen je zwei nicht aneinanderliegende zusammen 180° betragen.

Bemerkung. Bezeichnet man diese Winkel der Reihe nach mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4, so ist $\xi_1 + \xi_3 = \xi_2 + \xi_4$. Dies entspricht ganz dem Satze für die Seiten $AB + CD = BC + DA$.

240) **Aufgabe.** In Fig. 69 sind die Ecken des Tangentenvierecks $ABCD$ mit dem Mittelpunkte M des Inkreises verbunden, ebenso die Berührungspunkte E, F, G, H. Es soll bewiesen werden, daß die folgenden Inhaltsunterschiede gewisser Dreiecke gleich groß sind: $\triangle AME - \triangle CMF = \triangle AMH - \triangle CMG = \triangle AMB - \triangle CMB$; ferner $\triangle BMF - \triangle DMG = \triangle BME - \triangle DMH = \triangle BMC - \triangle DMC$. Ferner sind folgende Inhaltssummen gleich: $\triangle AMB + \triangle CMD = \triangle BMC + \triangle DMA = \frac{1}{2} ABCD$.

Bemerkung. Nur Dreieckskongruenzen sollen zum Beweise benutzt werden. Die Sätze können später mit Hilfe der Inhaltssätze andere Beweise erhalten. (Sie werden später Anwendung finden.) Wie lauten diese Sätze für den Sonderfall des Tangentendreiecks?

Fig. 69.

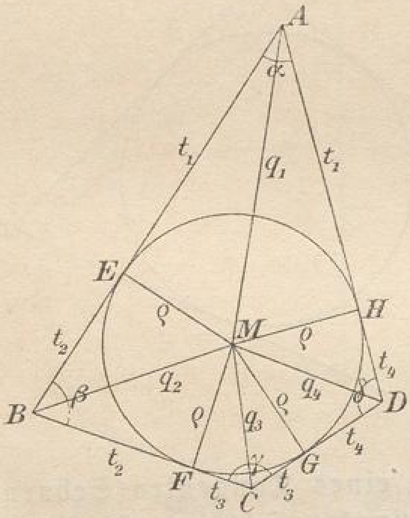
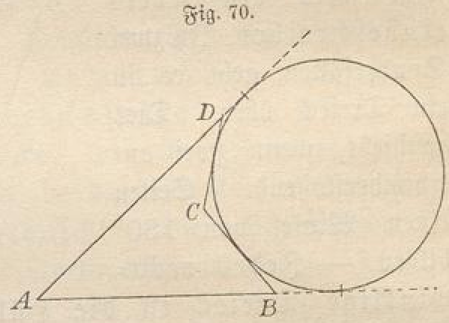


Fig. 70.



241) **Aufgabe.** Es soll versucht werden, die für das einem Kreise umbeschriebene Tangentenviereck geltenden Sätze auch für das einem Kreise anbeschriebene Tangentenviereck auszusprechen.

Bemerkung. Es gibt drei Arten anbeschriebener Tangentenvierecke, solche sind durch die Fig. 70, 71 und 72 dargestellt, das

Fig. 71.

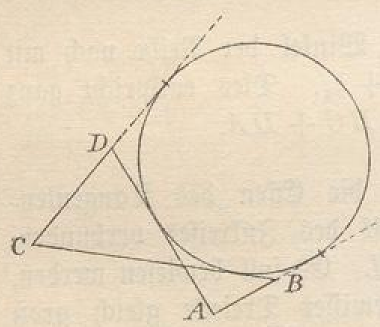
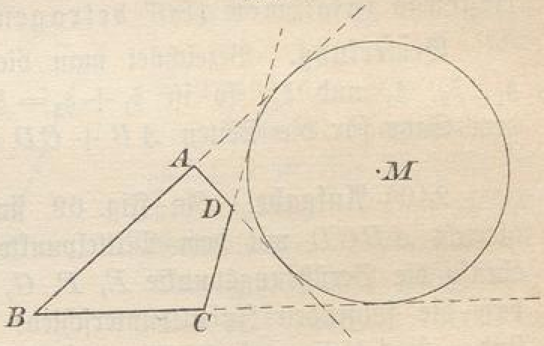


Fig. 72.



„Tangentenviereck mit einspringendem Winkel", das „überschlagene Tangentenviereck" und das nirgends unmittelbar berührende. Aufeinanderfolgende Seiten treten an die Stelle von gegenüberliegenden.

δ) Einfache Betrachtungen über mehrere Kreise.

242) **Eigenschaften konzentrischer Kreise.** Zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und r_1, wobei $r > r_1$ sein möge, haben überall denselben Abstand $r - r_1$ voneinander. Jeder Punkt des einen hat vom zugehörigen Gegenpunkte des anderen den Abstand $r + r_1$. Jede Tangente des kleineren gibt eine Sehne des größeren, die im Berührungspunkte halbiert ist. Alle diese Sehnen sind von derselben Länge. Ist AB eine dieser Berührungssehnen, BC eine zweite, CD eine dritte usw., so kann es kommen, daß die Reihe dieser Geraden nach einem oder nach mehreren, z. B. nach n Umgängen schließt. Wo auf dem größeren Kreise der Ausgangspunkt der Reihe auch gewählt werde, stets schließt die Reihe nach derselben Anzahl von Umgängen. Schließt sie nach einem Umgange, so entsteht ein regelmäßiges Vieleck, welches dem einen Kreise umbeschrieben, dem anderen einbeschrieben ist. Schließt sie nach mehreren Umgängen, so entsteht ein regelmäßiger Vielecksstern, dessen Ecken auf dem größeren Kreise liegen und den Ecken eines regelmäßigen Vielecks entsprechen, während die Seiten den kleineren Kreis berühren und ein diesem umbeschriebenes Vieleck bilden.

Fig. 73.

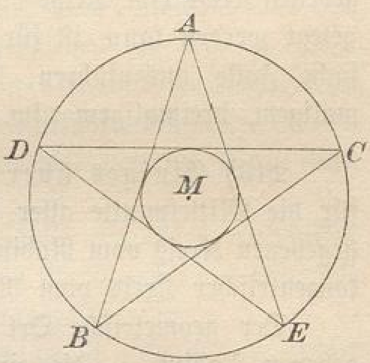


Fig. 73 stellt den regelmäßigen Fünfeckstern dar, der nach zwei Umgängen schließt. Man hat, wenn die Ecken A, D, B, E, C des regelmäßigen Fünfecks vorliegen, nur jedesmal eine Ecke zu überschlagen, um den Stern zu zeichnen und den zugehörigen konzentrischen Kreis zu erhalten. Man berechne die Winkel dieses Gebildes in Graden. Macht man dasselbe bei einem n-Eck von gerader Seitenzahl, so erhält man keinen eigentlichen Stern, sondern zwei übereinandergelegte regelmäßige Vielecke von halber Seitenzahl. Macht man dasselbe bei einem n-Eck von ungerader Seitenzahl, so entsteht ein Stern, der nach zwei Umgängen schließt.

Man führe dies aus für den Fall $n = 7$, wobei das Siebeneck nur versuchsweise zu zeichnen ist. Überschlägt man in diesem Falle jedesmal zwei Punkte, so entsteht der Stern des regelmäßigen Siebenecks, der erst nach drei Umgängen schließt. Man versuche dasselbe für $n = 8$ usw.

(Schließt bei zwei gegebenen konzentrischen Kreisen die Reihe der Berührungssehnen nie, so erhält der Stern unendlich viele Ecken.)

Für jeden regelmäßigen Stern solcher Art lassen sich die Winkel leicht berechnen.

In die Ringfläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen läßt sich zunächst ein beide berührender Kreis einlegen, dessen Radius gleich $\frac{r - r_1}{2}$ ist. Es läßt sich eine ganze Reihe solcher aufeinander folgender Berührungskreise einzeichnen, von denen jeder auch seine beiden Nachbarn berührt. Diese Reihe von Berührungskreisen kann nach einem Umgange schließen. Dann bilden die auf dem größeren Kreise liegenden Berührungspunkte ein regelmäßiges n-Eck, ebenso die auf dem kleineren Kreise liegenden. Die Mittelpunkte der Kreisreihe bilden ein regelmäßiges n-Eck auf dem Kreise mit dem Radius $\frac{r + r_1}{2}$. Die Berührungspunkte je zweier der Reihen Kreise bilden ein regelmäßiges n-Eck auf dem Kreise, dessen Radius gleich der Tangente ist, die vom Zentrum der konzentrischen Kreise aus an einen der Reihenkreise gelegt ist. Wie um einen gegebenen Kreis eine Reihe von Berührungskreisen für einfaches Schließen gelegt werden kann, ist für gewisse Fälle in § 186 gezeigt. Man versuche Fälle auszuführen, bei denen die Kreisreihe erst nach zweimaligem, dreimaligem usw. Umgange schließt.

243) Einiges über Kreisberührung. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius ϱ, die einen gegebenen Kreis vom Radius r äußerlich berühren, ist ein zum letzteren konzentrischer Kreis vom Radius $r + \varrho$.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenen Radius ϱ, die einen gegebenen Kreis vom Radius r innerlich berühren, ist ein zum letzteren konzentrischer Kreis vom Radius $(r - \varrho)$ bezw. $(\varrho - r)$, je nachdem r oder ϱ der größere Radius ist.

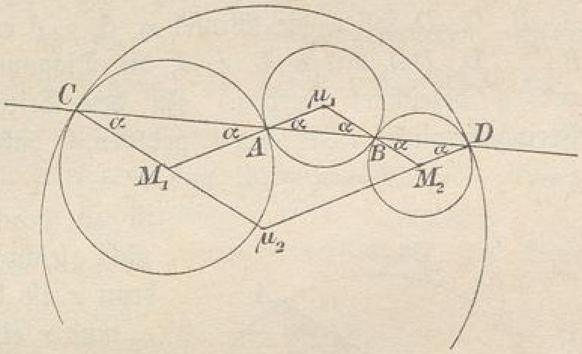
An Stelle des gegebenen Kreises kann eine gerade Linie treten.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte innerlich oder äußerlich berühren, ist der zu dem Punkte gehörige Durchmesser bezw. seine Verlängerung.

Auch hier kann an Stelle des gegebenen Kreises eine gerade Linie treten.

Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, so können die Berührungen gleichartige sein, d. h. beide äußerliche oder beide innerliche; sie können aber auch ungleichartige sein, d. h. die eine eine äußerliche, die andere eine innerliche. Die Berührungssekante gibt dabei zu paarweise parallelen Radien Anlaß. Für den Fall zweier gleichartiger Berührungen der Kreise M_1 und M_2 durch Kreise μ_1 und μ_2 ist dies in Fig. 74 dargestellt. Dabei zeigt sich, daß die Berührungssekante für die äußerlichen Berührungen in A und B zugleich Berührungssekante für die innerlichen Berührungen in C und D ist. Die Ausführung der entsprechenden Figur für ungleichartige Berührungen sei dem Schüler überlassen. (Über diesen Gegenstand ist später ausführlicher zu sprechen.)

Fig. 74.



244) Gegenseitiges Schneiden zweier Kreise. Schneiden einander zwei Kreise, so versteht man unter dem Schnittwinkel den Winkel, unter dem sich die in den Schnittpunkten an beide gelegten Tangenten schneiden. Man braucht nur von einem Schnittwinkel zu reden, da die beiden Schnitte aus Symmetriegründen denselben Winkel geben. Gewöhnlich soll der spitze Schnittwinkel gemeint sein, nicht sein Nebenwinkel.

Wichtig ist der Sonderfall, daß die Kreise einander rechtwinklig schneiden. Dann ist die Tangente des einen ein Durchmesser des anderen. Man nennt dann die beiden Kreise Orthogonalkreise.

Zieht man in Fig. 74 die Tangenten in A und B, so erhält man den Mittelpunkt eines Kreises, der die Kreise M_1 und M_2 in A und B (und außerdem in zwei anderen Punkten) rechtwinklig schneidet. Ebenso wird der Kreis μ_1 rechtwinklig geschnitten.

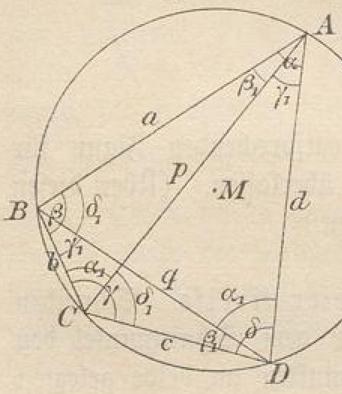
Zieht man die Tangenten in C und D, so erhält man den Mittelpunkt eines Kreises, der die Kreise M_1 und M_2 in C und D (und außerdem in zwei anderen Punkten) rechtwinklig schneidet. Auch Kreis μ_2 wird rechtwinklig geschnitten. —

Die Aufgaben über Kreisberührungen und orthogonales Schneiden hängen also eng miteinander zusammen. (Später wird alles unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte behandelt.)

ε) Konstruktionsübungen zur Kreislehre.

245) **Konstruktion von Sehnenvierecken.** Bezeichnungen: Der Radius des Um-Kreises sei r. Den aufeinander folgenden Ecken A, B, C, D sollen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entsprechen, die Seiten AB, BC, CD, DA mit a, b, c, d, die Diagonalen AC und BD mit p und q bezeichnet werden. Zu den Seiten a, b, c, d sollen die Peripheriewinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ gehören, so daß $\alpha = \beta_1 + \gamma_1$, $\beta = \gamma_1 + \delta_1$, $\gamma = \delta_1 + \alpha_1$, $\delta = \alpha_1 + \beta_1$ und $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 180^0$ ist. Dabei ist zu beachten, daß r, a und α_1 nicht gleichzeitig gegeben werden dürfen, denn r ist durch a und α_1, a durch α_1 und r eindeutig bestimmt, α_1 durch r und a zweideutig, da es sowohl spitz, als auch stumpf (nämlich der Supplementwinkel) sein darf. Im übrigen ist es gleichgültig, ob r und a, a und α_1, α_1 und r gegeben ist. Ebenso dürfen r, p und β, r, q und α nicht gleichzeitig gegeben sein. Aus a, b, p und a, b, β ist r bereits bestimmt, aus b, c, q und b, c, γ ebenfalls usw. Die verschiedenen Aufgabengruppen lassen also gewisse Vertauschungen gegebener Stücke zu, ohne daß neues entsteht. Man achte auf solche Wiederholungen in der folgenden Zusammenstellung von Aufgaben.

Fig. 75.



Man versuche, die angegebene Bezeichnungsart auch für überschlagene Sehnenvierecke durchzuführen und bei den Konstruktionen dieser zu berücksichtigen. —

245a) **Aufgaben.** Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus

1) r, a, b, c	2) r, a, α, β	3) r, a, p, q
4) r, a, b, q	5) r, α_1, b, c	6) $r, \alpha_1, \alpha, \beta$
7) r, α_1, p, q	8) r, α_1, b, q	9) a, α_1, b, c
10) $a, \alpha_1, \alpha, \beta$	11) a, α_1, p, q	12) a, α_1, b, q
13) p, a, b, c	14) β, a, b, c.	

Der Schüler versuche noch andere Aufgaben aufzustellen. So können z. B. die Entfernungen e_1, e_2, e_3, e_4 der Seiten a, b, c, d vom Kreiszentrum herangezogen werden. Schwierigere Aufgaben werden später folgen.

246) **Konstruktion von Tangentenvierecken.** Bezeichnungen: Der Radius des In-Kreises sei ϱ. Den aufeinander folgenden

Ecken A, B, C, D entsprechen die Winkel α, β, γ, δ. Die Seiten AB, BC, CD, DA sollen a, b, c, d heißen. Die Entfernungen der Ecken vom Kreiszentrum μ seien q_1, q_2, q_3, q_4, die Diagonalen AC und BD seien p_1 und p_2. Die von A, B, C, D ausgehenden Tangententeile mögen mit t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnet werden, sodaß $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = a + c = b + d = \frac{u}{2}$ ist, wenn u den Umfang bedeutet. E, F, G, H seien die Berührungspunkte. Man stelle die Bezeichnungen auch für anbeschriebene Tangentenvierecke der drei Arten fest und versuche diese bei den Konstruktionen zu berücksichtigen.

246 a) **Konstruktionen.** Ein Tangentenviereck zu konstruieren aus

1) ϱ, α, β, b.	2) ϱ, α, β, γ.	3) ϱ, a, b, β.
4) ϱ, q_1, q_2, b.	5) ϱ, q_1, q_2, q_3.	6) a, α, β, b.
7) a, α, β, q_3.	8) a, α, β, γ.	9) a, b, c, α.

10) Ein Trapez zu konstruieren, welches einem Kreise mit Radius ϱ umbeschrieben ist und von dem die eine Grundlinie a gegeben ist. Seine Eigenschaften sollen untersucht werden.

Der Schüler versuche noch andere Aufgaben aufzustellen. Schwierigere kommen später zur Sprache.

247) **Einige Berührungsaufgaben.** 1) Gegeben seien zwei Kreise. Ein dritter Kreis von gegebenem Radius soll so gelegt werden, daß er beide äußerlich berührt.

2) Dieselbe Aufgabe, jedoch sollen beide Kreise innerlich berührt werden.

3) Dieselbe Aufgabe, jedoch soll der erste Kreis äußerlich, der zweite innerlich berührt werden. (Oder der erste innerlich, der zweite äußerlich.)

Bemerkung. In den drei Aufgaben kann der eine Kreis auch eine Gerade oder ein Punkt sein.

4) Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und außerdem eine gegebene Gerade berührt. (Zwei Fälle zu beachten, innerliche und äußerliche Berührung. Die Tangenten und die Gerade sollen berührt werden.)

5) Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise gleichartig berührt, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte. (Sind in Fig. 74 M_1 und M_2 die gegebenen Kreise und ist A der gegebene Berührungspunkt, so ziehe man M_1A und parallel gleichgerichtet dazu M_2D. Die Gerade AD schneidet dann den Kreis M_2 im gesuchten Berührungspunkte B. M_1A und M_1B geben verlängert den Schnittpunkt μ_1 als Mittelpunkt des gesuchten Kreises. — Ist C der gegebene Berührungspunkt, so konstruiere man entsprechend B, worauf CB den

zweiten Berührungspunkt D gibt, M_1C und M_2D aber verlängert μ_2 geben.

6) Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise ungleichartig berührt, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte A. (Man ziehe M_2D parallel und entgegengesetzt zu M_1A und ziehe AD, was den zweiten Berührungspunkt B gibt.)

247a) Einige Aufgaben über orthogonales Schneiden.

1) Gegeben seien zwei Kreise. Ein dritter Kreis von gegebenem Radius soll so gelegt werden, daß er beide rechtwinklig schneidet. (Der geometrische Ort seines Mittelpunktes ist in bezug auf jeden der gegebenen Kreise ein konzentrischer Kreis, von dem man einen Punkt findet, wenn man vom ersteren eine Tangente ausgehen läßt, die gleich dem gegebenen Radius ist. Wo beide Orte einander schneiden, liegt der Mittelpunkt. Der eine Kreis kann auch Gerade oder Punkt sein.)

2) Gegeben seien zwei Kreise. Ein Orthogonalkreis zu beiden soll konstruiert werden, der den einen in einem gegebenen Punkte schneidet. (Man beachte das über Berührungen Gesagte. Der andere Kreis kann auch Gerade oder Punkt sein.)

3) Man versuche diese Aufgaben für das Schneiden unter 45^0 oder unter beliebigem Winkel auszudehnen.

d) **Flächengleichheit geradliniger Gebilde.**

248) Kongruente Flächen sind inhaltsgleich. Dies ist derin begründet, daß sie sich zur Deckung bringen lassen.

Durch Zusammensetzen (Aneinanderlegen) von Flächen erhält man eine Fläche, deren Inhalt durch die Summe der Einzelflächen gegeben ist. Die Reihenfolge ist dabei gleichgültig. Das Zusammenlegen kann aber in verschiedener Weise erfolgen, sodaß die Schlußgebilde ein ganz verschiedenes Aussehen haben, also nicht kongruent sind. Trotzdem ist der Gesamtinhalt in allen Fällen derselbe. [$F = F_1 + F_2 + F_3 = F_1 + F_3 + F_2 = \cdots$] Die Flächengleichheit soll zum Unterschiede von der Kongruenz durch ein einfaches Gleichheitszeichen ausgedrückt werden.

Von einer Fläche kann eine andere abgezogen werden. Der Rest wird dann als der Unterschied (die Differenz) der Flächen bezeichnet. Man kann die zweite Fläche auf verschiedene Weise von der ersten abziehen (z. B. von ihr abschneiden), sodaß die Schlußgebilde ein ganz verschiedenes Aussehen haben können. Trotzdem hat der übrigbleibende Flächenteil stets denselben Inhalt. [$F = F_1 - F_2$, wobei $F_1 > F_2$ vorausgesetzt werde.] Von einer

Fläche können mehrere andere abgezogen werden. Die Reihenfolge des Abziehens und das Aussehen des Schlußgebildes sind dabei gleichgültig.

Diese Sätze ermöglichen es, die Flächengleichheit verschiedener Gebilde festzustellen. Dazu sollen einige Beispiele gegeben werden.

249) Satz: Jedes Parallelogramm ist flächengleich mit einem Rechteck von derselben Grundlinie und derselben Höhe.*)

Beweis. Die Grundlinie des Parallelogramms sei AB; über ihr zeichne man das Rechteck von derselben Höhe. Dann entsteht entweder

Fig. 76.

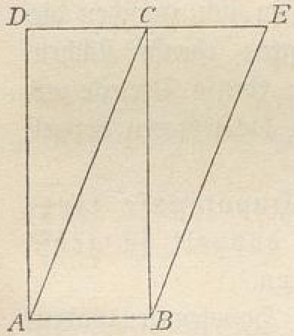


Fig. 77.

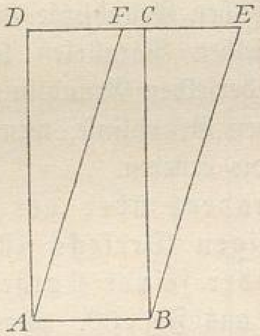
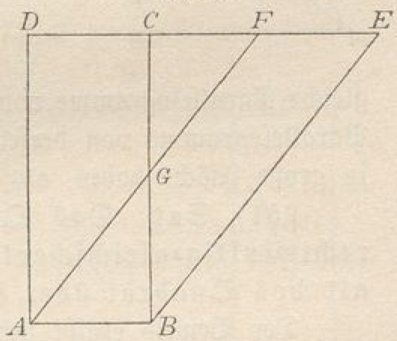


Fig. 78.



eine Figur nach Art von Fig. 76, wo zwei Eckpunkte beider Vierecke in C zusammenfallen, oder eine Figur nach Art von 77, wo F zwischen D und C liegt, oder eine Figur nach Art von 78, wo FE außerhalb DC liegt.

In Fig. 76 ist ▱ $ABEC = \triangle ABC + \triangle BCE$, oder, da $\triangle BCE \cong \triangle ADC$ ist, ▱ $ABEC = \triangle ABC + \triangle ADC$ $=$ ▯ $ABCD$, womit der Satz für diesen Fall bewiesen ist.

(An das Dreieck ABC ist das Dreieck BCE auf zwei verschiedene Arten angelegt worden, einmal als BCE, dann als ADC. Die Flächensumme muß beidemal dieselbe sein.)

In Fig. 77 ist ebenso ▱ $ABEF = ABCF + \triangle BCE$ $= ABCF + \triangle ADF =$ ▯ $ABCD$.

In Fig. 78 ist ▱ $ABEF = \triangle ABG + \triangle BCE - \triangle GCF$ $= \triangle ABG + \triangle ADF - \triangle GCF =$ ▯ $ABCD$.

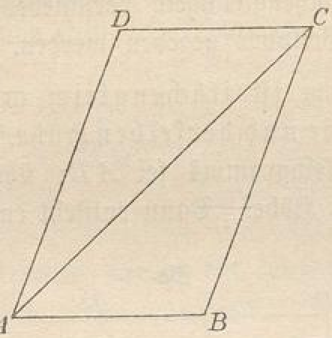
250) Folgerungen: a) Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich. (Warum?)

---

*) Das Zeichen ▯ oder ▭ soll stets ein Rechteck, ▱ ein Parallelogramm bedeuten, ◇ einen Rhombus, □ ein Quadrat.

Da, wie Fig. 79 zeigt, jedes Dreieck als Hälfte eines bestimmten Parallelogramms von derselben Grundlinie und derselben Höhe betrachtet werden kann, so folgt ferner:

Fig. 79.



b) Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

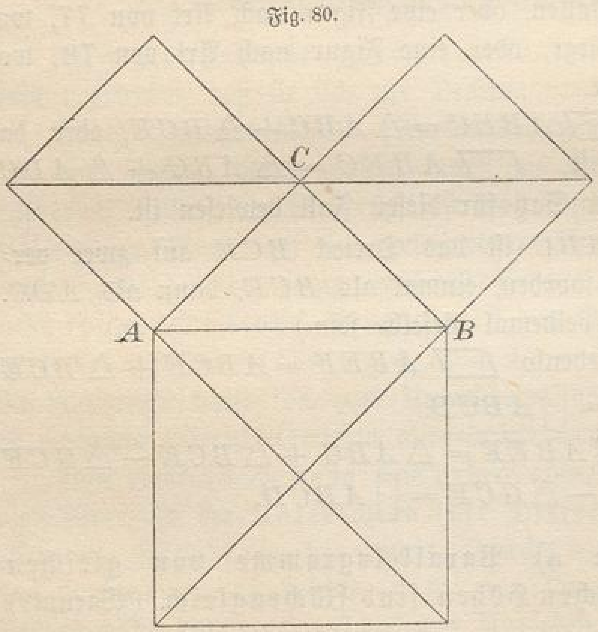
c) Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Rechtecks oder Parallelogramms von derselben Grundlinie und derselben Höhe.

d) Flächengleiche Dreiecke über derselben Grundlinie lassen sich zwischen dieselben Parallelen legen; ebenso flächengleiche Parallelogramme von derselben Grundlinie; ebenso Dreiecke und Parallelogramme von derselben Grundlinie, wenn die letzteren doppelt so große Fläche haben, als die ersteren.

251) Satz: Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß, als das Quadrat über jeder seiner Katheten.

Der Beweis ergibt sich aus Fig. 80. Das Hypotenusenquadrat besteht aus vier gleichen Dreiecken, jedes Kathetenquadrat aus zwei Dreiecken derselben Art. (Vorkursus § 70.)

Fig. 80.



Daraus ergibt sich die Lösung folgender Aufgaben:

a) Ein Quadrat zu konstruieren, welches den doppelten Flächeninhalt hat, wie ein gegebenes Quadrat.

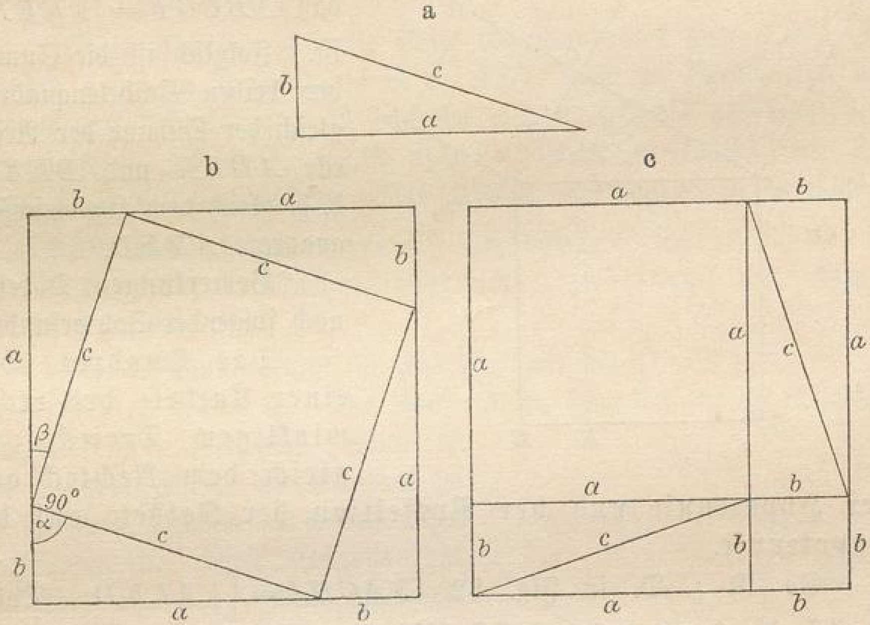
b) Ein Quadrat zu konstruieren, welches den halben Flächeninhalt hat, wie ein gegebenes Quadrat.

252) **Satz des Pythagoras.** In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

Erster Beweis. Der schon im Vorkursus § 71 gegebene Beweis ergibt sich aus Fig. 81 a, b, c.

Ist Fig. 81a das gegebene rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c, so zeichne man zwei Quadrate von der Seite $(a + b)$. In das eine lege man viermal das gegebene Dreieck so ein, wie es Fig. 81b zeigt, in das andere viermal so, wie es Fig. 81c zeigt. Der unbedeckte Rest der Fig. 81b muß

Fig. 81.



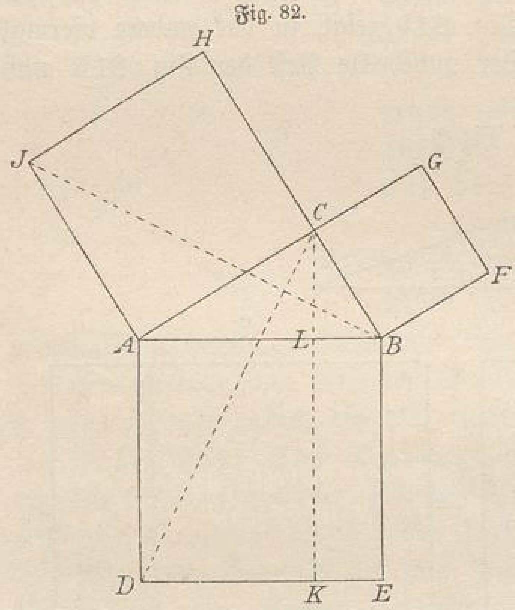
dann ebenso groß sein, wie der Rest in Fig. 81c. Das erstemal ist der Rest ein gleichseitiges Viereck mit der Seite c, dessen Winkel sich, da $\alpha + \beta = 90^0$ ist, als rechte ergeben, sodaß es sich um das Hypotenusenquadrat handelt. Das zweitemal ist der Rest die Summe der beiden Kathetenquadrate. Da die Reste gleich groß sind, so ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Man pflegt den Satz durch folgende Formel auszudrücken: $c^2 = a^2 + b^2$ (d. h. das Quadrat über c ist gleich der Summe der Quadrate über a und b. Dabei bedeutet c^2 das Produkt $c \cdot c$ usw.)

Zweiter Beweis (der des Euklid).

In Fig. 82 sind die Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC errichtet, dessen Winkel CAB mit α bezeichnet werde. Außerdem sind die Hilfslinien BJ und CD und CLK, letztere senkrecht zu AB gezogen. Dabei ist $\triangle JAB = \frac{1}{2} \square ACHJ$, denn beide stehen über derselben Grundlinie AJ und liegen zwischen den Parallelen AJ und BH. Ebenso ist $\triangle ACD = \frac{1}{2}$ ▭ $ADKL$, denn beide stehen über der Grundlinie AD und liegen zwischen den Parallelen AD und CK. Nun ist aber $\triangle JAB \cong \triangle CAD$, denn $JA = CA$, $AB = AD$, $\sphericalangle JAB = 90^0 + \alpha = \sphericalangle CAD$. Weil die Dreiecke inhaltsgleich sind, ist nach obigem auch $\square ACHJ =$ ▯ $ADKL$. Ebenso wird auf der anderen Seite gezeigt, daß $\square BCGF =$ ▯ $KEBL$ ist. Folglich ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich der Summe der Rechtecke $ADKL$ und $BEKL$, d. h. gleich dem Hypotenusenquadrate $ABED$.

Fig. 82.



Bemerkungen. Dabei ist noch folgender Satz gefunden:

Das Quadrat über einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse.

So ist z. B. in Fig. 82 $\square ACHJ =$ ▯ $ALKD$. Dabei ist AL die durch das Lot CL bestimmte „Projektion" von AC auf die Hypotenuse AB, und AD ist gleich der Hypotenuse AB.

Der kürzeste Beweis des Pythagoreischen Satzes wird in der Ähnlichkeitslehre gegeben.

253) Aus dem Pythagoreischen Lehrsatze ergibt sich die Auflösung folgender Aufgaben:

Aufgabe a) Gegeben seien zwei Quadrate; es soll ein Quadrat konstruiert werden, welches gleich der Summe der beiden gegebenen ist.

Aufgabe b) Gegeben seien drei Quadrate; es soll ein Quadrat konstruiert werden, welches gleich der Summe sämtlicher ist. (Kann auf n Quadrate ausgedehnt werden. Reihenfolge der Addition gleichgültig.)

Aufgabe c) Gegeben seien zwei Quadrate; es soll ein Quadrat konstruiert werden, welches gleich der Differenz der gegebenen ist.

Aufgabe d) Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. $ALKD$ in Fig. 82 sei das gegebene Rechteck. Man verlängere die kleine Seite AL so weit, daß $AB = AD$ wird. Über AB als Durchmesser zeichne man einen Halbkreis und verlängere KL bis zum Schnittpunkte C mit dem Halbkreise. Die Verbindungslinie CA ist dann die Seite des gesuchten Quadrates. (Der Beweis liegt im Satze vom Winkel im Halbkreise und dem des Pythagoras.)

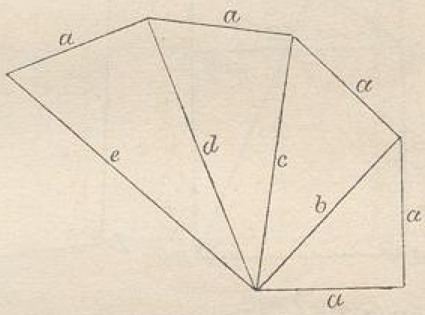
Aufgabe e) Ein Quadrat in ein Rechteck von gegebener Seite zu verwandeln.

(Ist in Fig. 82 AC die Seite des Quadrates und $AB > AC$ die des gesuchten Rechtecks, so ist $\triangle ABC$ leicht zu konstruieren und daraus AL abzuleiten. Ist dagegen $AL < AC$ die gegebene Seite des gesuchten Rechtecks, so ist $\triangle ALC$ leicht zu konstruieren und dann $\triangle ABC$ herzustellen. Das Übrige ist bequem zu erledigen.)

Aufgabe f) Gegeben sei ein Quadrat; es sollen Quadrate von doppelter, dreifacher, vierfacher, fünffacher usw. Fläche konstruiert werden.

(Die Auflösung ergibt sich aus Fig. 83, wo $b^2 = 2a^2$, $c^2 = 3a^2$, $d^2 = 4a^2$, $e^2 = 5a^2$ ist. Die Konstruktion läßt sich bis zu beliebiger ganzer Zahl n fortsetzen. Damit ist die Aufgabe gelöst, ein Quadrat zu konstruieren, welches das n-fache eines gegebenen ist. Diese Aufgabe läßt sich aber abkürzen, indem man mit der nächst kleineren Quadratzahl beginnt. Soll z. B. das gesuchte Quadrat das Zehnfache des gegebenen sein, so beginne man mit der dreifachen Seite, was das neunfache Quadrat gibt und fahre nach Pythagoras fort.)

Fig. 83.



Bemerkungen. In Fig. 83 ist $d^2 = \frac{4}{5}e^2$, $c^2 = \frac{3}{5}e^2$, $b^2 = \frac{2}{5}e^2$, $a^2 = \frac{1}{5}e^2$. Man kann also die Figur benutzen, ein Quadrat zu konstruieren, welches $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ eines gegebenen ist. Man hat nur nötig, die gegebene Quadratseite von dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Strahlen aus auf e aufzulegen und von dem freien Endpunkte aus auf den Strahl d ein Lot zu fällen, dann von dessen Fußpunkte aus ein Lot auf den Strahl c, von dessen Fußpunkte aus ein Lot auf b und von dessen Fußpunkte aus auf a. Die gefundenen Abschnitte der Strahlen geben die Seiten der gesuchten Quadrate. Entsprechend würde bei sieben Strahlen die Aufgabe für

$\frac{6}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$ zu lösen sein. Später werden weit kürzere Konstruktionen gelehrt werden. Aber schon hier lassen sich Abkürzungen ausfindig machen. —

Fig. 83 läßt sich auch durch die einfacher herzustellende Fig. 83a ersetzen, in der die Kreisbogen abwechselnd um A und B geschlagen werden und $ABCD_1$ ein Quadrat mit Seite a ist. Der Schüler zeige, daß $BD_1 = a\sqrt{2}$, $AD_2 = a\sqrt{3}$, $BD_3 = a\sqrt{4}$, $AD_4 = a\sqrt{5}$, $BD_5 = a\sqrt{6}$ usw. ist.

254) **Aufgabe.** Ein gegebenes Dreieck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man betrachte eine Seite des Dreiecks als Grundlinie und bilde die zugehörige Dreieckshöhe. Das leicht zu zeichnende

Fig. 83 a.

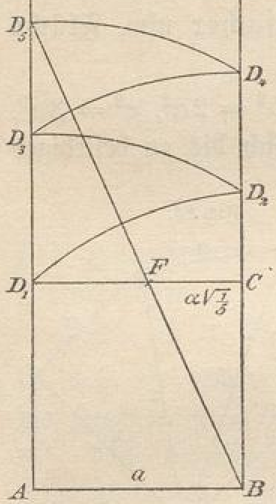
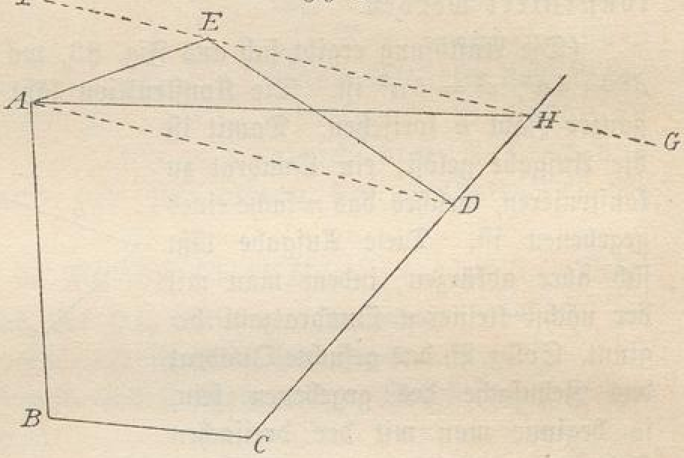


Fig. 84.



Rechteck aus der Höhe und der halben Grundlinie ist dann flächengleich mit dem Dreieck und nach Pythagoras in ein Quadrat zu verwandeln.

255) **Aufgabe.** Ein gegebenes n-Eck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Handelt es sich z. B. um ein gegebenes Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 84), so schneide man durch eine Diagonale, z. B. AD, ein Dreieck ADE ab. Durch E lege man eine Parallele FG zur Diagonale. Dann verlängere man z. B. die anstoßende Seite CD bis zur Parallelen und verbinde den Schnittpunkt H mit A. Dann wird behauptet, das Viereck $ABCH$ sei ebenso groß, wie das Fünfeck.

Der Beweis liegt darin, daß $\triangle ADH = \triangle ADE$ ist.

In entsprechender Weise ist das Viereck durch Abschneiden eines Dreiecks durch eine Diagonale in ein Dreieck zu verwandeln. Das Dreieck ist nach § 300 in ein Quadrat zu verwandeln. — Demnach läßt sich jedes n-Eck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.

Bemerkung. Der Schüler führe die Aufgaben dieser Art mit möglichster Ersparung von Linien aus. So ist es z. B. nicht nötig, das Rechteck vollständig zu zeichnen.

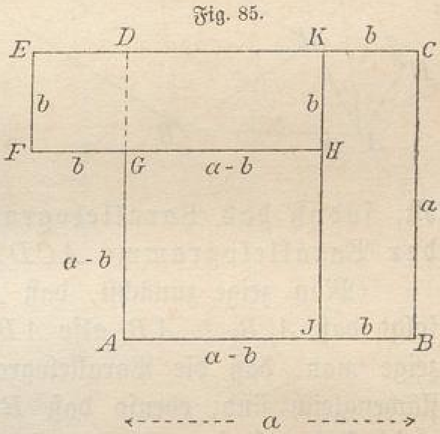
256a) In Fig. 81c ist das Quadrat über der Geraden $(a+b)$ so zerlegt werden, daß es aus dem Quadrate über a, dem Quadrate über b und zwei Rechtecken mit den Seiten a und b besteht. Daraus ergibt sich der Satz:

Das Quadrat über der Summe zweier Geraden ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Geraden, vermehrt um das doppelte Rechteck aus beiden Geraden.

Bemerkung. Setzt man im Anschluß an den Vorkursus (§ 63 und § 66) voraus, daß der Rechtecksinhalt gleich dem Produkte aus zwei aneinander stoßenden Seiten dieses Gebildes ist, so kann man den Satz durch folgende Formel ausdrücken:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.^{*)}$$

Fig. 85.



256b) In Fig. 85 ist eine Gerade $AB = a$ und eine Gerade $JB = b$ gegeben, sodaß $AJ = (a-b)$ ist. Über $(a-b)$ ist ein Quadrat $AJHG$ errichtet, ebenso ein Quadrat $ABCD$ über $AB = a$, und als $DEFG$ ist oben links das Quadrat über b angelegt. Dadurch ist erreicht, daß auch diese Figur das Rechteck aus a und b zweimal enthält, als $JBCK$ und als $EFHK$.

Die Fläche der Gesamtfigur ist gleich der Summe der Quadrate über a und über b. Zieht man davon die beiden genannten Rechtecke ab, so bleibt übrig das Quadrat $AJHG$ über $(a-b)$. Daraus folgt der Satz:

---

*) In der Arithmetik wird in der Tat gezeigt, daß $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ist. **Beispiel:** $(3+5)(3+5) = 9 + 15 + 15 + 25 = 64$. **Probe:** $8 \cdot 8 = 64$.

Das Quadrat über der Differenz zweier Geraden ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Geraden, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden Geraden.

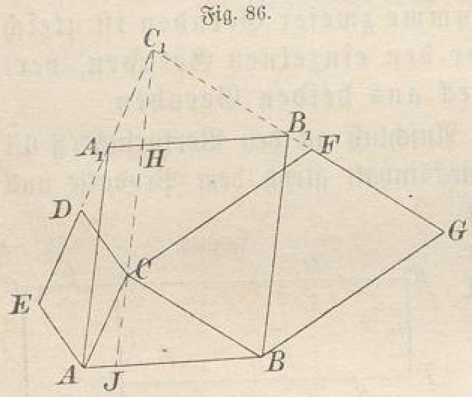
Bemerkung. Der Satz entspricht der Formel

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.^{*)}$$

257) **Aufgabe.** Die folgende, von Pappus gefundene Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes zu beweisen:

In Fig. 86 sind über den Seiten AC und BC eines beliebigen Dreiecks ganz beliebige Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ nach außen errichtet, deren Seiten ED und GF bis zum Durchschnitt C_1 verlängert, die Gerade C_1CJ gezogen, dann AA_1 und BB_1 parallel zu CC_1 bis zum Durchschnitt A_1 bezw. B_1 mit EC_1 und GC_1 gezogen, worauf noch A_1B_1 gezogen ist. Es soll gezeigt werden, daß auch ABB_1A_1 ein Parallelogramm ist, dessen Teil $AJHA_1 = ACDE$ ist, während $BJHB_1 = BCFG$ ist, sodaß das Parallelogramm ABB_1A_1 gleich der Summe der Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ ist.

Fig. 86.



(Man zeige zunächst, daß $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$ ist. Daraus folgt, daß $A_1B_1 \# AB$, also ABB_1A_1 ein Parallelogramm ist. Dann zeige man, daß die Parallelogramme $AJHA_1$, ACC_1A_1, $ACDE$ flächengleich sind, ebenso daß $BJHB_1$, BCC_1B_1, $BCFG$ flächengleich sind, usw.)

Bemerkung. Der Satz des Pappus enthält den des Pythagoras als einen besonderen Fall in sich. Macht man die Fig. 86 für das bei C rechtwinklige Dreieck und für Quadrate statt der Parallelogramme, so läßt sich der Satz des Pythagoras in neuer Art beweisen.

258) Zwei andere Verallgemeinerungen vom Satze des Pythagoras.

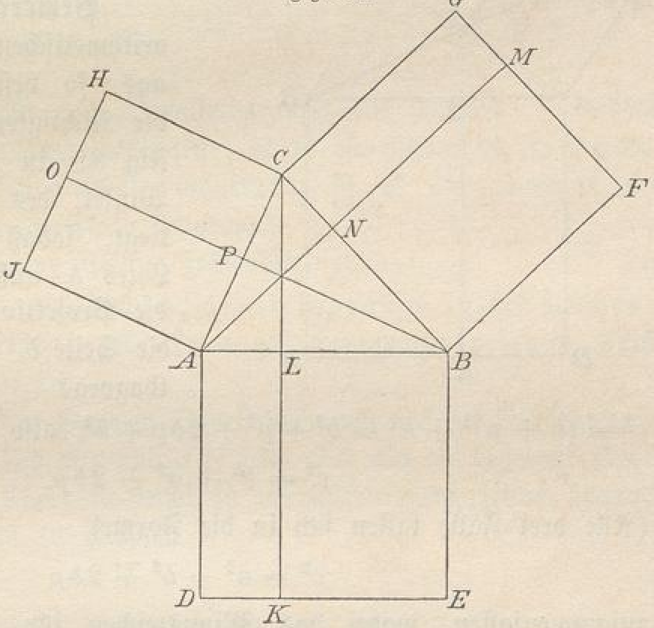
---

*) In der Arithmetik wird gezeigt, daß $(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ist. Beispiel: $(5-3)(5-3) = 25 - 15 - 15 + 9 = 4$. Probe $2 \cdot 2 = 4$.

a) Das Quadrat über einer Dreiecksseite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf diese. (Verallgemeinerter Pythagoreischer Lehrsatz.)

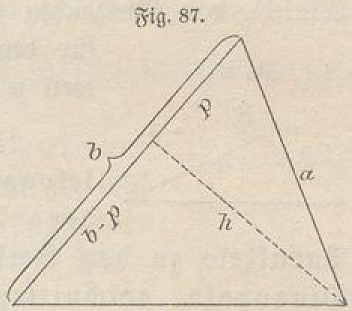
Beweis. Zeige an Fig. 86a (wie bei dem gewöhnlichen Pythagoreischen Lehrsatze), daß folgende Rechtecke gleich sind: $ADKL = APOJ$,*) $KEBL = FMNB$, $NMGC = CPOH$, daß also $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - (CPOH + NMGC)$, oder $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot CPOH$ ist. Hier ist aber $CPOH$ das Rechteck aus AC und der Projektion CP von CB auf CA. Ebenso ist $AB^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,CNMG$, wo CN die Projektion von AC auf BC ist.

Fig. 86 a.



Bemerkung. Setzt man die obigen arithmetischen Schreibweisen voraus, so läßt sich die Richtigkeit des Satzes an Fig. 87 bestätigen, wo c einem spitzen Winkel gegenüberliegt und die zu b gehörige Höhe h gezeichnet ist, sodaß man p als die Projektion von a auf b zu betrachten hat. Nach Pythagoras ist
$c^2 = (b-p)^2 + h^2 = b^2 + p^2 - 2bp + h^2$.
Setzt man dabei $p^2 + h^2 = a^2$, so erhält man $c^2 = b^2 + a^2 - 2bp$.

Fig. 87.



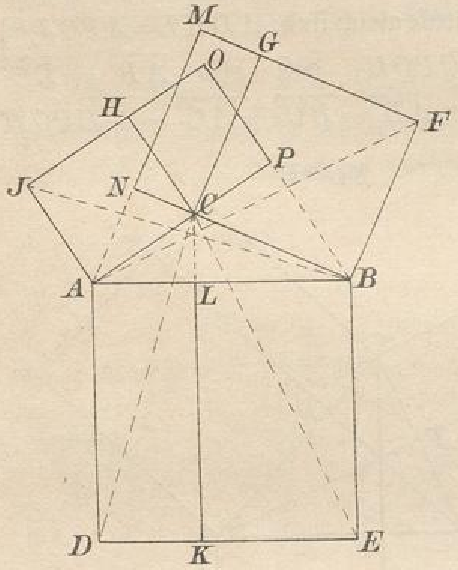
b) Das Quadrat über einer Dreiecksseite, die einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate

*) Ziehe die Hilfslinien JB und CD, für die anderen Rechtecke entsprechende Hilfslinien.

über den beiden anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf diese.

Beweis. Zeige an Fig. 88 (wie an Fig. 86a), daß die mit denselben Buchstaben bezeichneten Rechtecke gleich sind, wie beim Falle a). Da jedoch hier die Quadrate über AC und BC vergrößert werden, so erhält man statt des Obigen $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + (CPOH + NMGC) = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot CPOH$.

Fig. 88.



Bemerkung. Setzt man die arithmetischen Schreibweisen voraus, so bestätigt sich auch hier die Richtigkeit des Satzes an der Fig. 89, in der c dem stumpfen Winkel des Dreiecks gegenüber liegt, sodaß der Fußpunkt des Lotes h außerhalb fällt, ebenso die Projektion p der Seite a auf die Seite b. Hier wird nach Pythagoras

$c^2 = (b + p)^2 + h^2 = b^2 + p^2 + 2bp + h^2$, also, da $p^2 + h^2 = a^2$ ist,

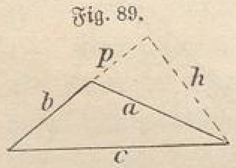
$$c^2 = b^2 + a^2 + 2bp.$$

(Alle drei Fälle lassen sich in die Formel

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bp$$

zusammenfassen, wobei das Minuszeichen für den Fall des spitzen Winkels, das Pluszeichen für den des stumpfen Winkels gilt, während für den rechten Winkel das letzte Glied wegfällt, weil $p = 0$ wird.)

Fig. 89.

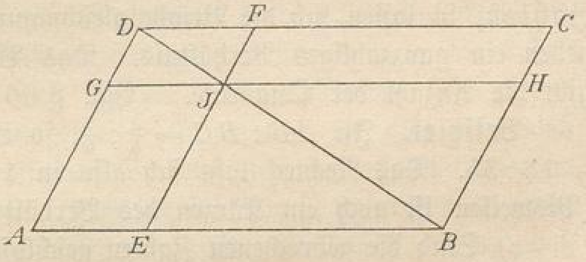


259) Satz von den Ergänzungsparallelogrammen. Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten, so entstehen zwei nicht von der Diagonale geschnittene Parallelogramme, die gleichen Flächeninhalt haben.

Beweis. In Fig. 90 sei $ABCD$ das Parallelogramm und J der Punkt der Diagonale, durch den EF und GH, die Parallelen zu den Seiten, gehen. Hier ist $\triangle ABD = \triangle BCD$. Vom ersten

Dreiecke ziehe man $\triangle BEJ$, von dem anderen das gleiche Dreieck BHJ ab, sodann von dem ersten noch $\triangle DGJ$, vom anderen das gleiche Dreieck DEJ, dann müssen von jedem der großen Dreiecke flächengleiche Stücke übrig bleiben, sodaß $\square\, AEJG = \square\, JHCF$ ist. [Man nennt die beiden Parallelogramme **Ergänzungsparallelogramme**, weil sie nötig sind, um die beiden von der Diagonale geschnittenen Parallelogramme zum ganzen Parallelogramm $ABCD$ zu ergänzen.]

Fig. 90.



Bemerkung. Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so erhält man flächengleiche Ergänzungsrechtecke; ist es ein Rhombus, so werden die Ergänzungsparallelogramme kongruent; ist es ein Quadrat, so werden die Ergänzungsrechtecke kongruent.

Der Satz führt zur Lösung folgender

Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein flächengleiches mit denselben Winkeln zu verwandeln, von dem eine Seite gegeben ist.

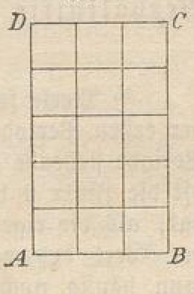
Man betrachte das gegebene Parallelogramm als das Ergänzungsparallelogramm der Fig. 90 und JH oder JF als die gegebene Seite des gesuchten. Die Figur ist leicht zu vervollständigen, jedoch braucht man nicht alle Linien zu zeichnen.

e) Längen- und Flächenberechnungen an geradlinigen Gebilden.

260) Zerlegung des Rechtecks in gleiche Quadrate und Formel für die Rechtecksfläche.

a) Hat ein Rechteck Seiten, die sich verhalten wie zwei ganze Zahlen m und n, so läßt es sich insoviel Quadrate zerlegen, wie das Produkt der Zahlen angibt, also in $m \cdot n$ Quadrate. (Vgl. § 63 des Vorkursus.) Man nehme dabei an, daß m und n keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Das Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Teilers gehört in die Arithmetik.

Fig. 91.



Beispiel. Ist $AB : BC = 3 : 5$, so handelt es sich um $3 \cdot 5 = 15$

Quadrate. Dasselbe gilt für die Verhältnisse $6:10$, $9:15$ usw. Man verlangt stets die möglichst kleine Anzahl von Quadraten. (Fig. 91.)

Es fragt sich jedoch, ob die Einteilung in Quadrate auch für nicht ganze Zahlen möglich ist.

b) Verhalten sich die Rechtecksseiten wie zwei gebrochene Zahlen, so lassen sich die Brüche gleichnamig machen, und die Zähler geben ein ganzzahliges Verhältnis. Das Produkt der neuen Zahlen gibt die Anzahl der Quadrate. (Vgl. § 66 des Vorkursus.)

Beispiel. Ist $AB:BC = \frac{3}{5}:\frac{7}{6}$, so ist auch $AB:BC = \frac{18}{30}:\frac{35}{30} = 18:35$. Das Rechteck läßt sich also in $18 \cdot 35$ Quadrate einteilen. (Bisweilen ist noch ein Kürzen des Verhältnisses möglich.)

c) Sind die gebrochenen Zahlen geschlossene Dezimalbrüche, so ist das ganzzahlige Verhältnis leicht zu finden; z. B. $AB:BC = 1{,}23:2{,}156$ gibt $1230:2156$. Es kann noch in $615:1078$ gekürzt werden. Die Anzahl der Quadrate ist $615 \cdot 1078$.

d) Verhalten sich die Rechtecksseiten so, daß im Verhältnisse ein oder zwei endlose periodische Dezimalbrüche vorkommen, so verwandelt man diese in gewöhnliche Brüche und verfährt wie vorher.

Beispiel. Das Verhältnis sei $2:5{,}238154815481 54\ldots$.

Man setze den Dezimalbruch gleich x, sodaß

$$1\,000\,000x = 5\,238154{,}8154\,8154\ldots\ldots,$$ und

$$100x = 523{,}8154\,8154\ldots\ldots,$$ also durch beiderseitige Subtraktion

$$999\,900x = 5\,237\,631{,}0000\,0000\ldots\ldots,$$ und demnach der Dezimalbruch $x = \frac{5\,237\,631}{999\,900}$ ist.*) Jetzt ist das Verhältnis der Rechtecksseiten $2:\frac{5\,237\,631}{999\,900}$, oder $1\,999\,800:5\,237\,631$. Die Anzahl der Quadrate ist demnach das Produkt der beiden letzten Zahlen. Dabei sei vorausgesetzt, daß Kürzungen nicht mehr möglich sind.

In allen diesen Fällen war das Verhältnis in ein ganzzahliges zu verwandeln, und die Quadratteilung war theoretisch möglich. Solche Verhältnisse nennt man rationale Verhältnisse. Die Seite des gefundenen Quadrates heißt das ge-

---

*) Merke folgende kurzgefaßte Regel: Schreibe die Zahl bis zum Schluß der ersten Periode als ganze Zahl hin, ziehe von ihr ab die vor der ersten Periode stehende Zahl, und dividiere den Rest durch eine Zahl, die vorn so oft die Ziffer 9 hat, als die Periode Stellen zählt, und hinten soviel Nullen hat, als die eigentliche Vorperiode Stellen zählt. Der entstehende Bruch ist der Wert des periodischen Dezimalbruchs in gewöhnlicher Bruchform und kann häufig noch gekürzt werden. Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens ergibt sich aus dem obigen Beispiele.

meinschaftliche Maß der beiden Rechtecksseiten. Sind die möglichen Kürzungen durchgeführt, so handelt es sich um das größte gemeinschaftliche Maß.

[e) Unmöglich wird die Einteilung des Rechtecks in kleine Quadrate, sobald das Verhältnis kein rationales, also ein irrationales ist. Dies findet z. B. statt, wenn die eine Zahl eine ganze, die andere ein endloser Dezimalbruch ohne Periode, d. h. eine Irrationalzahl ist. Solche sind z. B. die Quadratwurzeln aus den Primzahlen, die Kubikwurzeln usw. aus solchen und die durch Multiplikation mit ganzen Zahlen aus diesen Irrationalzahlen entstehenden. Es gibt aber noch Irrationalzahlen, die nicht mit der Wurzelausziehung zusammenhängen. Eine solche ist z. B. die mit dem Kreisumfange zusammenhängende Zahl $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$ Der Nachweis dafür, daß eine Zahl der letzteren Gruppe eine Irrationalzahl ist, läßt sich nur schwierig führen und geht über den Standpunkt der Klasse hinaus. Man kann π als einen Dezimalbruch mit unendlich langer Periode, aber auch als Dezimalbruch mit unendlich langer Vorperiode betrachten. Im ersteren Falle kann man daher $\pi = \frac{314\,159\,265\cdots}{99\,999\,999\cdots}$ setzen, was einen Bruch gibt, der im Zähler und im Nenner unendlich viele Stellen hat. Denkt man sich die letzte (unendlich fern liegende) 9 gestrichen, so erhält man als gleichwertig $\pi = \frac{314\,195\,265\cdots}{100\,000\,000\cdots}$. Auch hier sind Zähler und Nenner bis ins Unendliche fortzusetzen. *Ein irrationales Verhältnis kann also nicht als Verhältnis zweier endlicher ganzen Zahlen dargestellt werden*

Stehen demnach die Seiten eines Rechtecks in einem irrationalen Verhältnis, so müßte jede Seite in unendlich viele unendlich kleine Teile zerlegt werden, wenn man eine Einteilung in kleine Quadrate erzielen wollte, die Quadrate würden unendlich klein und unendlich zahlreich werden. Die beiden Seiten haben also kein gemeinschaftliches Maß von endlicher Größe, man nennt sie daher *inkommensurabel*. So sind z. B. zwei Gerade von den Längen 1 und $\sqrt{2}$ inkommensurabel.

In solchen Fällen begnügt man sich im praktischen Leben mit *Annäherungswerten*. Entweder beschränkt man den Dezimalbruch auf eine endliche Anzahl von Stellen, was z. B. bei $1:\pi$ auf $100:314$, oder auf $1\,000\,000 : 3\,141\,593$, oder auf $1\,000\,000\,000 : 3\,141\,592\,654$ usw. führt. Oder man sucht Näherungswerte, wie $\frac{22}{7} = 3{,}142\,857\ldots$, was allerdings zu groß ist, oder wie $\frac{355}{113} = 3{,}141\,592\,9\ldots$, was nur sehr wenig abweicht. Der Wert $\frac{22}{7}$ war schon dem Archimedes bekannt. Zur Aufsuchung des zweiten und anderer Näherungswerte gibt die Arithmetik geeignete Methoden an.]

f) Als **Flächenmaß** kann man ein Quadrat von beliebiger Seitenlänge wählen. Im praktischen Leben wählt man die Seitenlänge als eine der Längeneinheiten des metrischen Systems. Quadrate von 1, 2, 3, 4, ... cm Seitenlänge haben dabei Flächen von $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$, ... qcm oder $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ qcm oder cm^2. Ein Quadrat von vierfacher Fläche erhält man durch geeignetes Anlegen von drei Quadraten derselben Größe, ein Quadrat von neunfacher Fläche durch geeignetes Anlegen von noch fünf solchen Quadraten an das vorige usw. So ergibt sich folgende Tabelle der Quadratzahlen:

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 1 + 3 \\
3^2 &= 1 + 3 + 5 \\
4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\
5^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

sodaß **jede Quadratzahl gleich einer Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen ist.** Die Arithmetik lehrt, daß, wenn n eine beliebige ungerade Zahl ist, $1 + 3 + 5 + \cdots + n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ist, was an der Tabelle auf die Richtigkeit erprobt werden kann. (Darüber und über die Anwendungen vergleiche man den Vorkursus § 58 bis § 61.)

g) Ist das Rechteck in kleine Quadrate zerlegt, sodaß z. B. die Grundlinie in 3, die Höhe in 5 gleiche Teile zerlegt ist, also $3 \cdot 5 = 15$ Quadrate vorhanden sind, und betrachtet man jedes Quadrat als Flächeneinheit, so handelt es sich um $3 \cdot 5 = 15$ Flächeneinheiten. Ist allgemeiner die Grundlinie des Rechtecks von der Länge b, die Höhe von der Länge h, beides in Zentimetern gegeben, so ist die Fläche gleich bh Quadratzentimetern, oder, wie man einfacher sagt,

$$F = bh.$$

Diese Formel*) gilt nach obigem auch für gebrochene Zahlen. Ist z. B. $b = 3\frac{1}{2}$ cm $= \frac{7}{2}$ cm, $h = 5\frac{2}{3}$ cm $= \frac{17}{3}$ cm, so mache man die Brüche gleichnamig, sodaß $b = \frac{21}{6}$ cm, $h = \frac{34}{6}$ cm ist. Jetzt teile

*) Da zu jedem Rechteck oder Parallelogramm, überhaupt zu jeder geradlinig begrenzten Fläche ein gleich großes Quadrat gehört, dessen Seite gleich f, dessen Fläche gleich f^2 sei, so wird statt F vielfach geschrieben f^2, sodaß die Formel lautet $f^2 = bh$. Dadurch wird angedeutet, daß es sich links, wie rechts, um einen Ausdruck zweiter Dimension handelt. Diese sehr zu empfehlende Schreibweise ist leider noch nicht allgemein geworden.

man b in 21, h in 34 gleiche Teile ein und konstruiere die zugehörigen $21 \cdot 34 = 714$ Quadrate von je $\frac{1}{6}$ cm Seitenlänge, also von $\frac{1}{36}$ qcm Fläche. Das ganze Rechteck hat also $\frac{714}{36}$ qcm $= \frac{21}{6} \cdot \frac{34}{6}$ qcm $= \frac{7}{2} \cdot \frac{17}{3}$ qcm $= bh$ Quadratzentimeter Fläche. Die Formel $F = bh$ gilt also auch für gebrochene **„Maßzahlen"** b und h, also auch für endliche Dezimalbrüche und für unendliche Dezimalbrüche mit Periode, also für rationales Verhältnis $b : h$.

[Für irrationales Verhältnis kann man sie ebenfalls als streng richtig beweisen, hier aber soll im Anschluß an e) nur gesagt werden, daß sie um so richtiger ist, je mehr Dezimalstellen man bei b und h berücksichtigt.]

261) Jedes Parallelogramm ist inhaltsgleich einem Rechteck von derselben Grundlinie b und derselben Höhe h. Sein Inhalt ist daher ebenfalls gegeben durch

$$F = bh.$$

262) a) Jedes Dreieck von der Grundlinie b und der Höhe h ist die Hälfte eines entsprechenden Parallelogramms bezw. Rechtecks. Die Inhaltsformel ist also

$$(1) \qquad F = \frac{bh}{2}.$$

b) Bezeichnet man die Dreiecksseiten als a, b, c, die zugehörigen Höhen als h_1, h_2, h_3, so folgt, daß $\frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2}$ oder $ah_1 = bh_2 = ch_3$ ist. Daraus aber folgt

$$(2) \qquad a : b = h_2 : h_1, \quad b : c = h_3 : h_2, \quad c : a = h_1 : h_3,$$

d. h. zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Höhen.

c) Statt der ersten dieser Proportionen kann man auch schreiben:

$$a : b = 1 : \frac{h_1}{h_2} \quad \text{oder} \quad a : b = \frac{h_1}{h_1} : \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2},$$

demnach lassen sich diese Proportionen in folgende gemeinschaftliche Formel zusammenfassen:

$$(3) \qquad a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3},$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die umgekehrten (reziproken) Werte der Höhen oder wie $h_2 h_3 : h_3 h_1 : h_1 h_2$.

d) Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, und ist ϱ der Radius des In-Kreises, so ergibt sich eine weitere Flächenformel. Verbindet man nämlich in Fig. 65 den Mittelpunkt M des Kreises mit den

Ecken A, B, C des Dreiecks und mit den Berührungspunkten, so wird $\triangle AMB = \frac{a\varrho}{2}$, $\triangle BMC = \frac{b\varrho}{2}$, $\triangle CMA = \frac{c\varrho}{2}$, der Gesamtinhalt wird also $\frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} = \frac{(a+b+c)\varrho}{2}$, wofür man, da $a + b + c$ gleich dem Umfange u ist, auch schreiben kann $F = \frac{u\varrho}{2}$. Der Ausdruck $\frac{a+b+c}{2}$ war aber dort mit p bezeichnet, also ist der Dreiecksinhalt auch

$$(4) \qquad F = \frac{a+b+c}{2}\varrho = \frac{u}{2}\varrho = p\varrho.$$

(In Worten?)

e) Verbindet man in Fig. 66 den Mittelpunkt M_1 des die Seite berührenden An-Kreises, dessen Radius ϱ_1 sei, mit den Ecken des Dreiecks und den Berührungspunkten, so ist

$$\triangle ABC = \triangle BMC + \triangle CMA - \triangle BMC = \frac{b\varrho_1}{2} + \frac{c\varrho_1}{2} - \frac{a\varrho_1}{2}$$
$$= \frac{\varrho_1}{2}(b + c - a).$$

Der Ausdruck $\frac{b+c-a}{2}$ wurde aber dort mit p_1 bezeichnet, also ist

$$(5) \qquad F = \frac{b+c-a}{2}\varrho_1 = p_1\varrho_1.$$

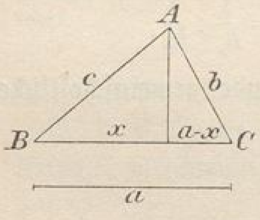
Ebenso ist es mit p_2, p_3, bezw. ϱ_2, ϱ_3. Man hat also die Gesamtformel

$$(6) \qquad F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3$$

oder

$$(6)^* \qquad F = \frac{a+b+c}{2}\varrho = \frac{-a+b+c}{2}\varrho_1 = \frac{a-b+c}{2}\varrho_2$$
$$= \frac{a+b-c}{2}\varrho_3.$$

Fig. 92.



f) Daraus ergibt sich noch eine andere Formel:*) Fig. 92 stellt ein Dreieck mit der Höhe $h_1 = AD$ dar.**) Diese soll aus den Seiten a, b, c berechnet werden. Man setze $BD = x$, also $DC = a - x$ dann ist nach Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken

*) Der Abschnitt f) kann vorläufig zurückgestellt werden, wenn die Lehre von den Quadratwurzeln noch nicht besprochen ist.

**) D ist in die Zeichnung einzutragen.

$$x^2 = c^2 - h_1^2$$
$$(a - x)^2 = b^2 - h_1^2$$

oder

$$a^2 + x^2 - 2ax = b^2 - h_1^2.$$

Setzt man hier den Wert von x^2 aus der ersten Gleichung ein, so folgt

$$a^2 + c^2 - h_1^2 - 2ax = b^2 - h_1^2,$$

oder, wenn man h_1^2 beiderseits streicht,

$$a^2 + c^2 - 2ax = b^2.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Dies setze man ein in die erste Gleichung, die sich auch schreiben läßt als

$$h_1^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)^{*)}$$
$$= \left[c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right] \cdot \left[c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right].$$

Macht man die Ausdrücke in jeder Klammer gleichnamig, so erhält man

$$h_1^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$
$$= \frac{[(a + c)^2 - b^2] \cdot [b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}.$$

In jeder Klammer steht die Differenz zweier Quadrate, die sich wieder in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen läßt, und so folgt

$$h_1^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)^{*)}}{4a^2}$$

oder

$$h_1^2 = \frac{16}{4a^2} \cdot \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} = \frac{4}{a^2} p p_1 p_2 p_3.$$

Demnach ist die Höhe h_1

7) $$h_1 = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{-a + b + c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}}$$
$$= \frac{2}{a}\sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Ebenso ist

$$h_2 = \frac{2}{b}\sqrt{p p_1 p_2 p_3}, \quad h_3 = \frac{2}{c}\sqrt{p p_1 p_2 p_3}.$$

Schafft man in Gleichung (7) $\frac{2}{a}$ nach links, so steht dort $\frac{a h_1}{2} = F$,

*) Summe mal Differenz zweier Zahlen gibt die Differenz ihrer Quadrate.

also die Fläche des Dreiecks. So erhält man die berühmte Heronische Formel für den Inhalt des Dreiecks:

$$(8)\qquad F=\sqrt{p p_1 p_2 p_3}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Vergleicht man diese mit

$$F=p\varrho=p_1\varrho_1=p_2\varrho_2=p_3\varrho_3,$$

so findet man zunächst

$$p\varrho=\sqrt{p p_1 p_2 p_3} \text{ oder } \varrho=\frac{1}{p}\sqrt{p p_1 p_2 p_3}=\sqrt{\frac{p p_1 p_2 p_3}{p^2}}=\sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}}.$$

In ähnlicher Weise sind die anderen Formeln zu behandeln. Im ganzen ergibt sich

$$(9)\quad \varrho=\sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}},\ \varrho_1=\sqrt{\frac{p p_2 p_3}{p_1}},\ \varrho_2=\sqrt{\frac{p p_1 p_3}{p_2}},\ \varrho_3=\sqrt{\frac{p p_1 p_2}{p_3}},$$

wo für die p die aus den Seiten hergestellten Ausdrücke $\frac{a+b+c}{2}$ usw. eingesetzt werden können. Man halte dabei fest, daß nach den Fig. 65 und 66 p den halben Umfang des Dreiecks, p_1, p_2, p_3 einfache Tangentenlängen bedeuten.

Bemerkung. Bildet man aus (9) das Produkt der vier Radien und kürzt man den entstehenden Bruch, so läßt sich die Wurzel ausziehen und es entsteht

$$\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3=p p_1 p_2 p_3=F^2$$

oder

$$(10)\qquad F=\sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}=\sqrt{p p_1 p_2 p_3},$$

sodaß sich die Fläche des Dreiecks auch aus den Radien der Berührungskreise berechnen läßt und das Produkt der Radien gleich dem Produkte der p ist. — Noch andere Formeln lassen sich durch Multiplikation und Division finden, z. B. $\varrho\varrho_1=p_2 p_3$, $\frac{\varrho}{\varrho_1}=\frac{p_1}{p}$ usw. Ferner ist nach (7)

$$h_1 h_2 h_3=\frac{8}{abc}\sqrt{(p p_1 p_2 p_3)^3}=\frac{8}{abc}\sqrt{(\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3)^3}=\frac{8}{abc}F^3,$$

sodaß z. B.

$$F=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{abch_1h_2h_3} \text{ ist.}$$

Die Heronische Formel soll in der Ähnlichkeitslehre kürzer abgeleitet werden. Sie bedeutet einen großen Fortschritt in der Lehre vom Dreieck.

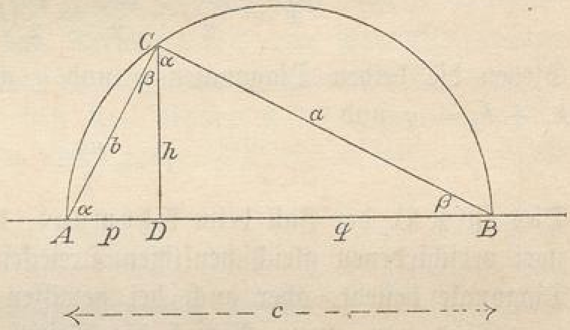
263) **Eine Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks.** Fällt man von einem beliebigen Punkte P innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks Lote l_1, l_2, l_3 auf dessen Seiten und verbindet man P mit den Ecken des Dreiecks, so ist die Fläche des Dreiecks $F = \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CAP = \frac{al_1}{2} + \frac{al_2}{2} + \frac{al_3}{2} = \frac{a}{2}(l_1 + l_2 + l_3)$. Also ist $l_1 + l_2 + l_3 = \frac{2F}{a} = h$. Folglich gilt der Satz:

Die Summe der von einem beliebigen Punkte innerhalb des gleichseitigen Dreiecks auf dessen Seite gefällten Lote ist konstant und zwar gleich der Höhe des Dreiecks.

Liegt der Punkt P außerhalb des Dreiecks, so ist entweder eins der Lote, oder es sind zwei solche von außen her auf die Dreieckseiten zu fällen. Dann bleibt der Satz bestehen, sobald man diese Lote als negativ auffaßt. (Man versuche den Satz auch ohne Rechnung, d. h. rein geometrisch zu beweisen.)

264) **Eine Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks.** Fig. 93 stelle ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe h (auf der Hypotenuse) dar.

Fig. 93.



Die Abschnitte der Hypotenuse bezeichne man mit p und q. Dabei ist

$$h^2 = a^2 - q^2,$$

$$h^2 = b^2 - p^2,$$

also durch beiderseitige Addition

$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2 = c^2 - p^2 - q^2$$

oder, da $c = p + q$ ist,

$$2h^2 = (p + q)^2 - (p^2 + q^2) = p^2 + q^2 + 2pq - (p^2 + q^2) = 2pq.$$

Daraus folgt $h^2 = pq$, d. h.:

Das Produkt aus den Abschnitten der Hypotenuse ist gleich dem Quadrate der Höhe.

Aus $h \cdot h = p \cdot q$ folgt $\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ oder $p : h = h : q$. Daher nennt man h die mittlere Proportionale zu p und q. Diese kann daher konstruiert werden, indem man p und q aneinanderlegt, darüber einen Halbkreis zeichnet und im Teilpunkte ein bis zum Kreise reichendes

Lot errichtet. Eine Proportion, in der das zweite und dritte Glied übereinstimmen, nennt man eine stetige Proportion.

In Fig. 82 war das Quadrat über BC gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte der letzteren. In der Bezeichnungsweise der Fig. 93 folgt also $a^2 = q \cdot c$ und $b^2 = p \cdot c$. Demnach ist a mittlere Proportionale zu p und c; ebenso ist b mittlere Proportionale zu p und c. Dies gibt eine neue Konstruktion der mittleren Proportionale zweier Geraden. (Welche?)

(In der Ähnlichkeitslehre ergeben sich diese Sätze in sehr einfacher Weise.)

265) Das allgemeine Viereck gewöhnlicher Art läßt sich durch jede Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Seine Fläche läßt sich z. B. berechnen, wenn die Diagonale $BD = p$ und die von A und C auf diese gefällten Lote h_1 und h_3 bekannt sind. Dann ist

$$F = \frac{ph_1}{2} + \frac{ph_3}{2} = \frac{p}{2}(h_1 + h_3).$$

Stehen die beiden Diagonalen p und q aufeinander senkrecht, so ist $h_1 + h_3 = q$ und

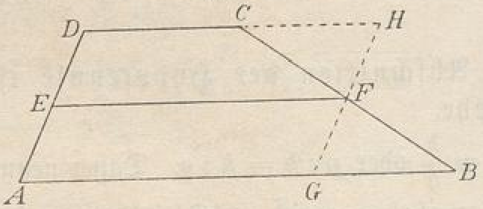
$$F = \frac{pq}{2}.$$

Dies ist z. B. der Fall beim Rhombus, beim Deltoid, welches aus zwei verschiedenen gleichschenkligen Dreiecken über bezw. unter derselben Diagonale besteht, aber auch bei gewissen unsymmetrischen Vierecken.

Sind von einem Viereck die Seiten a, b, c, d und die eine Diagonale gegeben, so läßt sich jedes durch die letztere abgeschnittene Dreieck nach der Heronischen Dreiecksformel berechnen, also ist auch die Vierecksfläche bekannt.

266) Über das Trapez, bei dem ein paralleles Seitenpaar vorhanden ist, muß für die Flächenberechnung folgendes als bekannt vorausgesetzt werden: Halbiert man in einem Trapez die nicht parallelen Seiten, und zieht man die Verbindungslinie der Halbierungspunkte, so ist diese zu dem anderen Seitenpaare parallel und gleich der halben Summe dieser Seiten.

Fig. 94.



Beweis. In Fig. 94 sei $ABCD$ das Trapez, E und F seien die Halbierungspunkte der nicht parallelen Seiten AD und BC. Man lege durch F eine Parallele GH zu AD von der einen Parallelen bis zur Verlängerung der anderen, dann ist $\triangle FBG \cong \triangle FCH$ (zweiter Kongruenzsatz), also $GF = FH$ und somit EF Mittellinie des Parallelogramms $AGHD$. Daraus folgt $EF \# AG \# DH$. Ferner ist

$$EF = DC + CH,$$

und zugleich

$$EF = AB - GB,$$

folglich durch beiderseitige Addition $2EF = AB + DC + (CH - GB)$, oder, da $CH - GB = 0$ ist, $2\,EF = AB + DC$

und $$EF = \frac{AB + DC}{2}.$$

Man nennt $\frac{AB + DC}{2}$ das arithmetische Mittel der beiden Grundlinien AB und DC oder auch die mittlere Grundlinie. Sind $AB = a$, $DC = b$ und die Höhe h (der Abstand der beiden Parallelen) bekannt, so ist die Fläche des Trapezes leicht zu berechnen. Denkt man sich nämlich das Dreieck FHC vom Parallelogrammen abgeschnitten und in der Form des kongruenten Dreiecks FGB an FG angelegt, so erkennt man, daß das Trapez $ABCD$ dem Parallelogramm flächengleich ist. Da aber $AG = EF$ ist, so folgt als Fläche für beide Figuren

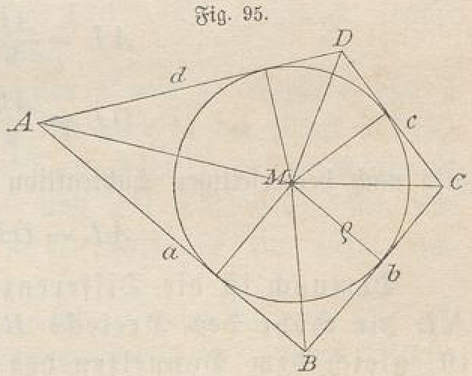
$$F = \frac{a + b}{2} h.$$

Die Trapezfläche ist also gleich dem Produkte aus der mittleren Grundlinie und der Höhe.

Zu den Trapezen gehört ein gegen die Mittellinie symmetrisches, das Antiparallelogramm oder gleichschenklige Trapez.

267) Das gewöhnliche Tangentenviereck. Hat das Tangentenviereck den Umfang $u = a + b + c + d$, wobei $a + c = b + d = \frac{u}{2}$ ist, und hat sein Inkreis den Radius ϱ, so läßt sich seine Fläche leicht berechnen. Denn es ist $\triangle AMB + \triangle BMC + \triangle CMD + \triangle DMA = \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} + \frac{d\varrho}{2}$, also ist die Gesamtfläche

Fig. 95.



$$F = \frac{\varrho}{2}(a + b + c + d) = \frac{\varrho}{2} u = \varrho(a + c) = \varrho(b + d).$$

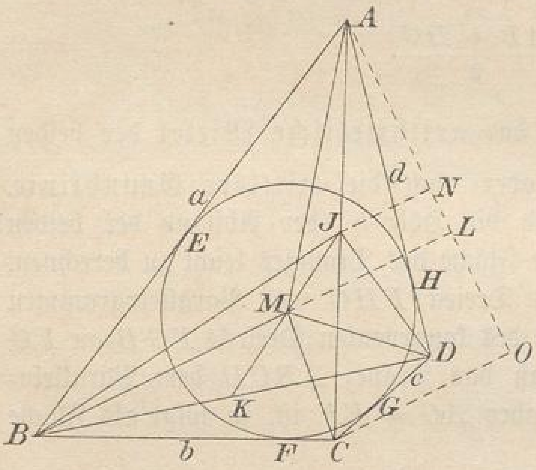
268) Eine merkwürdige Eigenschaft des Tangentenvierecks ergibt sich aus dem Verhalten der vier Teilvierecke.

In Fig. 96 ist

(1) $$\triangle AMB - \triangle CMB = \frac{a\varrho}{2} - \frac{b\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(a - b),$$

(2) $$\triangle AMD - \triangle CMD = \frac{d\varrho}{2} - \frac{c\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(d - c).$$

Fig. 96.



Aus $a + c = b + d$ folgt aber $a - b = d - c$, folglich stimmen beide Differenzen überein. (Vgl. Nr. 286.)

Ist nun J der Halbierungspunkt der Diagonale AC, so wird behauptet, daß die Differenz (1) das Doppelte vom Dreieck BMJ sei.

Fällt man nämlich von A aus ein Lot AL auf die Verlängerung von BM, so ist $\triangle ABM = \frac{BM \cdot AL}{2}$. Fällt man von C ein Lot CO auf AL, so ist OL die Höhe des Dreiecks BMC für die Grundlinie BM, also $\triangle BMC = \frac{BM \cdot OL}{2}$. Die Differenz (1) ist also gleich $\frac{BM \cdot AL}{2} - \frac{BM \cdot OL}{2} = \frac{BM(AL - OL)}{2}$. Fällt man von J aus ein Lot JN auf AO, so ist $AN = \frac{AO}{2}$, also

$$AL = \frac{AO}{2} + NL,$$

$$OL = \frac{AO}{2} - NL,$$

also nach beiderseitiger Subtraktion

$$AL - OL = 2\,NL.$$

Demnach ist die Differenz (1) gleich $BM \cdot NL$, oder, da NL die Höhe des Dreiecks BMJ für die Grundlinie BM ist, gleich dem Doppelten des Dreiecks BMJ.

Ganz ebenso läßt sich mit Hilfe der entsprechenden Hilfslinien beweisen, daß die Differenz (2) gleich dem Doppelten des

Dreiecks DMJ ist. Da aber beide Differenzen übereinstimmen, so folgt, daß

(3) $$\triangle BMJ = \triangle DMJ \text{ ist.}$$

Ist nun K die Mitte der Diagonale BD, so ist auch $\triangle BKM = \triangle DKM$. Wäre also JMK eine gebrochene Linie, so würde Viereck $BKMJ$ = Viereck $DKMJ$ sein. Zieht man aber die Gerade KJ, so ist auch $\triangle BKJ = \triangle DKJ$. Folglich muß M auf JK liegen. (Läge nämlich M rechts vor KJ, so würde $BKMJ > DKMJ$ sein, läge es links von JK, so würde es kleiner als dieses sein.) Oder: $\triangle JMK$ hat den Inhalt Null, demnach liegen J, K und M auf einer Geraden.

Folglich gilt der Satz:

Die Verbindungslinie der Diagonalenmitten eines Tangentenvierecks geht stets durch den Mittelpunkt des In-Kreises.*)

Bemerkungen. a) Ist der Winkel bei D ein solcher von 180^0, so wird das Tangentenviereck zum Tangentendreieck und D wird Berührungspunkt des In-Kreises. Jetzt wird J der Halbierungspunkt der Dreiecksseite AC. Daraus folgt:

Die Mitte der Berührungstransversale (BD) eines Dreiecks und die Mitte der zugehörigen Dreiecksseite (AC) haben eine Verbindungslinie, die durch den Mittelpunkt des In-Kreises geht. Dort also schneiden einander die drei entsprechenden Verbindungslinien für das ganze Dreieck.

b) Bezeichnet man die vier Teildreiecke AMB, BMC, CMD, DMA des Tangentenvierecks als J_1, J_2, J_3, J_4, so folgt aus ihren Inhaltsformeln $J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = a : b : c : d$. Aus der obigen Formel $J_1 - J_2 = J_4 - J_3$ folgt noch $J_1 + J_3 = J_2 + J_4$. Man beweise noch, daß $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = 180^0$ ist, ebenso $\sphericalangle BMC + \sphericalangle DMA = 180^0$. (Vgl. Nr. 286.)

c) Verlängert man die Gegenseiten a und c, ebenso b und d bis zum Durchschnitte P bezw. Q, so hat man in der Figur $APCQ$ ein Viereck mit einspringendem Winkel, in $BPDQ$ ein überschlagenes Viereck. Bei dem ersteren sind AC und PQ Diagonalen, bei dem anderen PD und PQ. Beiden ist der Kreis M ein- bezw. an-

*) Dies scheint der einfachste Elementarbeweis dieses Satzes zu sein. In Teil III, 2. Auflage dieses Lehrbuchs ist ein umständlicherer Nachweis geliefert. Der Satz ist ein Sonderfall eines Satzes von Gauß über die drei Diagonalenmitten des vollständigen Vierseits und über die Mittelpunkte der einem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte. (Vgl. Teil III.)

beschrieben. Man versuche ebenso zu zeigen, daß die Halbierungspunkte aller drei Diagonalen AC, BD und PQ auf der durch M gehenden Geraden JK liegen. (Gaußsche Gerade.)

269) Flächen der drei Arten anbeschriebener Tangentenvierecke.

a) Für das Tangentenviereck mit einspringendem Winkel (bei D) ist $F = \triangle AMB + \triangle BMC - \triangle CMD - \triangle DMA = a\frac{\varrho}{2} + b\frac{\varrho}{2} - c\frac{\varrho}{2} - d\frac{\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(a + b - c - d)$. (Vgl. Fig. 97.)

b) Das überschlagene Tangentenviereck $ABCD$ hat keinen Inhalt im gewöhnlichen Sinne. Man versteht unter seinem Inhalte den

Fig. 98.

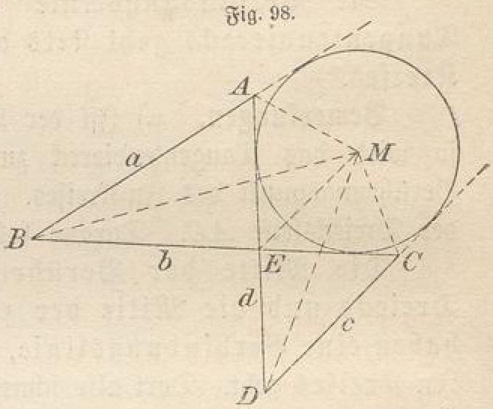
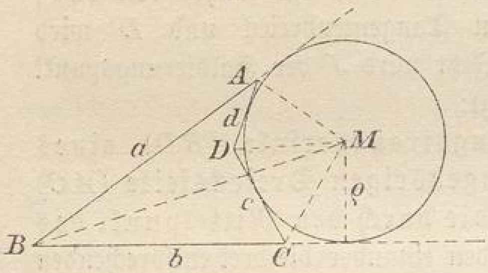


Fig. 97.



Unterschied der Dreiecke ABE und CDE. (Die Fläche des einen Dreiecks wird gewissermaßen als negativ aufgefaßt.) Dann ist wieder $F = \triangle AMB + \triangle BMC - \triangle CMD - \triangle AMD = \frac{\varrho}{2}(a + b - c - d) = \triangle ABE - \triangle CDE$. (Vgl. Fig. 98.)

c) Auch für die dritte Art von Tangentenvierecken, bei der keine Seite unmittelbar berührt, gilt die genannte Flächenformel. (Vgl. Fig. 72.)

370) Die Fläche jedes einem Kreise umbeschriebenen Vielecks gewöhnlicher Art ist

$$F = \frac{\varrho}{2}(a + b + c + d + \cdots) = \frac{\varrho}{2}u.$$

Verbindet man die Ecken eines allgemeinen konvexen Vielecks (n-Ecks) mit einem Punkte P seines Innern, so zerlegt man es in n Dreiecke. Sind a_1, a_2, a_3, …, a_n die Seiten, h_1, h_2, h_3, …, h_n die zugehörigen Höhen der Dreiecke, so ist die Fläche

$$F = \tfrac{1}{2}[a_1h_1 + a_2h_2 + a_3h_3 + \cdots + a_nh_n].$$

271) Bemerkungen über Pythagoreische Zahlen.

Im Vorkursus § 72 wurde eine Reihe von Gruppen ganzer Zahlen zu je dreien angegeben, von denen jede den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechen konnte. Diese Pythagoreischen Zahlen sollen hier wiederholt und ergänzt werden.

3, 4, 5	16, 63, 65	27, 364, 365	36, 77, 85
5, 12, 13	17, 144, 145	28, 45, 53	36, 323, 325
7, 24, 25	19, 180, 181	28, 195, 197	37, 684, 685
8, 15, 17	20, 21, 29	29, 420, 421	39, 80, 89
9, 40, 41	20, 99, 101	31, 480, 481	39, 760, 761
11, 60, 61	21, 220, 221	32, 255, 257	40, 399, 401
12, 35, 37	23, 264, 265	33, 56, 65	41, 840, 841
13, 84, 85	24, 143, 145	33, 544, 545	43, 924, 925
15, 112, 113	25, 312, 313	35, 612, 613	44, 117, 125
			44, 483, 485

Multipliziert man die Zahlen einer solchen Gruppe mit einer beliebigen ganzen Zahl, so erhält man wieder eine solche Gruppe, die aber nichts neues bietet. Nur unabhängige Pythagoreische Zahlen sind hier bis zur Zahl 44 für die kleinste Seite angegeben.

Die im Vorkursus angegebene vorläufige Regel, für jede beliebige Zahl $n\,(> 5)$ zwei zugehörige größere zu finden, wird jetzt verständlich sein.

a) Ist n ungerade, so setze man in $p^2 - q^2 = n^2$ die Zahl $p = q + 1$. Dann wird $(q+1)^2 - q^2 = n^2$ oder $2q + 1 = n^2$, d. h. $q = \frac{n^2 - 1}{2}$, $p = \frac{n^2 - 1}{2} + 1 = \frac{n^2 - 1 + 2}{2} = \frac{n^2 + 1}{2}$. Die Lösung gibt also die Zahlengruppe n, $\frac{n^2 - 1}{2}$, $\frac{n^2 + 1}{2}$.

b) Ist n gerade, so setze man in $p^2 - q^2 = n^2$ die Zahl $p = q + 2$. Dann wird $(q+2)^2 - q^2 = n^2$ oder $4q + 4 = n^2$, d. h. $q = \frac{n^2 - 4}{4}$, $p = \frac{n^2 - 4}{4} + 2 = \frac{n^2 + 4}{4}$. Die Lösung ist also n, $\frac{n^2 - 4}{4}$, $\frac{n^2 + 4}{4}$.

Man findet aber dabei nicht sämtliche unabhängigen Pythagoreischen Zahlen, sondern nur solche Gruppen, bei denen die beiden größeren Zahlen nur um 1 oder 2 voneinander unterschieden sind. (Beispiele findet man im Vorkursus.) Eine allgemeinere Lösung gibt folgendes:

c) Sind a und b beliebig gegebene ganze Zahlen und ist dabei $a > b$, so ist leicht zu zeigen, daß die Zahlen

$$(a^2 - b^2), \quad (2ab), \quad (a^2 + b^2)$$

eine Gruppe Pythagoreischer Zahlen sind. Es ist nämlich:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

weil
$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$$
ist.

Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 1$, so findet man $a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$, $2ab = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, $a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$, also die erste Gruppe 3, 4, 5.

Setzt man $a = 3$, $b = 1$, so folgt $a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$, $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$, $a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10$, also die Gruppe 6, 8, 10, die aber nichts neues gibt, da sie aus der ersten durch Multiplikation mit 2 hervorgeht.

Setzt man $a = 3$, $b = 2$, so folgt $a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, $a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$, also die Gruppe 5, 12, 13. Ebenso kann man der Reihe nach $a = 4$, $b = 1$, oder $a = 4$, $b = 2$, oder $a = 4$, $b = 3$ setzen. Das erste gibt die Gruppe 8, 15, 17, das dritte die Gruppe 7, 24, 25. Das zweite gibt nichts neues, da 12, 16, 20 aus der ersten Gruppe durch Multiplikation mit 3 hervorgeht.

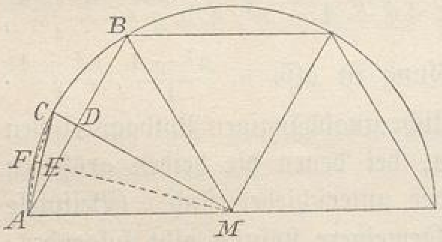
Auf diese Weise findet man sämtliche Pythagoreischen Zahlen bis zu einer beliebigen Anfangszahl a hin.

[Damit ist eine wichtige Gruppe von unbestimmten Gleichungen zweiten Grades (Diophantische Gleichungen zweiten Grades) von der Form $x^2 + y^2 = n^2$, wo x, y und n ganze Zahlen sein sollen, ohne besondere Vorkenntnisse zur Lösung gebracht.]

[272) Vorläufige Methode, die Zahl π mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes bis auf 6 Stellen Genauigkeit zu berechnen.*)

Auflösung. In Fig. 99 sei der Radius des Halbkreises gleich 1. Da sich der Radius dreimal als Sehne eintragen läßt, ist zunächst die Halbkreislinie größer als **3.** Man halbiere den Bogen AB in C. Dann ist $AD = \frac{1}{2}$, $AM = 1$, folglich $MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich ist $CD = MC - MD = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich ist die Seite des regelmäßigen 12-Ecks

Fig. 99.



$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(1 + \tfrac{3}{4} - 2\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)}$$
$$= \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

*) In der Ähnlichkeitslehre wird eine bequemere Methode angegeben. Hier handelt es sich nur um eine Übung in der Berechnung des Umfangs

Da $\sqrt{3} = 1{,}732051\cdots$, also $2 - \sqrt{3} = 0{,}267949\cdots$ und daher $AC = \sqrt{0{,}267949\cdots} = 0{,}5176380\cdots$ ist, so folgt als halber Umfang des regelmäßigen Zwölfecks das Sechsfache davon, d. h. $3{,}10528\cdots$. Dies ist schon ein besserer Näherungswert für π als die Zahl 3.

Jetzt halbiere man den Bogen AC, was F gibt, dann wird durch FM die Sehne AC in E halbiert, und es wird

$$AE = \frac{AC}{2} = 0{,}2588190\cdots,$$

$$EM = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{1 - AE^2},$$

$$FE = 1 - EM = 1 - \sqrt{1 - AE^2},$$

also die Sehne

$$AF = \sqrt{AE^2 + FE^2} = \sqrt{AE^2 + \left(1 - \sqrt{1 - AE^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{AE^2 + 1 + 1 - AE^2 - 2\sqrt{1 - AE^2}} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - AE^2}\right)}.$$

Hier ist $AE^2 = 0{,}06698728\cdots$, also $1 - AE^2 = 0{,}9330127\cdots$ und $AF = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{0{,}9330127\cdots}\right)}$, oder, da $\sqrt{0{,}9330127\cdots}$ $= 0{,}9659258\cdots$ ist, $AF = \sqrt{2 \cdot 0{,}0340742\cdots} = \sqrt{0{,}0681484\cdots}$ $= 0{,}2610525\cdots$. Der halbe Umfang des 24-Ecks ist das Zwölffache davon oder 3,132630, was noch näher an π liegt. So kann man, die Halbierung der Bogen wiederholend, fortfahren.

In derselben Weise kann man den halben Umfang der umbeschriebenen regelmäßigen Vielflache der angegebenen Seitenzahl berechnen. Während die einbeschriebenen Vielflache einen zu kleinen Näherungswert geben, geben die umbeschriebenen einen zu großen, aber π wird immer enger zwischen zwei Zahlen eingeschnürt. Die Resultate bis zur sechsten Stelle sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	Einbeschrieben:	Umbeschrieben:	Folglich:
6-Eck	3,00000	3,46410	$3 < \pi < 3{,}4\ldots.$
12-Eck	3,10583	3,21539	$3{,}1 < \pi < 3{,}2\ldots.$
24-Eck	3,13263	3,15966	$3{,}13 < \pi < 3{,}15\ldots$
48-Eck	3,13935	3,14609	$3{,}139 < \pi < 3{,}146\ldots$
96-Eck	3,14103	3,14271	$3{,}1410 < \pi < 3{,}142\ldots$
192-Eck	3,14145	3,14187	$3{,}1414 < \pi < 3{,}1418.$
384-Eck	3,14156	3,14166	$3{,}14156 < \pi < 3{,}14166$
768-Eck	3,14158	3,14161	$3{,}14158 < \pi < 3{,}14161$
1536-Eck	3,14159	3,14160	$3{,}14159 < \pi < 3{,}14160$

Damit ist $\pi = 3{,}14159$ auf sechs Stellen richtig berechnet.]

regelmäßiger Vielecke, deren ein- oder umbeschriebener Kreis den Radius 1 hat. Ist das Wurzelausziehen noch nicht geübt, so ist dieser Paragraph zu überschlagen.

f) Schlußbemerkungen zur planimetrischen Lehraufgabe der Quarta und Untertertia.

a) Ein wesentlicher Bestandteil der Planimetrie liegt in den Erklärungen (Definitionen) der in ihr zu behandelnden Begriffe.

Diese Begriffe sind entweder Grundbegriffe oder zusammengesetzte Begriffe.

Grundbegriffe sind z. B. Punkt, Linie, Fläche.

Zusammengesetzte Begriffe sind z. B. rechtwinkliges Dreieck, Parallelogramm.

Eine Erklärung soll alles Notwendige enthalten, aber nur das Notwendige. Sie ist entweder eine sachliche Erklärung (Realerklärung) oder eine Entstehungserklärung (genetische Erklärung). So kann man z. B. die Gerade folgendermaßen erklären: Die Gerade ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten. Man kann aber auch sagen: Die Gerade entsteht durch die Bewegung eines stets in derselben Richtung wandernden Punktes.

Aus der Erklärung eines planimetrischen Gebildes müssen sich dessen wesentliche Eigenschaften ableiten lassen. Die Ableitung der Eigenschaften der Gebilde ist eine Hauptaufgabe der Mathematik. Sie muß in streng logischer Weise erfolgen. (Die Logik ist die Wissenschaft, die sich mit den Denkformen, besonders mit den Schlußfolgerungen beschäftigt.)

b) Dasjenige, was über einen planimetrischen (allgemeiner einen mathematischen) Begriff ausgesagt wird, nennt man einen Satz. Ein solcher Satz kann eine allgemein anerkannte Grundwahrheit (ein Axiom) sein oder ein des Beweises bedürftiger Lehrsatz.

α) Als allgemeine Grundsätze werden in der Regel folgende angegeben.*)

1) Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie untereinander gleich. Ist $a = c$ und $b = c$, so ist $a = b$.
2) Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a + b = a_1 + b_1$.
3) Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a - b = a_1 - b_1$.
4) Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $a \cdot b = a_1 \cdot b_1$.

*) Als erster Grundsatz wird häufig folgender angegeben: „Jede Größe ist sich selbst gleich." Da jedoch zur Gleichheit mindestens zwei Größen gehören, wird er besser übergangen.

5) Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches. Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

Jedem dieser Gleichheitssätze kann ein Ungleichheitssatz zur Seite gestellt werden, z. B. Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches. Ist z. B. $a = a_1$, aber $b > b_1$, so ist $a + b > a_1 + b_1$; ist $a = a_1$, aber $b < b_1$, so ist $a + b < a_1 + b_1$.

Dem ersten Grundsatze wird häufig folgender Ungleichheitssatz zur Seite gestellt:

6) Ist von zwei gleichen Größen die eine größer (bezw. kleiner) als eine dritte, so ist auch die andere größer (bezw. kleiner) als die dritte.

Im Bereiche der positiven Größen gilt noch folgender Grundsatz:

7) Der Teil ist kleiner als das Ganze, oder das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

Diese Grundsätze sind teils schon zur Anwendung gekommen, teils werden sie noch Anwendung finden.

Jeder der ersten sechs Sätze enthält eine Bedingung, unter der das Ausgesagte richtig ist. Die Bedingung nennt man die Voraussetzung, die Aussage heißt die Behauptung. Auf einen Beweis der letzteren wird, wie schon gesagt, verzichtet, weil es sich um allgemein als richtig anerkannte Denkformen (Schlußfolgerungen) handelt.

β) Neben den allgemeinen Grundsätzen gibt es planimetrische Grundsätze (planimetrische Axiome), bei denen auch auf einen Beweis verzichtet wird. So sagt man z. B.: „In der Ebene lassen sich durch jeden Punkt unendlich viele gerade Linien legen."

[Bei manchen Sätzen solcher Art können Zweifel herrschen, ob sie zu den Grundsätzen oder zu den eines Beweises bedürftigen Lehrsätzen gehören.*) Gerade in neuerer Zeit sind in dieser Beziehung über die Grundlagen der Geometrie umfangreiche Untersuchungen scharfsinnigster Art gemacht worden. Zu allgemeiner Einigung ist man noch nicht gelangt. Die Schule kann auf diese kritischen Streitfragen nicht eingehen. Sie nimmt daher manche Sätze als planimetrische Axiome an, die vielleicht später von der strengen Systematik nicht als solche anerkannt werden.

Unter diesen Axiomen hat das sogenannte elfte Axiom des Euklid eine hervorragende Rolle gespielt. Es handelt sich um

*) Die eingeklammerten Bemerkungen können vorläufig überschlagen werden, müssen aber dann später besprochen werden.

den bekannten Satz, daß, wenn bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden korrespondierende Winkel gleich sind, die letzteren Geraden einander nicht schneiden können, wie weit man sie auch verlängere. Zweitausend Jahre lang haben auch bedeutende Mathematiker den Satz streng zu beweisen versucht. Erst Gauß und einige seiner Zeitgenossen haben erkannt, daß ein strenger Beweis des Satzes unmöglich ist, daß also jener scharfsinnige Grieche ihn mit vollem Rechte als Axiom hingestellt hat. (Nimmt man diesen Satz nicht als richtig an, so kommt man auf die verschiedenen Formen nichteuklidischer Geometrien.) Der Satz kann übrigens durch den Satz ersetzt werden, daß die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten sei. Geschieht dies, so ist dieser Satz als Axiom zu betrachten.

Im allgemeinen wird anerkannt, daß die Schule eine größere Anzahl von Axiomen nötig hat als die Wissenschaft.

γ) Bei einem Lehrsatze dagegen handelt es sich um Voraussetzung, Behauptung und Beweis.

Soll z. B. bewiesen werden, daß gleichen Seiten eines Dreiecks gleiche Winkel gegenüberliegen, so wird z. B. vorausgesetzt, daß ABC ein Dreieck und daß $AC = BC$ ist. Behauptet wird, daß $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\alpha$ sei. Um den Beweis zu liefern, hat man im vorliegenden Falle eine Hilfskonstruktion nötig. Entweder fällt man von C aus auf die Gegenseite ein Lot oder man verbindet C mit der Mitte der Gegenseite oder man halbiert den Winkel bei C. Dann beweist man, daß durch die Hilfslinie das Dreieck in zwei kongruente Teile zerlegt wird. Daraus folgt die Gleichheit der homologen Winkel β und α.

So ergibt sich für jeden Lehrsatz ein bestimmtes Schema: 1) Der Lehrsatz selbst, 2) die Voraussetzung, 3) die Behauptung, 4) die etwa nötige Hilfskonstruktion, 5) der Beweis.

Zur Übung im streng logischen Denken ist es durchaus erforderlich, dieses Schema an vielen Beispielen durchzuführen. Auch ist alles, was im Beweise gesagt wird, zu begründen, sei es durch Verweisung auf den entsprechenden Grundsatz oder durch Angabe eines bereits bewiesenen Lehrsatzes. Im obigen Beispiele ist z. B. der angewandte Kongruenzsatz zu nennen. Nur der Kürze halber ist in diesem Buche das angegebene Schema nicht durchgängig angewandt.

Der Beweis ist entweder ein unmittelbarer, d. h. ein direkter Beweis, oder ein mittelbarer, d. h. ein indirekter Beweis. Bei dem ersteren wird der Nachweis der Richtigkeit wirk-