Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

d) Beziehungen zwischen drei involutorischen Punktpaaren

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Auflösung 1. Man suche O und bestimme OC_1 aus der Gleichung

$$OA \cdot OA_1 = OC \cdot OC_1$$

oder gemäß der Proportion

$$OC : OA = OA_1 : OC_1 .$$

Auflösung 2. Man lege durch A und A_1 einen Kreis und durch B und B_1 einen andern, der den ersteren in Punkten P und Q schneidet. Der durch P, Q und C gelegte Kreis schneidet die gegebene Gerade in C_1.

16) **Aufgabe.** Welche Beziehungen bestehen zwischen je drei Punktpaaren einer involutorischen Punktreihe?

Auflösung. Ist die Punktreihe z. B. eine elliptische, ist O ihr Mittelpunkt und $-k^2$ die Potenz, so ist

$$OA_1 = \frac{-k^2}{OA} \quad \text{und} \quad OB = \frac{-k^2}{OB_1},$$

oder

$$BO = \frac{k^2}{OB_1},$$

folglich

$$BO + OA_1 = BA_1 = \frac{k^2}{OB_1} - \frac{k^2}{OA} = k^2 \frac{OA - OB_1}{OA \cdot OB_1}$$

$$= k^2 \frac{OA + B_1 O}{OA \cdot OB_1} = k^2 \frac{B_1 A}{OA \cdot OB_1},$$

also

$$A_1 B = k^2 \frac{AB_1}{OA \cdot OB_1}.$$

Ebenso ist

$$A_1 B_1 = k^2 \frac{AB}{OA \cdot OB}, \quad A_1 C = k^2 \frac{AC_1}{OA \cdot OC_1}, \quad A_1 C_1 = k^2 \frac{AC}{OA \cdot OC},$$

folglich

$$\frac{A_1 B \cdot A_1 B_1}{A_1 C \cdot A_1 C_1} = \frac{AB_1 \cdot AB}{OA^2 \cdot OB \cdot OB_1} \cdot \frac{OA^2 \cdot OC \cdot OC_1}{AC \cdot AC_1}.$$

Hebt man OA^2 und außerdem $OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = -k^2$, so bleibt eine Gleichung stehen, die sich schreiben läßt als

$$\frac{A_1 B}{AB} \cdot \frac{AC}{A_1 C} = \frac{AB_1}{A_1 B_1} \cdot \frac{A_1 C_1}{AC_1},$$

d. h.: Die Doppelverhältnisse $(A_1 ABC)$ und $(AA_1 B_1 C_1)$ sind einander gleich.

Folglich: Stehen drei Punktpaare in Involution, bildet man aus vier beliebigen der Punkte ein Doppelverhältnis und das entsprechende Doppelverhältnis der zugeordneten Punkte, so sind beide Doppelverhältnisse gleich, sobald in der Gleichung alle drei Punktpaare vorkommen.

Doppelverhältnisse wie $(A A_1 B B_1)$ und das zugeordnete $(A_1 A B_1 B)$ sind auszuschließen, da sie nur zwei Punktpaare enthalten, deren Anordnung willkürlich sein darf, so daß von Gleichheit der Doppelverhältnisse nicht gesprochen werden kann.

Ganz ebenso wird der Beweis für die hyperbolische Punktreihe geführt.

17) [Es war

1) $\frac{A_1 B}{AB} \cdot \frac{AC}{A_1 C} = \frac{AB_1}{A_1 B_1} \cdot \frac{A_1 C_1}{AC_1}$ oder $(A_1 ABC) = (AA_1 B_1 C_1)$.

Durch cyklische Vertauschung folgt daraus (ebenso durch die nach Seite 28 gestattete Vertauschung von A und A_1 mit B und B_1 in den Doppelverhältnissen)

2) $\frac{B_1 C}{BC} \cdot \frac{BA}{B_1 A} = \frac{BC_1}{B_1 C_1} \cdot \frac{B_1 A_1}{BA_1}$ oder $(B_1 BCA) = (BB_1 C_1 A_1)$

und ebenso

3) $\frac{C_1 A}{CA} \cdot \frac{CB}{C_1 B} = \frac{CA_1}{C_1 A_1} \cdot \frac{C_1 B_1}{CA_1}$ oder $(C_1 CAB) = (CC_1 A_1 B_1)$.

Durch Multiplikation folgt aus 1), 2) und 3) eine Gleichung, die sich durch Heben der gleichen Stücke schließlich auf

4) $$AB \cdot A_1 C \cdot B_1 C = A_1 B_1 \cdot AC_1 \cdot BC$$

zurückführen läßt. Durch Vertauschung von A und A_1 bezw. B und B_1 oder C und C_1 folgt der Reihe nach

5) $$A_1 B \cdot AC \cdot B_1 C_1 = AB_1 \cdot A_1 C_1 \cdot BC,$$

6) $$AB_1 \cdot A_1 C \cdot BC_1 = A_1 B \cdot AC_1 \cdot B_1 C,$$

7) $$AB \cdot A_1 C_1 \cdot B_1 C = A_1 B_1 \cdot AC \cdot BC_1.$$

Die genannten Vertauschungen sind gestattet, weil im Punktsystem A dieselbe Rolle spielt, wie A_1, ebenso B wie B_1 und C wie C_1. Diese sieben Gleichungen sind von Désargues aufgestellt. Die Vertauschbarkeit der konjugierten Punkte ohne Änderung des Doppelverhältniswertes wird der Grund zur Bezeichnung Involution gewesen sein.]

18) **Umkehrung.** Liegen drei Punktpaare A, A_1, B, B_1, C, C_1 so, daß eines der oben genannten Doppelverhältnisse ungeändert bleibt, wenn man für jeden Punkt seinen zugeordneten setzt, so stehen die Punkte in Involution.

Beweis. Es sei

$$(A_1 A B C) = (A A_1 B_1 C_1).$$

Angenommen, die sechs Punkte ständen nicht in Involution, sondern an Stelle von C_1 würde X mit den übrigen eine Involution bilden, so würde sein

$$(A_1 A B C) = (A A_1 B_1 X),$$

folglich

$$(A A_1 B_1 X) = A A_1 B_1 C).$$

Da aber je drei Punkte der beiden letzten Doppelverhältnisse identisch sind, so müssen auch C und X zusammenfallen. Die gegebenen Punkte bilden also eine Involution. —

Da durch Projektion die Werte der Doppelverhältnisse nicht geändert werden, so bleibt dabei die Gleichung

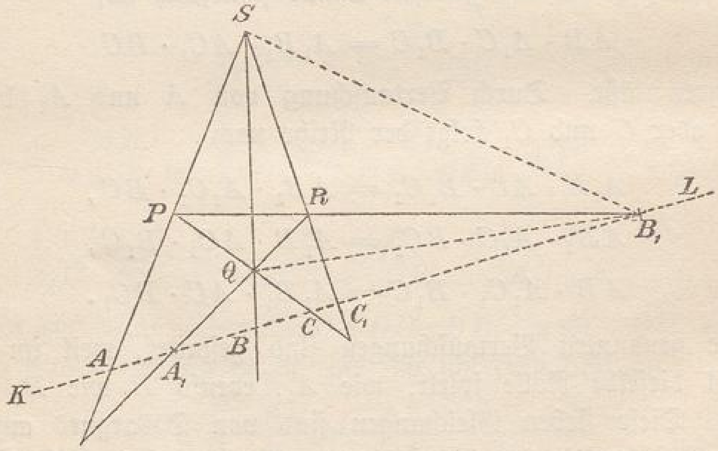
$$(A_1 A B C) = (A A_1 B_1 C_1)$$

mit allen zugehörigen Gleichungen ebenfalls erhalten. Folglich:

Projektion eines involutorischen Punktsystems giebt stets ein involutorisches Punktsystem.

Damit ist dieser Satz, der oben nur von den hyperbolischen Punktreihen bewiesen war, allgemein bewiesen.

Fig. 150.



19) **Satz.** Das vollständige Viereck wird von jeder beliebigen Geraden in einer Involution geschnitten, und

zwar sind die Schnittpunkte mit je zwei Gegenseiten zugeordnete Punkte.

Beweis. $PQRS$ sei das vollständige Viereck mit seinen Diagonalen, KL sei die schneidende Gerade, dann sind die Büschel $S(PQRB_1)$ und $Q(PSRB_1)$ perspektivisch, schneiden also die Transversale KL in perspektivischen Punkten, wobei die Doppelverhältnisse erhalten bleiben. Es ist also

$$(ABC_1B_1) = (CBA_1B_1),$$

da aber auf Grund zulässiger Vertauschung

$$(CBA_1B_1) = (A_1B_1CB)$$

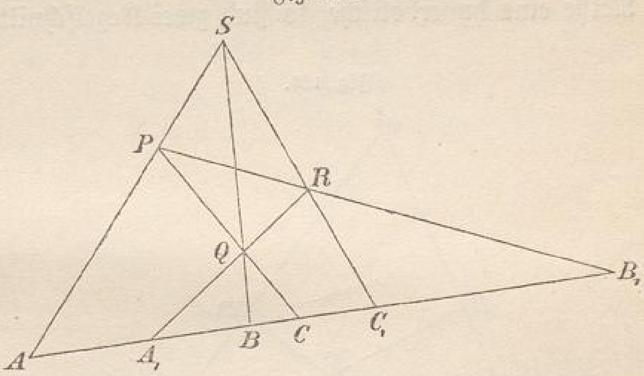
ist (vergl. Seite 28), so ist

$$(ABC_1B_1) = (A_1B_1CB).$$

Da in dem zweiten Doppelverhältnis die zugeordneten Punkte zu denen des ersten stehen, so stehen die sechs Schnittpunkte in Involution.

20) **Aufgabe.** Gegeben seien von einer Punktreihe zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 und ein beliebiger Punkt C_1. Der zugeordnete Punkt C zum letzteren soll ohne Hülfe des Zirkels konstruiert werden.

Fig. 151.



Auflösung. Man verbinde A_1, B_1 und C_1 mit einem beliebigen Punkte R der Ebene und nehme auf R_1C_1 einen beliebigen Punkt S an, den man mit A und B verbinde, was auf B_1R den Schnitt P und auf A_1R den Schnitt Q giebt. PQ giebt dann den gesuchten Punkt C.

21) **Satz von Désargues.** Ein Kegelschnitt und ein beliebiges Sehnenviereck desselben werden durch jede Gerade in Involution geschnitten.