Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

d) Nachträge über die Berechnung der Zahl π

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Geometrie und Flächenberechnung, für die Körperberechnungen und für die Mechanik mit diesen Reihenentwickelungen gewonnen ist.

Die überall vermerkten Einschränkungen aber deuten schon hinreichend an, daß damit erst die Vorhöfe einer höheren Wissenschaft betreten sind, in der die Theorie des Unendlichkleinen zum eigentlichen Austrage kommt und der Funktionsbegriff in seiner ganzen Tragweite sichtbar wird. Dies ist die Differential- und Integralrechnung, die Hand in Hand mit der allgemeinen Funktionentheorie ganz neue Bereiche des mathematischen Denkens erschlossen hat, die aber der Hochschule vorbehalten werden müssen.

36) Nachträge über die Berechnung der Zahl π.

Die Wichtigkeit der Zahl π für die niedere und höhere Mathematik hat es wünschenswert erscheinen lassen, schnell konvergierende Reihen für ihre Berechnung zu finden. Die Leibnitzsche Reihe war ganz unbrauchbar.

Durch Einsetzung von $x = \frac{\pi}{6}$ in die Reihe für $\operatorname{arc}\tan x$ fand man, da $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5} + \frac{1}{7(\sqrt{3})^7} + \cdots,$$

also

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \cdots\right],$$

womit es unter großem Zeitaufwand gelang, π auf etwa 100 Stellen genau zu berechnen. Besser ist schon die Eulersche Reihenentwickelung mit Hülfe der Formel

$$4)\qquad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arc}\tan\frac{1}{2} + \operatorname{arc}\tan\frac{1}{3} \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Die Formel 4) ist folgendermaßen entstanden. Euler wollte statt $\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ einen kleineren Wert haben, setzte daher in $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, woraus sich $\tan\beta = \frac{1}{3}$ ergiebt.

Auf demselben Grundgedanken fußend kann man noch weit schneller konvergierende Reihen finden. So ist z. B. folgender Gang eingeschlagen worden.

In $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$ setzt man willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, so daß sich ergiebt $\tan\beta = \frac{2}{3}$, also

a) $$\operatorname{arc}\tan 1 = \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{5} + \operatorname{arc}\tan\tfrac{2}{3}.$$

Um das ungünstige $\operatorname{arc}\tan\frac{2}{3}$ zu entfernen, setzt man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2}{3}$ $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ ein, woraus $\tan\beta = \frac{7}{17}$ folgt. Man erhält so

b) $$\operatorname{arc}\tan\tfrac{2}{3} = \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{4} + \operatorname{arc}\tan\tfrac{7}{17}.$$

Um das ungünstige $\frac{7}{17}$ zu entfernen, setzt man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{7}{17}$ wiederum $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, was $\tan\beta = \frac{9}{46}$ giebt. Es wird

c) $$\operatorname{arc}\tan\tfrac{7}{17} = \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{5} + \operatorname{arc}\tan\tfrac{9}{46}.$$

Einsetzung von $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{9}{46}$ giebt schließlich $\tan\beta = -\frac{1}{239}$ und

d) $$\operatorname{arc}\tan\tfrac{9}{46} = \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{5} - \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{239}.$$

Bei Summierung der Gleichungen a) bis d) hebt sich alles weg, bis auf die Clausensche Formel

5) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\tan 1 = 4\operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{5} - \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{239},$$

die schon recht brauchbare Reihen giebt.

Um noch Brauchbareres zu erhalten, setzte man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{5}$ ein $\tan\alpha = \frac{1}{10}$, was $\tan\beta = \frac{5}{51}$ giebt, bildete also

e) $$\operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{5} = \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{10} + \operatorname{arc}\tan\tfrac{5}{51},$$

setzte in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{5}{51}$ wiederum $\tan\alpha = \frac{1}{10}$, was $\tan\beta = -\frac{1}{515}$ ergab, also

f) $$\operatorname{arc}\tan\tfrac{5}{51} = \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{10} - \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{515}.$$

Erweitert man die Gleichungen e) und f) mit dem Faktor 4 und addiert man die rechten und ebenso die linken Seiten der neuen Gleichungen und der Formel 5), so entsteht schließlich die Meißelsche Formel:

6) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\tan 1 = 8\operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{10} - \operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{239} - 4\operatorname{arc}\tan\tfrac{1}{515}.$$

Nur eine geringe Anzahl der Glieder von den Reihen für die genannten arc tan ist nötig, um mit 12 Stellen Genauigkeit

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,59\ldots$$

zu geben.

Selbstverständlich kann man die Konvergenz noch weiter treiben. Entsprechende oder dieselben Formeln erhielt Schellbach durch Nachweis gewisser Identitäten, z. B.

$$e^{2i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{2+i}{2-i} \cdot \frac{3+i}{3-i} = \frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} \cdot \frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}},$$

woraus folgt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i} \lg \left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} \cdot \frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}} \right) = \frac{1}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} + \frac{1}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}},$$

was der Gleichung 4) entspricht.

Ebenso ist

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{3+i}{3-i} \cdot \frac{7+i}{7-i}, \quad \text{also} \quad \frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{3+i}{3-i}\right)^2 \left(\frac{7+i}{7-i}\right),$$

folglich gilt die Vegasche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{i} \lg \frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}} + \frac{1}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{7}}{1-\frac{i}{7}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} - \frac{1}{7\cdot 7^7} + \cdots\right).$$

Ähnlich ist $(5 \pm i)^4 = 4\,(119 \pm 120\,i)$, folglich

$$\left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 = \frac{119+120\,i}{119-120\,i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{239+i}{239-i}.$$

So findet man wieder die Clausensche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{5}}{1-\frac{i}{5}} - \frac{1}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{239}}{1-\frac{i}{239}}.$$

Um auch die Meißelsche Formel zu finden, zeige man, daß $(10 \pm i)^2 = (99 \pm 20\,i)$, also

$$\left(\frac{10+i}{10-i}\right)^2 = \frac{99+20\,i}{99-20\,i} = \frac{5+i}{5-i} \cdot \frac{515+i}{515-i}$$

ist, folglich

$$\frac{5+i}{5-i} = \left(\frac{10+i}{10-i}\right)^2 : \frac{515+i}{515-i}$$

und

$$\frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{10+i}{10-i}\right)^8 : \left[\frac{239+i}{239-i} \cdot \left(\frac{515+i}{515-i}\right)^4\right].$$

So ergiebt sich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{10}}{1-\frac{i}{10}} - \frac{1}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{239}}{1-\frac{i}{239}} - \frac{4}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{515}}{1-\frac{i}{515}}.$$

VII. Zusammenstellung der wichtigsten Resultate.

1) Die ganzen rationalen Funktionen n^{ten} Grades $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind identisch, wenn sie für $(n+1)$ Werte des Arguments übereinstimmen.

2) Für $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{ax_1}{1} + \frac{bx_1{}^2}{2} + \frac{cx_1{}^3}{3} + \frac{dx_1{}^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1{}^{n+1}}{n+1},$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{a(x_2 - x_1)}{1} + \frac{b(x_2{}^2 - x_1{}^2)}{2} + \frac{c(x_2{}^3 + x_1{}^3)}{3} + \cdots + \frac{k(x_2{}^{n+1} - x_1{}^{n+1})}{n+1},$$

und an jeder Stelle x ist die Neigung der Tangente

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1}.$$

3) Für $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ ist

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2 - x_1}{6}[y_1 + 4y_m + y_2],$$

wo y_m zur Stelle $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ gehört. (Simpson-Regel.)

4) Zur angenäherten Berechnung von Diagrammen dient $\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} =$

$$\frac{x_n - x_0}{6 \cdot \frac{n}{2}}[(h_0 + h_n) + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \cdots + h_{n-2}) + 4(h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{n-1})].$$

5) Für die gleichseitige Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = {}^e\!\lg x_1, \quad \overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = {}^e\!\lg \frac{x_2}{x_1}.$$