Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

c) Anwendung auf die Gravitation

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

So ist z. B.

$$\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4},$$

Dagegen

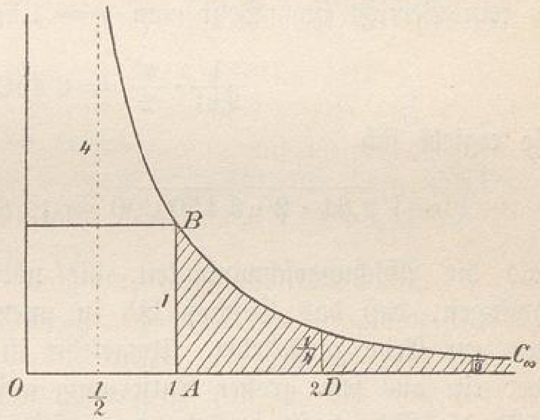
$$\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}} = \frac{1^{-\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}+\cdots+n^{-\frac{1}{3}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

29) Anwendung auf die Gravitation.

Von besonderer Wichtigkeit ist geometrisch der Fall $p = -2$, denn nach Teil II Geom. Nr. 104 ist $y = x^{-2}$ die Gleichung der Gravitationskurve. Das Diagramm ABC_∞ giebt das Potential für den Punkt A an, wenn in O der anziehende Körper steht.

Fig. 145.



Ist O der Erdmittelpunkt, OA der Erdradius, und wiegt ein Körper an der Oberfläche in A 1 kg, wieviel Arbeit ist dann nötig, ihn in die Entfernungen 2, 3, 4, ... ∞ zu bringen?

Auflösung.

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = \frac{2^{-1}-1}{-2+1} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2-1} = \frac{1}{2}$$

giebt die Hälfte des Quadrates. Letzteres bedeutet die Arbeit, die zur Überwindung eines Widerstandes von 1 kg längs des Weges $860 \cdot 7500$ m (Erdradius) nötig ist. Also ist zum Entfernen des Körpers bis zur Stelle D die Arbeit $\frac{1}{2} \cdot 860 \cdot 7500 = 3\,225\,000$ mkg nötig.

Ebenso ist

$$\overset{3}{\underset{1}{F}} = \frac{3^{-1}-1}{-2+1} = \frac{\frac{1}{3}-1}{-1} = \frac{2}{3} \text{ des Quadrates.}$$

$$\overset{4}{\underset{1}{F}} = \frac{4^{-1}-1}{-2+1} = \frac{\frac{1}{4}-1}{-1} = \frac{3}{4} \text{ des Quadrates.}$$

Dies bedeutet 4 300 000 mkg bezw. 4 837 500 mkg Arbeit.

Endlich ist

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{-1}{-2+1} = 1,$$

d. h. gleich der Quadratfläche selbst. Das Fortschaffen des Körpers bis in unendliche Entfernung verlangt also 6 450 000 mkg Arbeit. (Potential der Anziehung zwischen Erd- und Kilogrammasse für die Erdoberfläche.)

Nun hat aber ein mit der Geschwindigkeit v fortgeschleuderter Körper die Arbeitswucht (lebendige Kraft) $m \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{q}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{2}$, wenn q sein Gewicht ist. Setzt man $q = 1$ kg:

$$\frac{1}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{2} = 6\,450\,000,$$

so ergiebt sich

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 2 \cdot 6\,450\,000} = 11\,249 \text{ m} = \sim 1\tfrac{1}{2} \text{ Meile}$$

als die Abschußgeschwindigkeit, die nötig sein würde, um zu erzwingen, daß das Geschoß bis in unendliche Entfernung geht und nie zur Erde zurückkehrt. Umgekehrt ist es die Geschwindigkeit, mit der ein aus sehr großer Entfernung auf die Erde fallender Meteorstein die Erde treffen würde, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit Null war. Division durch 425 würde die Anzahl von Calorien geben, die dabei höchstens entwickelt werden können, nämlich 15 177. Ähnliche Aufgaben lassen sich für den Sonnenkörper lösen*).

Durch die Betrachtung der Kurven $y = x^{-2}$ wird also der Einblick in kosmologische und astronomische Verhältnisse gewonnen, der zum Verständnis wichtiger Forschungsresultate der neueren Zeit führt.

---

*) Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gr} = 86{,}41$ Meilen; Anzahl der Calorien für jedes kg fallender Masse 49 412 000. Ist also die Sonne durch allmählichen Zusammensturz kosmischer Massen entstanden, so erscheint ihr hoher Wärmegrad trotz der Ausstrahlung als etwas ganz Natürliches.