Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

a) Rückblick auf die bereits bekannten Reihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Auflösung. Man denke sich den Cylinderkolben von 1 qm Querschnitt und 1 m Gesamthub. Die obige Formel giebt dann die theoretische Leistungsfähigkeit von 95,5 Pferdestärken, $151\frac{1}{3}$ Pferdestärken, 191 Pferdestärken für die treibende Maschine.

---

13) Bemerkung über rationale gebrochene Funktionen. Gewisse rationale gebrochene Funktionen lassen sich auf ganze rationale zurückführen, z. B.

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

Diese können also nach Abschnitt I behandelt werden. So ist z. B. nach der Summenformel für die Kurve $y = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^n}{n} + \frac{x_1^{n-1}}{n-1} + \frac{x_1^{n-2}}{n-2} + \cdots + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{1}.$$

Bei anderen aber geht die Division nicht auf, z. B. bei

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Darf man das Restglied für $n = \infty$ vernachlässigen, so hat man eine konvergente unendliche Reihe, mit deren Gliedern vermutlich ebenso verfahren werden darf, wie mit einer ganzen rationalen Funktion. Diese Berechtigung ist genau zu untersuchen. Hat aber das Restglied nicht die Grenze 0, so ist die unendliche Reihe unbrauchbar.

Um also einen Fortschritt zu ermöglichen, hat man die Theorie der unendlichen Reihen aufzustellen. Dies soll im folgenden Abschnitte angebahnt werden.

III. Allgemeines über die unendlichen Reihen.

a) Rückblick auf die bereits bekannten Reihen.

14) In Folgendem soll unter „Reihe" im Allgemeinen eine „unendliche Reihe" verstanden werden.

In Teil II wurden folgende Reihen summiert:

1) Die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \text{ jedoch nur für } -1 < x < +1.$$

2) Die Exponential-Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x, \text{ für jedes beliebige } x.$$

3) Die Sinus-Reihe

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sin x, \text{ für jeden beliebigen Bogen } x.$$

4) Die Cosinus-Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x, \text{ für jeden beliebigen Bogen } x.$$

5) Die Reihe der potenzierten Zahlen:

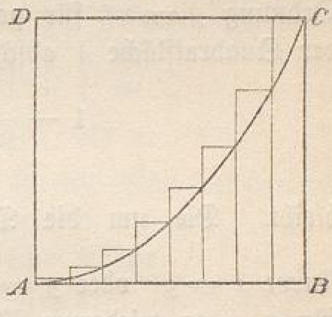
$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{m=1}^{m=n=\infty} m^p = \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

für $n = \infty$ und zunächst nur für ganzes positives p.

15) Die Frage, ob die letztgenannte Reihe auch für gebrochenes p eine Summe hat, kann vorläufig nur teilweise auf geometrischem Wege untersucht werden.

Figur 137 stellt ein Quadrat von der Seite 1 mit der einbeschriebenen Parabel $y = x^2$ dar. Die Basis ist in n gleiche Teile eingeteilt, und die zu Rechtecken vervollständigten Streifen haben die Inhaltssumme

Fig. 137.



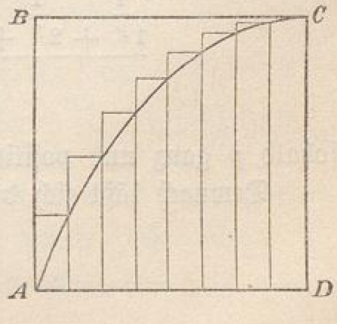
$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2,$$

oder, für $n = \infty$,

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Da für $n = \infty$ die Treppenräume wegfallen, so ist das Quadrat durch die Parabel in die Flächenräume $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ eingeteilt.

Fig. 138.



Klappt man die Figur um die Diagonale AC, wodurch x und y vertauscht werden, so hat man die Parabel $x = y^2$ oder $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ mit horizontaler Achse.

Teilt man die Basis wieder in n gleiche Teile ein, so haben die entsprechenden Ordinaten der Reihe nach die Längen

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \ldots,\quad \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

die Inhaltssumme der zu Rechtecken ergänzten Streifen ist

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$\frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+1}}.$$

Für $n = \infty$ fallen die übergreifenden Treppenräume weg, und die schraffierte Fläche wird nach Obigem gleich $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}$. Folglich:

Für $n = \infty$ ist

$$\frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}.$$

In derselben Weise zeigt man, daß die Parabel höherer Ordnung $y = x^p$ für ganzes positives p den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil von der Quadratfläche 1 abschneidet, so daß der Rest

$$1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1}$$

bleibt. Die um die Diagonale AC geklappte Figur giebt die Kurve $x = y^p$ oder $y = x^{\frac{1}{p}}$. Die neue Streifeneinteilung zeigt, daß für $n = \infty$ wiederum ist

$$\frac{1^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} + 3^{\frac{1}{p}} + \cdots + n^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1},$$

sobald p ganz und positiv ist.

Demnach läßt sich die Formel

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{p+1}}{p+1}$$

auch dann auf die Kurve $y = x^p$ anwenden, wenn $p = \frac{1}{m}$ und m eine ganze Zahl ist. So ist z. B. für die Kurve $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4} x_1^{\frac{4}{3}}.$$

Schon darin liegt eine bedeutende Erweiterung.

Später aber soll gezeigt werden, daß die wichtige Formel 5 und damit auch die Flächenformel für beliebige Exponenten richtig bleibt, sobald diese nur größer als -1 sind.

b) Einiges über Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen mit lauter positiven Gliedern.

16) Nach Obigem giebt es Reihen, die für jeden beliebigen Wert der maßgebenden Größe x konvergent sind, wie z. B. die Exponentialreihe. Andere sind nur innerhalb gewisser Grenzen konvergent, wie z. B. die geometrische Reihe, andere stets divergent.

a) Eine Reihe ist divergent, sobald ihre Glieder zunehmen, oder gleich groß bleiben, oder wenn diese, obwohl sie abnehmen, stets über einer endlichen Größe bleiben.

So ist z. B. die Reihe

$$2 + \left(1\tfrac{1}{2}\right) + \left(1\tfrac{1}{4}\right) + \left(1\tfrac{1}{8}\right) + \left(1\tfrac{1}{16}\right) + \left(1\tfrac{1}{32}\right) + \cdots$$

divergent, weil die Glieder stets größer bleiben, als 1.

b) Selbst wenn die Glieder sich der Grenze Null unbegrenzt nähern, braucht die Reihe nicht konvergent zu sein.

So ist z. B. die sogenannte harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \cdots$$

divergent, was man an folgender Gruppierung erkennt:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right)$$
$$+ \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right) + \cdots$$

Hier hat jede Gruppe doppelt so viele Glieder, wie die vorhergehende. Die erste Klammer ist größer als $2 \cdot \frac{1}{4}$, die zweite größer als $4 \cdot \frac{1}{8}$, die folgende größer als $8 \cdot \frac{1}{16}$ u. s. w., jede Klammer also größer