Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

III. Allgemeines über die unendlichen Reihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Auflösung. Man denke sich den Cylinderkolben von 1 qm Querschnitt und 1 m Gesamthub. Die obige Formel giebt dann die theoretische Leistungsfähigkeit von 95,5 Pferdestärken, $151\frac{1}{3}$ Pferdestärken, 191 Pferdestärken für die treibende Maschine.

---

13) Bemerkung über rationale gebrochene Funktionen. Gewisse rationale gebrochene Funktionen lassen sich auf ganze rationale zurückführen, z. B.

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

Diese können also nach Abschnitt I behandelt werden. So ist z. B. nach der Summenformel für die Kurve $y = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^n}{n} + \frac{x_1^{n-1}}{n-1} + \frac{x_1^{n-2}}{n-2} + \cdots + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{1}.$$

Bei anderen aber geht die Division nicht auf, z. B. bei

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Darf man das Restglied für $n = \infty$ vernachlässigen, so hat man eine konvergente unendliche Reihe, mit deren Gliedern vermutlich ebenso verfahren werden darf, wie mit einer ganzen rationalen Funktion. Diese Berechtigung ist genau zu untersuchen. Hat aber das Restglied nicht die Grenze 0, so ist die unendliche Reihe unbrauchbar.

Um also einen Fortschritt zu ermöglichen, hat man die Theorie der unendlichen Reihen aufzustellen. Dies soll im folgenden Abschnitte angebahnt werden.

III. Allgemeines über die unendlichen Reihen.

a) Rückblick auf die bereits bekannten Reihen.

14) In Folgendem soll unter „Reihe" im Allgemeinen eine „unendliche Reihe" verstanden werden.

In Teil II wurden folgende Reihen summiert:

1) Die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x},\text{ jedoch nur für } -1 < x < +1.$$

2) Die Exponential-Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x, \text{ für jedes beliebige } x.$$

3) Die Sinus-Reihe

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sin x, \text{ für jeden beliebigen Bogen } x.$$

4) Die Cosinus-Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x, \text{ für jeden beliebigen Bogen } x.$$

5) Die Reihe der potenzierten Zahlen:

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{m=1}^{m=n=\infty} m^p = \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

für $n = \infty$ und zunächst nur für ganzes positives p.

15) Die Frage, ob die letztgenannte Reihe auch für gebrochenes p eine Summe hat, kann vorläufig nur teilweise auf geometrischem Wege untersucht werden.

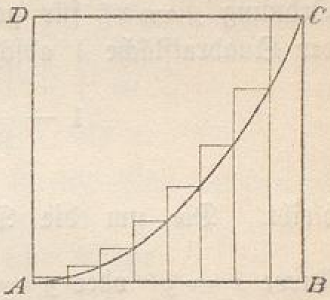
Figur 137 stellt ein Quadrat von der Seite 1 mit der einbeschriebenen Parabel $y = x^2$ dar. Die Basis ist in n gleiche Teile eingeteilt, und die zu Rechtecken vervollständigten Streifen haben die Inhaltsumme

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2,$$

oder, für $n = \infty$,

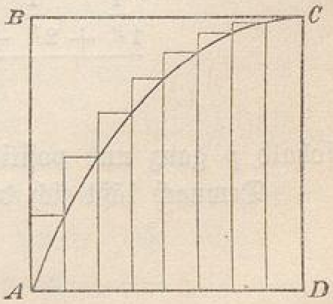
$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Fig. 137.



Da für $n = \infty$ die Treppenräume wegfallen, so ist das Quadrat durch die Parabel in die Flächenräume $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ eingeteilt.

Fig. 138.



Klappt man die Figur um die Diagonale AC, wodurch x und y vertauscht werden, so hat man die Parabel $x = y^2$ oder $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ mit horizontaler Achse.

Teilt man die Basis wieder in n gleiche Teile ein, so haben die entsprechenden Ordinaten der Reihe nach die Längen

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

die Inhaltssumme der zu Rechtecken ergänzten Streifen ist

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$\frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+1}}.$$

Für $n = \infty$ fallen die übergreifenden Treppenräume weg, und die schraffierte Fläche wird nach Obigem gleich $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}$. Folglich:

Für $n = \infty$ ist

$$\frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}.$$

In derselben Weise zeigt man, daß die Parabel höherer Ordnung $y = x^p$ für ganzes positives p den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil von der Quadratfläche 1 abschneidet, so daß der Rest

$$1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1}$$

bleibt. Die um die Diagonale AC geklappte Figur giebt die Kurve $x = y^p$ oder $y = x^{\frac{1}{p}}$. Die neue Streifeneinteilung zeigt, daß für $n = \infty$ wiederum ist

$$\frac{1^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} + 3^{\frac{1}{p}} + \cdots + n^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1},$$

sobald p ganz und positiv ist.

Demnach läßt sich die Formel

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{p+1}}{p+1}$$

auch dann auf die Kurve $y = x^p$ anwenden, wenn $p = \frac{1}{m}$ und m eine ganze Zahl ist. So ist z. B. für die Kurve $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4}\, x_1^{\frac{4}{3}}.$$

Schon darin liegt eine bedeutende Erweiterung.

Später aber soll gezeigt werden, daß die wichtige Formel 5 und damit auch die Flächenformel für beliebige Exponenten richtig bleibt, sobald diese nur größer als -1 sind.

b) Einiges über Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen mit lauter positiven Gliedern.

16) Nach Obigem giebt es Reihen, die für jeden beliebigen Wert der maßgebenden Größe x konvergent sind, wie z. B. die Exponentialreihe. Andere sind nur innerhalb gewisser Grenzen konvergent, wie z. B. die geometrische Reihe, andere stets divergent.

a) Eine Reihe ist divergent, sobald ihre Glieder zunehmen, oder gleich groß bleiben, oder wenn diese, obwohl sie abnehmen, stets über einer endlichen Größe bleiben.

So ist z. B. die Reihe

$$2 + \left(1\tfrac{1}{2}\right) + \left(1\tfrac{1}{4}\right) + \left(1\tfrac{1}{8}\right) + \left(1\tfrac{1}{16}\right) + \left(1\tfrac{1}{32}\right) + \cdots$$

divergent, weil die Glieder stets größer bleiben, als 1.

b) Selbst wenn die Glieder sich der Grenze Null unbegrenzt nähern, braucht die Reihe nicht konvergent zu sein.

So ist z. B. die sogenannte harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \cdots$$

divergent, was man an folgender Gruppierung erkennt:

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right) + \cdots \end{aligned}$$

Hier hat jede Gruppe doppelt so viele Glieder, wie die vorhergehende. Die erste Klammer ist größer als $2 \cdot \frac{1}{4}$, die zweite größer als $4 \cdot \frac{1}{8}$, die folgende größer als $8 \cdot \frac{1}{16}$ u. s. w., jede Klammer also größer als $\frac{1}{2}$. Weil in der neuen Reihe jedes Glied größer als $\frac{1}{2}$ ist, muß sie divergieren.

Wie weit man also die harmonische Reihe auch summiere, stets bleibt der Rest größer als 1 oder eine andere endliche Zahl.

c) Diese Betrachtung führt auf folgendes Kriterium der Konvergenz: Eine Reihe konvergiert, wenn man den Rest, der nach der Summierung der n ersten Glieder übrig bleibt, dadurch beliebig klein machen kann, daß man n größer und größer macht.

Die Reihe zerfällt dann in zwei Teile, $s = s_n + r_n$, wo s_n die endliche Summe der n ersten Glieder, r_n die der Restglieder bezeichnet. Man nennt s_n das summatorische Glied, r_n das Restglied. Letzteres strebt der Grenze Null zu, ersteres einer bestimmten Grenze s, die mit der Summe der Reihe identisch ist.

Das Entscheidende für die Konvergenz ist also nicht die Abnahme der einzelnen Glieder bis zu unendlicher Kleinheit, sondern die Abnahme der gesamten Restsumme bis zu unendlicher Kleinheit, d. h. bis zur Null.

d) Ein zweites Kriterium beruht auf dem Prinzip der Reihenvergleichung, z. B. an dem Vergleich mit der geometrischen Reihe. Ist in einer unendlichen Reihe von einer bestimmten Stelle an jedes Glied kleiner, als das entsprechende einer konvergenten Reihe, so ist auch die erstere Reihe konvergent.

Weil nämlich der Rest der Hülfsreihe der Grenze Null zustrebt, so kann der Rest der andern Reihe keiner größeren Grenze zustreben.

e) Mit Hülfe der geometrischen Reihe ergiebt sich ein neues Kriterium. Bleibt der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliedes von einer bestimmten Stelle ab angebbar kleiner als 1, so ist die Reihe konvergent.

Bleibt z. B. von einer bestimmten Stelle ab $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0{,}999$, so konvergiert die Reihe von dort ab in höherem Grade, als die geometrische Reihe

$$a_n + 0{,}999\, a_n + 0{,}999^2\, a_n + 0{,}999^3\, a_n + 0{,}999^4\, a_n + \cdots$$
$$= \frac{a_n}{1 - 0{,}999} = 1000\, a_n,$$

bei der $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ stets gleich 0,999 ist. Die Glieder der zu untersuchenden Reihe sind eben von der betreffenden Stelle ab kleiner, als die der geometrischen Hülfsreihe. — Die harmonische Reihe ist nicht konvergent, denn bei ihr ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ für $n = \infty$ gleich 1, also nicht angebbar kleiner als 1.

f) Die genannten Kriterien sind durchaus nicht ausreichend zur wissenschaftlichen Begründung der Reihenlehre, sondern nur für das auf der höheren Schule zu behandelnde Gebiet derselben. Denn erstens bleibt in der Regel der Grenzfall selbst zweifelhaft; eine Reihe kann z. B. für $x < 1$ konvergent und für $x > 1$ divergent sein. Dann ist noch eine besondere Untersuchung des Falles $x = 1$ nötig, für den entweder das eine, oder das andere eintritt, oder etwa der Zweifel bestehen bleiben kann. Zweitens könnte es Reihen geben, die konvergent sind, obwohl die obigen Kriterien an ihnen nicht erkennbar sind. So ist z. B. nach Euler

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

obwohl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$ für $n = \infty$ der Grenze 1 zustrebt.

Es handelt sich also um eine Reihe, bei der $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ schließlich nicht mehr angebbar kleiner ist, als 1, und die trotzdem konvergiert.

Ebenso ist $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. Die Beweise für diese Summierungen gehen über den Bereich der Schule hinaus. Es handelt sich hier nur um Beispiele für die schwierigeren Fälle.

g) Ist eine Reihe als konvergent nachgewiesen, so kann man jedes ihrer Glieder mit einer konstanten Größe k multiplizieren, ohne daß die Konvergenz verloren geht. Die neue Summe ist ks, wenn s die Summe der ursprünglichen Reihe ist.

Multipliziert man jedes der Glieder mit einer beliebigen positiven Zahl, bleiben aber die verschiedenen Faktoren kleiner als eine endliche Zahl k, so bleibt die Reihe konvergent, und ihre Summe ist kleiner als ks.

So ergiebt z. B. die Multiplikation des endlosen Dezimalbruchs

$$0{,}1111111 \cdots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = \frac{1}{9}$$

mit 5 den endlosen Dezimalbruch

$$0{,}5555555\cdots = \tfrac{5}{10} + \tfrac{5}{100} + \tfrac{5}{1000} + \cdots = \tfrac{5}{9},$$

also das 5-fache.

Dagegen giebt die Multiplikation der einzelnen Glieder mit ganz beliebigen einstelligen Zahlen (die sämtlich nicht größer als 9 werden) einen im allgemeinen irrationalen Dezimalbruch, dessen Summe endlich und kleiner ist als der 9-fache Bruch, oder als der Bruch, den man erhält, wenn man die Stelle, bei der man abbricht, um 1 erhöht. So ist z. B.

$$3\cdot 1 + 1\cdot\tfrac{1}{10} + 4\cdot\tfrac{1}{100} + 1\cdot\tfrac{1}{1000} + 5\cdot\tfrac{1}{10\,000} + 9\cdot\tfrac{1}{100\,000} + \cdots$$
$$= \pi = 3{,}14159\ldots < 3{,}14160.$$

17) Für eine konvergente Reihe sei die Summe

$$s = s_n + r_n,$$

wo s_n das summatorische Glied (die Summe der n ersten Glieder), r_n die Restsumme bezeichnet. Für eine zweite sei ebenso

$$\sigma = \sigma_n + \varrho_n.$$

Addition beider Reihen giebt

$$s + \sigma = s_n + \sigma_n + (r_n + \varrho_n).$$

Weil nun sowohl r_n als auch ϱ_n für $n = \infty$ der Grenze Null zustreben, so folgt, daß die durch Summierung entstandene Reihe ebenfalls konvergent ist, und daß ihre Summe gleich der Summe der beiden ursprünglichen Reihen ist.

Dasselbe gilt von der Subtraktion.

Durch Multiplikation der einzelnen Glieder beider Reihen erhält man

$$(s_n + r_n)(\sigma_n + \varrho_n) = s_n\sigma_n + r_n s_n + \varrho_n s_n + r_n\varrho_n.$$

Weil s_n endlich ist, r_n aber mit wachsenden n der Null zustrebt, so kann für $n = \infty$ $r_n s_n$ gestrichen werden. Dasselbe gilt von $\varrho_n s_n$. Endlich kann $r_n\varrho_n$ gestrichen werden, weil beide Faktoren der Null zustreben. Demnach ist die durch Multiplikation entstandene Reihe konvergent und ihre Summe ist gleich dem Produkte der Summen der beiden ursprünglichen Reihen.

Durch Division erhält man

$$\frac{s_n + r_n}{\sigma_n + \varrho_n} = \frac{\dfrac{s_n}{\sigma_n} + \dfrac{r_n}{\sigma_n}}{\dfrac{\sigma_n}{\sigma_n} + \dfrac{\varrho_n}{\sigma_n}}.$$

Wenn r_n und ϱ_n der Null zustreben, σ_n aber endlich ist, so kann man $\frac{r_n}{\sigma_n}$ und $\frac{\varrho_n}{\sigma_n}$ für $n = \infty$ streichen. Da ferner $\frac{\sigma_n}{\sigma_n} = 1$ ist, so bleibt rechts stehen $\frac{s_n}{\sigma_n}$.

Also: Mit konvergenten Reihen, die nur positive Glieder haben, kann man die Addition und Subtraktion, die Multiplikation und Division, folglich auch die Potenzierung und die Radicierung ebenso vornehmen, wie mit gewöhnlichen Zahlen. Die neuen Reihen sind stets konvergent und ihre Summe ist bekannt, wenn sie für die gegebenen bekannt war. Dasselbe gilt von allen Rechnungsarten, die aus den genannten sich ableiten lassen.

c) Einiges über Reihen, die auch negative Glieder enthalten.

18) a) Eine Reihe mit unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Gliedern ist unbedingt konvergent, wenn die positiven für sich eine konvergente Reihe bilden und die absoluten Beträge der negativen dasselbe thun. Denn man darf dann beide Hülfsreihen durch Subtraktion mit einander verbinden.

b) Sie ist ferner unbedingt konvergent, wenn die Summe der absoluten Beträge beliebig vieler Restglieder dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß man die Anzahl n der summierten Glieder (die s_n geben) groß genug macht.

c) Sie ist ferner unbedingt konvergent, wenn die Reihe der absoluten Beträge sämtlicher Glieder eine konvergente Reihe bildet.

d) Sie ist endlich unbedingt konvergent, wenn der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ von einem gewissen Gliede ab angebbar kleiner ist, als 1.

Die Beweise beruhen auf der Vergleichung mit den vorher behandelten Reihen.

e) Hat die Reihe abwechselnde Vorzeichen, so reicht es für die Konvergenz vorläufig aus, daß die Glieder zu unendlicher Kleinheit abnehmen. (Konvergente oscillierende Reihen.)

So ist z. B. in der hier geschriebenen Reihenfolge

$$s = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots$$

eine konvergente Reihe.

Gruppiert man nämlich folgendermaßen:

$$1 - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) - \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}\right) - \left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9}\right) - \cdots,$$

so erhält man die Reihe

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{42} - \frac{1}{72} - \cdots,$$

in der man, wenn man abbricht, stets eine zu große Summe hat.

Gruppiert man dagegen in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

d. h.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \cdots,$$

so erhält man eine zu kleine Summe, wenn man irgendwo abbricht.

Die ursprüngliche Reihe wird also zwischen immer engere Grenzen eingeschnürt, je weiter man geht. Es fragt sich, ob sich die Grenzen unbegrenzt nähern.

s_{2n+1} ist zu groß, s_{2n} ist zu klein; da aber

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1},$$

so ist für unendlich großes n $s_{2n+1} = s_{2n}$, d. h. die obere und untere Grenze nähern sich demselben Werte.

Die zu großen Werte sind der Reihe nach

$$1, \quad 0{,}83333\ldots, \quad 0{,}783333\ldots, \quad \ldots$$

die zu kleinen

$$\frac{1}{2}, \quad 0{,}58333\ldots, \quad 0{,}616666\ldots, \quad \ldots$$

Die Reihe ist aber nicht unbedingt konvergent, **denn die Summe hängt durchaus von der Anordnung der Glieder ab.**

Gruppiert man nämlich folgendermaßen:

$$\sigma = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{7}\right) + \cdots,$$

so daß auf zwei positive Glieder stets nur ein negatives folgt, so enthält die Reihe allerdings dieselben Glieder, wie vorher. Geht man aber bis zum $2n^{\text{ten}}$ Gliede, so hat man im ersten Falle gleichviel positive, wie negative Glieder, im andern Falle aber doppelt so viel positive, als negative. Vorher war s der Grenzwert von

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right),$$

jetzt dagegen ist σ der Grenzwert von

$$\sigma_n = \left(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Die Differenz ist

$$\sigma_n - s_n$$

$$= \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right]^{*)}.$$

Für unendlich viele Glieder erhält man die Grenze

$$\sigma - s = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots\right] = \tfrac{1}{2}s.$$

Folglich ist

$$\sigma = \frac{3}{2}s.$$

Die Summe der Reihe hängt also wirklich von der Anordnung der Glieder ab. Deshalb sagt man, sie sei nicht unbedingt, sondern nur bedingt konvergent. Jeder Art gesetzmäßiger Anordnung entspricht eine besondere Summe.

19) Mit Reihen von nur bedingter Konvergenz muß man also ganz besonders vorsichtig sein. Die Vorsicht war bei dem Beispiele nötig, weil weder das Kriterium c), noch das Kriterium d) erfüllt war. ($\infty - \infty$ ist unbestimmt.)

Auch darauf sei aufmerksam gemacht, daß, wenn man die Glieder der betrachteten Reihe abwechselnd mit $+1$ und -1 multipliziert, die divergente harmonische Reihe entsteht. Dieselbe Operation würde eine unbedingt konvergente Reihe wiederum in eine unbedingt konvergente verwandeln. Hier aber geht die Konvergenz verloren. Man erkennt an dieser Stelle einen wichtigen Unterschied zwischen Reihen von endlicher und solchen von unendlicher Gliederzahl. Bei Reihen von endlicher Gliederzahl ist die Anordnung der Glieder gleichgültig; bei unendlichen Reihen ist sie nur gleichgültig für den Fall unbedingter Konvergenz, dagegen ist sie von Einfluß für den

*) Jede Einzelklammer ist in sich umgeformt worden, indem man ihre beiden letzten Glieder vereinigt hat.

Fall der nur bedingten Konvergenz. Von den für endliche Gliederzahl gültigen Gesetzen darf man also nicht ohne weiteres auf unendliche Reihen Anwendung machen.

Mit unbedingt konvergenten Reihen kann man sämtliche Rechnungsoperationen unbeirrt vornehmen; mit divergenten und nur bedingt konvergenten kann man aber nicht rechnen, wie mit geschlossenen Ausdrücken.

20) Nur noch einer besonderen Art von divergenten Reihen sei gedacht, der divergenten oscillierenden Reihen. Dies sind Reihen mit abwechselnden Vorzeichen, bei denen die Glieder entweder konstant sind, oder abnehmen, jedoch stets über einem bestimmten endlichen Werte bleiben. Solche Reihen sind z. B.

$$a + b - b + b - b + b - b + \cdots,$$

oder

$$4 - 3 + 2\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{4} + 2\tfrac{1}{8} - 2\tfrac{1}{16} + 2\tfrac{1}{32} - 2\tfrac{1}{64} + 2\tfrac{1}{128} + \cdots.$$

In der letzteren Reihe nähert sich die Schwankung immer mehr der Schwankung um ± 2. Die Summe ist also unbestimmt.

21) Reihen von der Form

$$s = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$$

bezeichnet man als Potenzreihen. Die konstanten Faktoren a, b, c, d, ... können willkürlich sein, oder nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen. (Von negativen und gebrochenen Exponenten soll jetzt abgesehen werden, obwohl auch $a + bx^{-1} + bx^{-2} + bx^{-3} + \cdots$ und $a + bx^{\frac{1}{2}} + bx^{\frac{3}{2}} + \cdots$ hierher gehören.)

Drei Hauptfälle sind möglich: 1) Divergenz für jeden Wert von x; 2) Konvergenz für Werte von x, die zwischen zwei Grenzen liegen; 3) Konvergenz für alle Werte von x.

Beispiel zu 1. Die Reihe

$$1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + 5!x^5 + \cdots$$

divergiert für jeden Wert von x, denn es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!x^n}{(n-1)!x^{n-1}} = nx.$$

Ist nun x auch noch so klein, das zunehmende n bewirkt schließlich, daß der absolute Wert von $n \cdot x > 1$ wird. Von da ab nehmen die Glieder der Reihe zu, und sie ist divergent.

Beispiel zu 2. Die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

konvergiert für $-1 < x < 1$.

Beispiel zu 3. Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

ist für jeden beliebigen Wert von x konvergent. Denn es ist von einem gewissen Gliede ab auch für noch so großes x der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n}$ absolut genommen kleiner als 1.

22) Sind nun z. B.

$$s = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$$
$$s_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + e_1 x^4 + \cdots$$

zwei konvergente Potenzreihen, und liegt x für **beide** Reihen innerhalb der Konvergenzgrenzen, so sind nach Obigem folgende Rechnungsoperationen und Gleichsetzungen gestattet:

$$s + s_1 = (a + a_1) + (b + b_1)x + (c + c_1)x^2 + (d + d_1)x^3 + \cdots,$$
$$s - s_1 = (a - a_1) + (b - b_1)x + (c - c_1)x^2 + (d - d_1)x^3 + \cdots,$$
$$s \cdot s_1 = aa_1 + (ab_1 + ba_1)x + (ac_1 + bb_1 + ca_1)x^2 + (ad_1 + bc_1 + cb_1 + da_1)x^3 + \cdots.$$

Ebenso folgt aus der rein mechanischen Ausrechnung mit Hülfe des gewöhnlichen Divisionsschemas

$$s : s_1 = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots) : (a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + \cdots)$$
$$= \frac{a}{a_1} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2} x + \frac{a_1(a_1 c - ac_1) - b_1(a_1 b - ab_1)}{a_1^3} x^2 + \cdots.$$

Ferner ist

$$s^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + (2ad + 2bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + \cdots.$$

Auch andere Potenzierungen und ebenso die Wurzelausziehungen sind gestattet. So ist z. B. das Rechnen mit endlosen irrationalen Dezimalbrüchen erlaubt.

Im folgenden Abschnitte soll eine Potenzreihe von besonderer Wichtigkeit behandelt werden.

Sind die Konffizienten a, b, c, d ... zum Teil imaginär oder komplex, so ändert dies an der Betrachtung nichts. Ist dagegen bei einer Reihe x komplex, so kann man den reellen und den imaginären Teil der Reihe für sich betrachten und für jeden die Konvergenz untersuchen. Statt dessen kann man aber auch untersuchen, für welchen absoluten Betrag von $x + yi$, d. h. für welches $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Reihe konvergent ist. Die Grenzwerte von z liegen, geometrisch dargestellt, auf einem um Null geschlagenen Kreise, der als der Konvergenzkreis bezeichnet wird. Genauere Untersuchungen über diese Dinge überschreiten das Ziel der Schule.

IV. Die Newtonsche Reihe und der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten.

23) Die Newtonsche Reihe und ihre Konvergenz.

In Teil II, Arithmetik Nr. 30, war für ganze, positive Exponenten n bewiesen worden, daß

$$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^n$$

ist, wobei die Reihe mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht.

Bildet man nun für ganz beliebiges p die sogenannte Newtonsche Reihe

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots,$$

so erstreckt sich diese im allgemeinen ins Unendliche, und es fragt sich, wann sie konvergent und wie groß dann ihre Summe ist.

Der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliedes ist

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}x^n : \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}x^{n-1}$$

oder

$$\frac{(p-n+1)}{n}x = -x + \frac{p+1}{n}x.$$

Für sehr großes n nähert sich dies dem Grenzwerte $-x$. Ist der absolute Betrag desselben angebbar kleiner als 1, so ist nach 18 d) die Reihe konvergent, ist er größer, so ist sie divergent. Der Zwischen-