Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

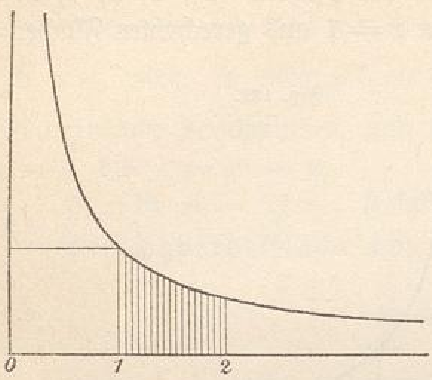
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

a) Anwendungen auf Logarithmenberechnung

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Fig. 134.



Entsprechendes geschieht bei schräger Parallelprojektion.

Mit Hülfe dieser Bemerkung lassen sich beliebige Segmente jeder Hyperbel berechnen. (Vgl. S. 47 bis 50.)

Mit Hülfe der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ lassen sich demnach die Logarithmen gegebener Zahlen mit beliebiger Genauigkeit berechnen, indem man das Diagramm in gleiche Flächenstreifen einteilt. Die Trapezformel giebt geringeren Genauigkeitsgrad, als die verallgemeinerte Simpson-Formel.

11) **Aufgabe.** Die natürlichen Logarithmen von 2, $\frac{5}{4}$ und 10 und den Modul der Briggschen Logarithmen angenähert zu berechnen.

Auflösung. Nimmt man 8 Streifen, so ist nach S. 127 angenähert

$$\lg 2 = \lg(1+1) = \overset{2}{\underset{1}{F}}$$

$$= \frac{2-1}{6\cdot\frac{8}{2}}\left[1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{8}}+\frac{1}{1+\frac{4}{8}}+\frac{1}{1+\frac{6}{8}}\right)+4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}}+\frac{1}{1+\frac{3}{8}}+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}+\frac{1}{1+\frac{7}{8}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}\right)+4\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)\right] = 0{,}693158\,..$$

Ebenso

$$\lg\frac{5}{4} = \lg\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\frac{5}{4}-1}{6\cdot\frac{8}{2}}\left[1+\frac{1}{\frac{5}{4}}+2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{32}}+\frac{1}{1+\frac{4}{32}}+\frac{1}{1+\frac{6}{32}}\right)+4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{32}}+\frac{1}{1+\frac{3}{32}}+\frac{1}{1+\frac{5}{32}}+\frac{1}{1+\frac{7}{32}}\right)\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left[\frac{1}{8}+2\left(\frac{1}{8+\frac{2}{4}}+\frac{1}{8+\frac{4}{4}}+\frac{1}{8+\frac{6}{4}}\right)+4\left(\frac{1}{8+\frac{1}{4}}+\frac{1}{8+\frac{3}{4}}+\frac{1}{8+\frac{7}{4}}\right)+\frac{1}{8+\frac{8}{4}}\right]$$

$$= 2{,}2231435\,\ldots$$

Daraus folgt

$${}^{e}\lg 10 = {}^{e}\lg\left(\frac{10}{8}\cdot 2^3\right) = \lg\frac{5}{4} + 3\lg 2 = 2{,}3026\,\ldots,$$

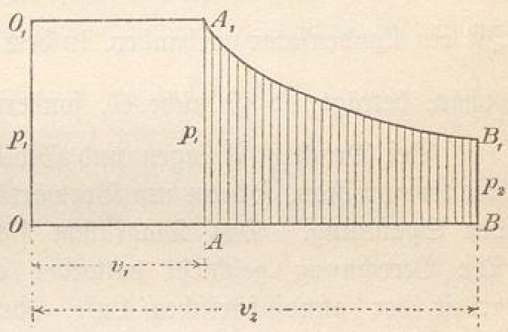
folglich

$$\text{Modul } m = \frac{1}{{}^{e}\lg 10} = 0{,}43429\,\ldots$$

Nimmt man eine größere Zahl von Streifen, so wird die Genauigkeit weit größer. Die Möglichkeit, die Logarithmen zu berechnen, darf damit als vorläufig sicher gestellt betrachtet werden.

12) Eine der wichtigsten Anwendungen dieser Formel ist die Berechnung der Expansions- und Kompressionsarbeit von Gasen unter Voraussetzung konstanter Temperatur, d. h. unter Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes. (Vgl. Teil II, Geom. 105.)

Fig. 135.



Stellt p_1 die Anfangsspannung, v_1 das Anfangsvolumen dar, p_2 die Schlußspannung, v_2 das Schlußvolumen, so ist nach Mariotte

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}$ oder $p_1 v_1 = p_2 v_2$.

Nun ist

$$OAA_1O_1 = p_1 v_1, \quad ABB_1A_1 = OAA_1O_1 \cdot {}^e\lg \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \, {}^e\lg \frac{v_2}{v_1}.$$

Folglich:

$$\textbf{Expansionsarbeit} = p_1 v_1 \, {}^e\lg \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \left({}^{10}\lg \frac{v_2}{v_1}\right) \cdot \frac{1}{m},$$

wo $m = 0{,}4342945$ der Modul der Briggschen Logarithmen ist.

Dieselbe Formel gilt für die Kompressionsarbeit, nur ist dabei $v_2 < v_1$. Bei Dampf- und Druckluft-Maschinen stellt OAA_1O_1 zugleich die leicht zu berechnende Volldruckarbeit V vor, ABB_1A_1 gleichfalls die Expansionsarbeit; setzt man l_1 und l_2 statt v_1 und v_2 (Volldruckhub und gesamter Hub des Kolbens), so wird die Gesamtarbeit $= V + V \cdot {}^e\lg \frac{l_2}{l_1} = V\left[1 + {}^e\lg \frac{l_2}{l_1}\right] = V\left[1 + \frac{1}{m}\,{}^{10}\lg \frac{l_2}{l_1}\right]$. Rechnet man den Arbeitsdruck in Kilogrammen pro qm, die Hubhöhe in Metern, und ist n die Tourenzahl der Maschine in der Minute bei hin- und rückwirkendem Dampfdruck, so ist die theoretische Leistung der Maschine in Pferdestärken

$$N = \frac{2n}{60 \cdot 75} V\left[1 + \frac{1}{m}\,{}^{10}\lg \frac{l_2}{l_1}\right] = \frac{n}{2250} V\left[1 + \frac{1}{m}\,{}^{10}\lg \frac{l_2}{l_1}\right].$$

Das Dargestellte ist aber die Arbeit bezw. Leistungsfähigkeit unter der Annahme, daß jenseits des Kolbens sich ein luftleerer Raum