Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

II. Die Funktion y = 1/x und die Quadratur der Hyperbel

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Versuche dieses für die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ mit Hülfe der Kurve $y = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ auszuführen.

Man kann diese Dinge leicht übersehen, indem man sich Gleichungen mit vorgeschriebenen reellen Wurzeln bildet, z. B. $0 = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - (1 + 2 + 3)x^2 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1)x - 1 \cdot 2 \cdot 3 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, und indem man die Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ für eine größere Zahl von Punkten wirklich konstruiert.

[Gelingt es zu beweisen, daß sich jede ganze rationale Funktion

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

in ein Produkt von Faktoren ersten Grades von der Form

$$y = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots (x - \lambda)$$

zerlegen läßt, so ist der Fundamentalsatz der höheren Algebra gefunden. Gauß ist es gelungen, ihn streng zu beweisen. Aus dem Satze folgt, daß, wenn man eine Wurzel α gefunden hat, die Funktion durch $(x - \alpha)$ ohne Rest teilbar ist und auf eine solche $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades zurückgeführt werden kann. Vergl. Teil II, Arithm. Nr. 76.]

Selbst wenn man von den letzten Andeutungen absieht, erkennt man, daß der binomische Satz und die mit ihm zusammenhängende Summenformel eine große Zahl von Aufgaben lösbar machen, die mit den ganzen rationalen Funktionen zusammenhängen. Das Ausschließen der imaginären und komplexen Koeffizienten und das Nichtbeweisen des Fundamentalsatzes der Algebra deutet aber darauf hin, daß erst die höhere Mathematik von allgemeineren Gesichtspunkten aus im Stande ist, die Lehre von der ganzen rationalen Funktion zum Abschluß zu bringen.

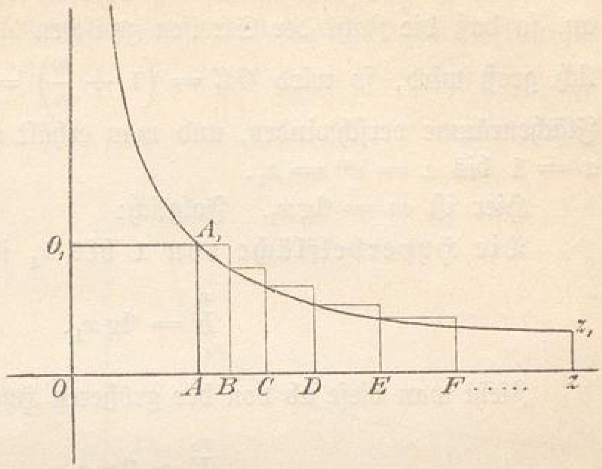
II. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ und die Quadratur der Hyperbel durch den natürlichen Logarithmus.

9) Quadratur der gleichseitigen Hyperbel.

Es handelt sich in diesem Abschnitte um die einfachste der gebrochenen rationalen Funktionen von x.

Nach Teil II, Kegelschn. Nr. 35 stellt die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ eine gleichseitige Hyperbel dar, wobei die Koordinatenachsen mit den Asymptoten zusammenfallen.

Fig. 130.



Um die zwischen der einen Asymptote (d. h. der X-Achse) und der Hyperbel liegende Fläche von $x=1$ bis $x=x_1$ zu berechnen, nehme man einen beliebigen echten Bruch $\frac{m}{n}$ an und mache

$$OA = 1,$$

$$OB = \left(1+\frac{m}{n}\right),$$

$$OC = \left(1+\frac{m}{n}\right)^2, \quad OD = \left(1+\frac{m}{n}\right)^3, \quad \ldots, \quad OZ = \left(1+\frac{m}{n}\right)^n,$$

so daß die Abstände eine geometrische Reihe bilden. In den Teilpunkten errichte man die Ordinaten und vervollständige die Flächenstreifen nach Art der Figur zu Rechtecken. Die Grundlinien der letzteren sind der Reihe nach

$$AB = \frac{m}{n}, \quad BC = \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right), \quad CD = \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^2,$$

$$DE = \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^3, \quad \ldots, \quad VZ = \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1}.$$

Die Rechtecke haben die Höhen

$$1, \quad \frac{1}{1+\frac{m}{n}}, \quad \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^2}, \quad \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1}}.$$

Die Rechtecksinhalte sind

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{1}{1+\frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^2}, \quad \ldots,$$

$$\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1}}.$$

Da also jedes Rechteck den Inhalt $\frac{m}{n}$ hat, so ist die Inhaltssumme der Rechtecke $\frac{m}{n} \cdot n = m$.

Nimmt man nun m endlich, aber n sehr groß (unendlich groß) an, so daß die Zahl der Streifen zwischen A und Z ebenfalls unendlich groß wird, so wird $OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$, die übergreifenden Flächenräume verschwinden, und man erhält m als Hyperbelfläche von $x = 1$ bis $x = e^m = x_1$.

Hier ist $m = {}^e\lg x_1$. Folglich:

Die Hyperbelfläche von 1 bis x_1 ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg x_1.$$

Zieht man diese ab von der größeren Hyperbelfläche (für $x_2 > x_1$)

$$\overset{x_2}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg x_2,$$

so erhält man allgemeiner die Fläche von x_1 bis x_2 als

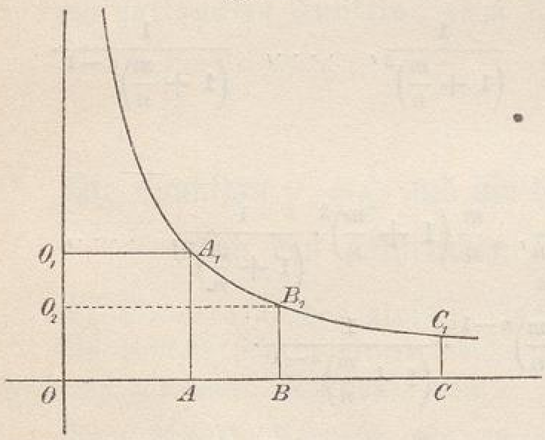
$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = {}^e\lg x_2 - {}^e\lg x_1 = {}^e\lg \frac{x_2}{x_1}.$$

Dieselben Betrachtungen gelten für die Richtung von A nach O, nur müssen dann die Abstände der Teilpunkte von O nach geometrischer Reihe abnehmen, z. B.

$$1,\ \left(1 - \frac{m}{n}\right),\ \left(1 - \frac{m}{n}\right)^2,\ \left(1 - \frac{m}{n}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n.$$

Folgerungen. a) Ist in Figur 131 OB mittlere Proportionale zwischen $OA = 1$ und OC, so ist die Fläche ACC_1A_1 durch BB_1 halbiert. Denn aus

Fig. 131.



$$OB^2 = OA \cdot OC = 1 \cdot OC$$

folgt $2 \lg OB = \lg OC$, also

$$\lg OB = \tfrac{1}{2} \lg OC,$$

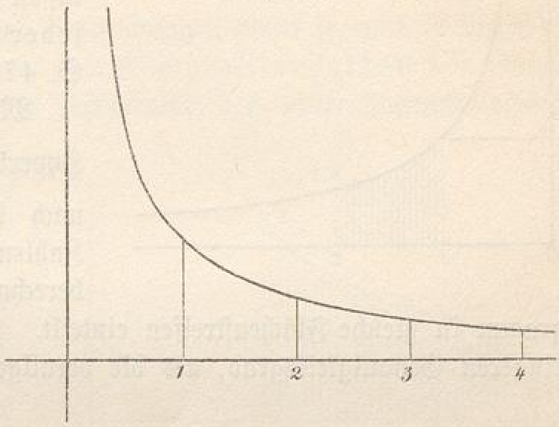
d. h.

$$\overset{B}{\underset{1}{F}} = \tfrac{1}{2}\overset{C}{\underset{1}{F}}.$$

b) Folgen die Abstände OA, OB, OC u. s. w. in geometrischer Reihe aufeinander so sind die zugehörigen Flächenstreifen einander gleich.

c) Die natürlichen Logarithmen der Zahlen (1), 2, 3, 4, ... verhalten sich wie die zugehörigen, von $x = 1$ aus gerechneten Flächenstücke. Wegen dieses Zusammenhanges werden die natürlichen Logarithmen auch als **hyperbolische** bezeichnet.

Fig. 132.



d) Für die Hyperbel $y = \frac{a}{x}$ erhält man die Formel

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = a \cdot {}^e\lg \frac{x_2}{x_1},$$

denn jede Ordinate ist jetzt das a-fache der entsprechenden früheren, so daß auch jeder Vertikalstreifen und ebenso die ganze Fläche das a-fache ist.

Während nun vorher das konstante Rechteck $= 1$ war ($OAA_1O_1 = OBB_1O_2 = 1$), so ist jetzt das konstante Rechteck gleich $a \cdot 1 = a$. Folglich:

Die Fläche von x_1 bis x_2 ist gleich dem Produkte aus dem konstanten Rechteck und dem ${}^e\lg \frac{x_2}{x_1}$.

10) **Ausdehnung auf andere Hyperbeln.**

Denkt man sich die Ebene der Figur unter einem Neigungswinkel α beliebig im Raume angebracht, und projiziert man sie senkrecht auf die Horizontalebene, so geht die Hyperbel wieder in eine Hyperbel, ihre Asymptoten wieder in Asymptoten (jedoch mit anderem Schnittwinkel) über und jede Fläche F verwandelt sich in $F \cos \alpha$. **Folglich bleibt auch hier die Fläche ACC_1A_1 das ${}^e\lg \frac{OC}{OA}$-fache des konstanten Parallelogramms OAA_1O_1.**

Fig. 133.

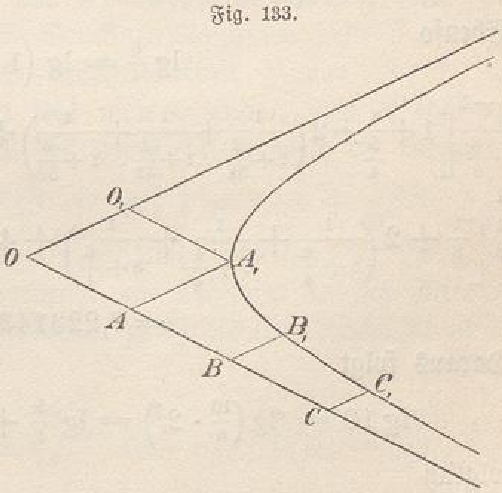
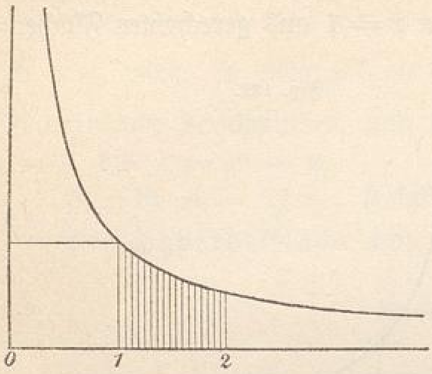


Fig. 134.



Entsprechendes geschieht bei schräger Parallelprojektion.

Mit Hülfe dieser Bemerkung lassen sich beliebige Segmente jeder Hyperbel berechnen. (Vgl. S. 47 bis 50.)

Mit Hülfe der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ lassen sich demnach die Logarithmen gegebener Zahlen mit beliebiger Genauigkeit berechnen, indem man das Diagramm in gleiche Flächenstreifen einteilt. Die Trapezformel giebt geringeren Genauigkeitsgrad, als die verallgemeinerte Simpson-Formel.

11) **Aufgabe.** Die natürlichen Logarithmen von 2, $\frac{5}{4}$ und 10 und den Modul der Briggschen Logarithmen angenähert zu berechnen.

Auflösung. Nimmt man 8 Streifen, so ist nach S. 127 angenähert

$$\lg 2 = \lg(1+1) = \overset{2}{\underset{1}{F}}$$

$$= \frac{2-1}{6 \cdot \frac{8}{2}}\left[1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{8}} + \frac{1}{1+\frac{4}{8}} + \frac{1}{1+\frac{6}{8}}\right) + 4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}} + \frac{1}{1+\frac{3}{8}} + \frac{1}{1+\frac{5}{8}} + \frac{1}{1+\frac{7}{8}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14}\right) + 4\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right)\right] = 0{,}693158\,..$$

Ebenso

$$\lg \frac{5}{4} = \lg\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\frac{5}{4}-1}{6 \cdot \frac{8}{2}}\left[1 + \frac{1}{\frac{5}{4}} + 2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{32}} + \frac{1}{1+\frac{4}{32}} + \frac{1}{1+\frac{6}{32}}\right) + 4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{32}} + \frac{1}{1+\frac{3}{32}} + \frac{1}{1+\frac{5}{32}} + \frac{1}{1+\frac{7}{32}}\right)\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left[\frac{1}{8} + 2\left(\frac{1}{8+\frac{2}{4}} + \frac{1}{8+\frac{4}{4}} + \frac{1}{8+\frac{6}{4}}\right) + 4\left(\frac{1}{8+\frac{1}{4}} + \frac{1}{8+\frac{3}{4}} + \frac{1}{8+\frac{7}{4}}\right) + \frac{1}{8+\frac{8}{4}}\right]$$

$$= 2{,}2231435\,\ldots$$

Daraus folgt

$$^{e}\!\lg 10 = {}^{e}\!\lg\left(\frac{10}{8} \cdot 2^3\right) = \lg\frac{5}{4} + 3\lg 2 = 2{,}3026\,\ldots,$$

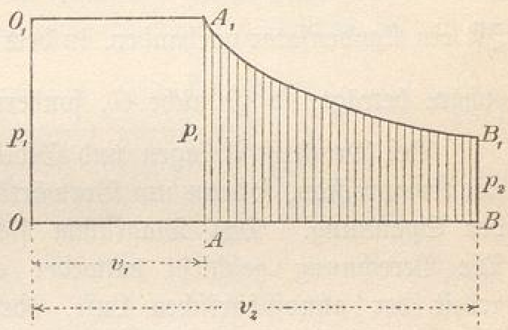
folglich

$$\text{Modul } m = \frac{1}{^{e}\!\lg 10} = 0{,}43429\,\ldots$$

Nimmt man eine größere Zahl von Streifen, so wird die Genauigkeit weit größer. Die Möglichkeit, die Logarithmen zu berechnen, darf damit als vorläufig sicher gestellt betrachtet werden.

12) Eine der wichtigsten Anwendungen dieser Formel ist die Berechnung der Expansions- und Kompressionsarbeit von Gasen unter Voraussetzung konstanter Temperatur, d. h. unter Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes. (Vgl. Teil II, Geom. 105.)

Fig. 135.



Stellt p_1 die Anfangsspannung, v_1 das Anfangsvolumen dar, p_2 die Schlußspannung, v_2 das Schlußvolumen, so ist nach Mariotte

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{v_2}{v_1} \quad \text{oder} \quad p_1 v_1 = p_2 v_2.$$

Nun ist

$$OAA_1O_1 = p_1 v_1, \quad ABB_1A_1 = OAA_1O_1 \cdot {}^e\lg\frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1\, {}^e\lg\frac{v_2}{v_1}.$$

Folglich:

$$\textbf{Expansionsarbeit} = p_1 v_1\, {}^e\lg\frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \left({}^{10}\lg\frac{v_2}{v_1}\right)\cdot\frac{1}{m},$$

wo $m = 0{,}4342945$ der Modul der Briggschen Logarithmen ist.

Dieselbe Formel gilt für die Kompressionsarbeit, nur ist dabei $v_2 < v_1$. Bei Dampf- und Druckluft-Maschinen stellt OAA_1O_1 zugleich die leicht zu berechnende Volldruckarbeit V vor, ABB_1A_1 gleichfalls die Expansionsarbeit; setzt man l_1 und l_2 statt v_1 und v_2 (Volldruckhub und gesamter Hub des Kolbens), so wird die Gesamtarbeit $= V + V\cdot {}^e\lg\frac{l_2}{l_1} = V\left[1 + {}^e\lg\frac{l_2}{l_1}\right] = V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right]$. Rechnet man den Arbeitsdruck in Kilogrammen pro qm, die Hubhöhe in Metern, und ist n die Tourenzahl der Maschine in der Minute bei hin- und rückwirkendem Dampfdruck, so ist die theoretische Leistung der Maschine in Pferdestärken

$$N = \frac{2n}{60\cdot 75}V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right] = \frac{n}{2250}V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right].$$

Das Dargestellte ist aber die Arbeit bezw. Leistungsfähigkeit unter der Annahme, daß jenseits des Kolbens sich ein luftleerer Raum befindet. Bei Auspuffmaschinen hat man aber den Gegendruck der Atmosphäre zu berücksichtigen. Ist G die leicht zu berechnende Gegenarbeit derselben pro Hub, so ist die theoretische Nutzarbeit für jeden Hub

$$V\left[1 + \frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right] - G;$$

also ist die Anzahl der Pferdestärken

$$N = \frac{n}{2250}\left[V\left(1 + \frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right) - G\right].$$

Ist ein Kondensator vorhanden, in dem die mittlere Spannung $\frac{1}{k}$ Atmosphäre beträgt, so ist nicht G, sondern $\frac{1}{k}\,G$ abzuziehen.

Bei Druckluft-Anlagen und Gebläsemaschinen handelt es sich erst um Kompression, sodann um Vorwärtstreiben der Luft ohne Erhöhung der Spannung. Das Diagramm sieht also theoretisch ebenso aus. Die Berechnung geschieht entweder ohne Berücksichtigung der Mitarbeit der atmosphärischen Luft, oder, wie es in der Praxis geschehen muß, unter Berücksichtigung derselben.

Hier muß man für die Praxis einen erfahrungsmäßigen Prozentsatz zuschlagen, während bei der Dampfmaschine und Heißluftmaschine ein gewisser Prozentsatz abzuziehen ist, wenn man den wirklichen Effekt beurteilen will.

Beispiele. a) Bei der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ soll $\overset{2}{\underset{1}{F}}$, $\overset{3}{\underset{2}{F}}$, $\overset{5}{\underset{2}{F}}$ berechnet werden. Die Auflösungen sind 0,69314 . . ., bezw. 0,40546 . . ., 2,74887 . . .

b) Bei einer Auspuffmaschine habe der Kolben den Durchmesser $d = 0{,}6$ m, die Hubhöhe $l = 1{,}2$ m, die Spannung $p = 5$ Atmosphären. Ein Kondensator sei nicht vorhanden. Wie groß ist die theoretische Leistung in Pferdestärken bei $\frac{1}{3}$ Füllung, wenn das Mariottesche Gesetz zu Grunde gelegt wird und das Schwungrad 65 Touren macht?

Auflösung. Rund 253 Pferdestärken. (Also bei 60 % wirklichem Nutzeffekt rund 152 Pferdestärken.)

c) Dieselbe Aufgabe für den Fall, daß ein Kondensator vorhanden ist, der im Durchschnitt $\frac{1}{15}$ Atmosphäre Gegendruck giebt.

Auflösung. Theoretisch rund $347\frac{1}{2}$ Pferdestärken, bei 60 % Nutzeffekt $208\frac{1}{2}$ Pferdestärken.

Aufgabe. Wie vereinfacht sich die Formel bei Auspuffmaschinen, wenn bei $\frac{1}{n_1}$ Cylinder-Füllung mit n_1 Atmosphären begonnen wird?

Auflösung. Für jeden Hub und die Arbeitsleistung der Auspuffmaschine

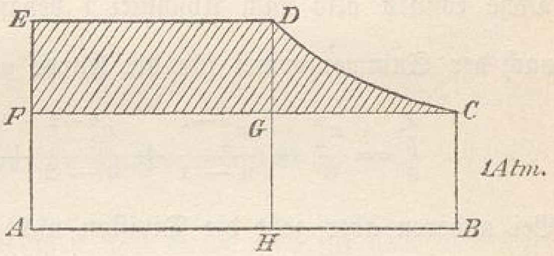
$$V + V \cdot {}^e\lg\frac{n}{1} - n \cdot \frac{V}{n} = V \cdot {}^e\lg\frac{n}{1}.$$

Also

$$N = \frac{n}{2250} \cdot {}^e\lg n_1 = \frac{n}{2250} \cdot \frac{1}{m}\,{}^{10}\lg n_1.$$

Bemerkung. Dieser Fall ist technisch nicht zulässig*), weil durch die Arbeit Abkühlung und Spannungsverminderung eintritt, so daß am Schluß weniger als eine Atmosphäre Spannung herrscht. Das Diagramm stimmt aber überein mit dem Diagramm für den Vorgang in Kompressionscylindern. Zur Kompression würde nötig sein die Arbeit $BCDH$, zum Vorwärtstreiben der komprimierten Luft die Arbeit $HDEA$, die Atmosphäre hilft mit der Arbeit $BCFA$. Folglich ist zum Komprimieren und Vorwärtstreiben nötig die Arbeit $CDEF$.

Fig. 136.



Aufgabe. Ein Gebläsecylinder oder Druckluftcylinder habe 1 m Kolbendurchmesser und 2 m Hub. Die Luft soll auf $1\frac{1}{2}$ Atmosphären zusammengepreßt und dann aus dem Cylinder getrieben werden. Wie groß ist die Kompressionsarbeit unter Mitwirkung der Atmosphäre? (Auflösung: 1170,9 mkg). Wie groß die Arbeit für das Hinaustreiben unter Mitwirkung der Atmosphäre? (Auflösung: 5410 mkg). Wie groß die Gesamtarbeit? (Auflösung: 6581,8 mkg).

Die Formel $V \cdot {}^e\lg 1{,}5 = \frac{V \cdot {}^{10}\lg 1{,}5}{m}$ liefert ebenfalls direkt 6581,8 mkg, sobald unter V die Arbeit $HDEA$ oder $BCFA$ verstanden wird.

Macht die Maschine doppelwirkend 40 Touren, so sind theoretisch erforderlich ~ 117 Pferdestärken; bei 25 % Zuschlag wegen der Nebenwiderstände ~ 146 Pferdestärken.

Aufgabe. Wie viel Leistungsfähigkeit ist nötig, um pro Sekunde 1 cbm Luft auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ des Raumes zusammenzupressen und unter konstantem Gegendruck aus dem Cylinder zu treiben?

*) Weiter unten wird das adiabatische Diagramm berechnet.

Auflösung. Man denke sich den Cylinderkolben von 1 qm Querschnitt und 1 m Gesamthub. Die obige Formel giebt dann die theoretische Leistungsfähigkeit von 95,5 Pferdestärken, $151\frac{1}{3}$ Pferdestärken, 191 Pferdestärken für die treibende Maschine.

---

13) Bemerkung über rationale gebrochene Funktionen. Gewisse rationale gebrochene Funktionen lassen sich auf ganze rationale zurückführen, z. B.

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

Diese können also nach Abschnitt I behandelt werden. So ist z. B. nach der Summenformel für die Kurve $y = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^n}{n} + \frac{x_1^{n-1}}{n-1} + \frac{x_1^{n-2}}{n-2} + \cdots + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{1}.$$

Bei anderen aber geht die Division nicht auf, z. B. bei

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Darf man das Restglied für $n = \infty$ vernachlässigen, so hat man eine konvergente unendliche Reihe, mit deren Gliedern vermutlich ebenso verfahren werden darf, wie mit einer ganzen rationalen Funktion. Diese Berechtigung ist genau zu untersuchen. Hat aber das Restglied nicht die Grenze 0, so ist die unendliche Reihe unbrauchbar.

Um also einen Fortschritt zu ermöglichen, hat man die Theorie der unendlichen Reihen aufzustellen. Dies soll im folgenden Abschnitte angebahnt werden.

III. Allgemeines über die unendlichen Reihen.

a) Rückblick auf die bereits bekannten Reihen.

14) In Folgendem soll unter „Reihe" im Allgemeinen eine „unendliche Reihe" verstanden werden.

In Teil II wurden folgende Reihen summiert:

1) Die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \text{ jedoch nur für } -1 < x < +1.$$